高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：98.11.17					
範圍	2-2 無窮數列級數(1)	班級		姓名	
		座號			

一、單選題(每題 5 分)

1. 下列各無窮級數，何者為收斂級數？

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}10(-1)^n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{50}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4^{n+1}}{9^{n-1}})$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n^2+n-1}{n^2})$

【解答】(C)

【詳解】

(A)錯。$-10+10-10+10-10+.......\Rightarrow$公比 $r=-1$，故發散

(B)錯。$\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+......\Rightarrow$公比 $r=1$，故發散

(C)對。$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4^{n+1}}{9^{n-1}})=\sum_{n=1}^{\infty}4^2\cdot(\frac{4}{9})^{n-1}=16+16(\frac{4}{9})+16(\frac{4}{9})^2+...\Rightarrow$，公比 $r=\frac{4}{9}$，收斂

(D)錯。原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})=\sum_{n=1}^{\infty}1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}>\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty$，故發散

二、多重選擇題(每題 10 分)

1. 下列各數列何者一定收斂？

(A) $a_n=\frac{1}{n}$ (B) $b_n=ar^{n-1}$ (C) $c_n=(-1)^n$ (D) $d_n=7+(-\frac{1}{2})^n$ (E) $e_n=\frac{3^n+2^n}{6^n}$

【解答】(A)(D)(E)

【詳解】

(A)正確：$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，收斂

(B)錯誤：$b_n=ar^{n-1}$，當 $|r|<1$ 或 $r=1$時才收斂，否則發散

(C)錯誤：$<c_n>=<-1，1，-1，1，\cdots>$，發散

(D)正確：$\lim_{n\to\infty}[7+(-\frac{1}{2})^n]=7$

(E)正確：$\lim_{n\to\infty}(\frac{3^n+2^n}{6^n})=\lim_{n\to\infty}[\frac{\frac{3^n}{6^n}+\frac{2^n}{6^n}}{\frac{6^n}{6^n}}]=\frac{0+0}{1}=0$，收斂

2. 下列式子哪些是正確的？

(A) $1-1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots=0$

(B) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(C) $1-2+4-8+16-32+\cdots+(-2)^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-(-2)}$

(D) $2.\overline{9} < 3$

(E)無窮級數 $1+2+4+\cdots+2^{30}+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^n+\cdots$是收斂的

【解答】(B)(E)

【詳解】

(A)$1-1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$數列$<(-1)^{n-1}>$為振動數列，其極限不存在，故其和不存在

(B)$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^{n-1}+\cdots$

$=1+(\frac{-1}{\sqrt{2}})+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^3+\cdots+(\frac{-1}{\sqrt{2}})^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-(\frac{-1}{\sqrt{2}})}=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(C)$1-2+4-8+16-32+\cdots+(-2)^{n-1}+\cdots$

$=1+(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^4+(-2)^5+\cdots+(-2)^{n-1}+\cdots$ 公比 $r=-2$，級數發散

(D) $2.\overline{9}=2+0.9+0.09+0.009+\cdots=2+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots=2+\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=2+1=3$

(E) $1+2+4+\cdots+2^{30}+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^n+\cdots$

$=1+2+2^2+\cdots+2^{30}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1+2+2^2+\cdots+2^{30}+1=2^{31}$ ∴ 此級數是收斂的

3. 設$\langle a_n \rangle$，$\langle b_n \rangle$為兩數列，判斷下列各選項何者正確？

(A) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$ (B) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$ (C) $\sum_{k=1}^{n}(a_k\cdot b_k)=(\sum_{k=1}^{n}a_k)(\sum_{k=1}^{n}b_k)$

(D) $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}$ (E) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

【解答】(A)(B)(E)

【詳解】

(A)正確：$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$ (B)正確：$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(C)錯誤：$\sum_{k=1}^{n}(a_k\cdot b_k)\neq(\sum_{k=1}^{n}a_k)(\sum_{k=1}^{n}b_k)$ (D)錯誤：$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\neq\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}$ (E)正確：$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

4. 下列無窮數列，何者收斂？

(A) $<\frac{n^2+n+1}{n^2+3}>$　(B) $<\frac{2n-5}{3n^2+n+1}>$　(C) $<\frac{n^2+999}{3n-1000}>$　(D) $<(\frac{101}{100})^n>$　(E) $<(-1)^n>$

【解答】(A)(B)

【【詳解】

(A)$\because$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=\frac{1+0+0}{1+0}=1$　$\therefore$ 收斂

(B)$\because$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-5}{3n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{0-0}{3+0+0}=0$　$\therefore$ 收斂

(C)$\because$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+999}{3n-1000}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\frac{999}{n}}{3-\frac{1000}{n}}=\frac{\infty+0}{3-0}=\infty$，不存在　$\therefore$ 發散

(D)$\because$ $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{101}{100})^n=\infty$，不存在 (公比$=\frac{101}{100}>1$)　$\therefore$ 發散

(E)$\because$ $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=\begin{cases}-1\text{，}n\text{爲奇數}\\ 1\text{，}n\text{爲偶數}\end{cases}$，不是定數　$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$不存在　$\therefore$ 數列發散

三、填充題(每題 10 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2-n}{n+1}-\frac{n^2+n}{n-1})$之值爲__________。

【解答】-4

【詳解】

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2-n}{n+1}-\frac{n^2+n}{n-1})=\lim_{n\to\infty}[\frac{(n^2-n)(n-1)+(n^2+n)(n+1)}{n^2-1}]=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^2}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4}{1-\frac{1}{n^2}}=-4$$

2. $\sum\limits_{k=-2}^{13}6=$__________。

【解答】96

【詳解】$k=-2,-1,0,1,2,\ldots\ldots,13$共 16 項，　$\sum\limits_{k=-2}^{13}6=\underbrace{6+6+\cdots+6}_{16個}=16\times6=96$

3. 試計算級數$\sum\limits_{k=1}^{100}\frac{1}{k\cdot(k+1)}$之值 = __________。

【解答】$\frac{100}{101}$

【詳解】$\sum\limits_{k=1}^{100}\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{100}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$

4. 求$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ \cdots\ +\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}+\ \cdots=$__________。

【解答】2

【詳解】

$$a_k=\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\frac{2}{k(k+1)}=2[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=2[(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ \cdots)]=2\times1=2$$

5. 已知一無窮等比級數，和為$\frac{18}{5}$，其第二項為 -4，則首項為__________。

【解答】6

【詳解】

設首項 a，公比 $|r|<1$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}\frac{a}{1-r}=\frac{18}{5}\ \cdots\cdots① \\ ar=-4\ \ \cdots\cdots②\end{cases}$

由②得 $a=\frac{-4}{r}$，代入①得 $9r^2-9r-10=0$

$\Rightarrow$ $(3r+2)(3r-5)=0$ $\Rightarrow$ $r=-\frac{2}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$（不合） 代回② $\therefore$ $a=6$

6. 計算無窮級數 $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-2}{7})^n$ 的和為__________。

【解答】$\frac{7}{9}$

【詳解】$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-2}{7})^n=1+(\frac{-2}{7})+(\frac{-2}{7})^2+\cdots+(\frac{-2}{7})^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-(\frac{-2}{7})}=\frac{7}{9}$

7. 將分數$\frac{3}{7}$表成小數時，令小數點後第 n 位的數字為 a_n，則 $a_{2009}=$__________。

【解答】7

【詳解】

$\frac{3}{7}=0.\overline{428571}$，它的循環節有六個數字 $2009=6\cdot334+5$，小數點後第 2009 位數字為 7

8. 循環小數 $2.3\overline{15}$ 化為最簡分數為__________。

【解答】$\frac{382}{165}$

【詳解】$2.3\overline{15}=\frac{2315-23}{990}=\frac{2292}{990}=\frac{382}{165}$

9. 化 $0.1\overline{6}+23.22\overline{3}$ 成最簡分數__________。

【解答】$\dfrac{2339}{100}$

【詳解】$0.1\overline{6}+23.22\overline{3}=\dfrac{16-1}{90}+\dfrac{23223-2322}{900}=\dfrac{21051}{900}=\dfrac{2339}{100}$

10. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+3^n}{5^n}$ 之和 $=$ __________。

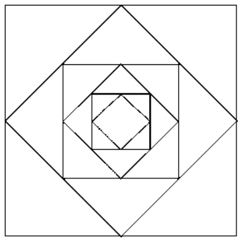
【解答】$\dfrac{13}{6}$

【詳解】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+3^n}{5^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(\dfrac{2}{5})^n+(\dfrac{3}{5})^n]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2}{5})^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{3}{5})^n$

$$=[(\frac{2}{5})+(\frac{2}{5})^2+(\frac{2}{5})^3+\cdots]+[(\frac{3}{5})+(\frac{3}{5})^2+(\frac{3}{5})^3+\cdots]=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{2}{5}\times\frac{5}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{2}=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6}$$

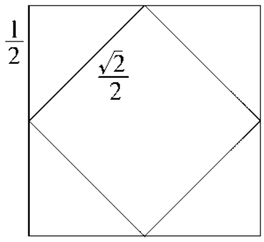
11. 16.一正方形的邊長爲 10 公分，以各邊中點爲頂點連成的四邊形也是正方形，如此繼續作出無限多個由各邊中點爲頂點連成的正方形，求圖中無限多正方形

(1)周長的總和爲__________。(1)面積的總和爲__________。



【解答】(1) $40(2+\sqrt{2})$ (2) 200

【詳解】



由畢氏定理知：

正方形各邊中點爲頂點連成正方形的周長爲原正方形周長的 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 倍，

面積爲 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2=\dfrac{1}{2}$ 倍

此無限多個正方形的周長依次爲 40、$40(\dfrac{\sqrt{2}}{2})$、$40(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2$、$40(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^3$、……….

面積依次爲 100、$100(\dfrac{1}{2})$、$100(\dfrac{1}{2})^2$、$100(\dfrac{1}{2})^3$、…….

(1)周長首項 40，公比 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，周長爲 $\dfrac{40}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{80}{2-\sqrt{2}}=40(2+\sqrt{2})$

(2)面積首項 100，公比 $\dfrac{1}{2}$，面積爲 $\dfrac{100}{1-\frac{1}{2}}=200$

12.求級數 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{7}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{10}{49}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{8}{27}+\dfrac{20}{343}+\cdots$ 至無限多項之和__________。

【解答】$\frac{8}{5}$

【詳解】分組各成爲 3 無窮等比級數

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{5}{7}+\frac{1}{4}+\frac{4}{9}+\frac{10}{49}+\frac{1}{8}-\frac{8}{27}+\frac{20}{343}+\cdots$$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots)+(-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}\cdots)+(\frac{5}{7}+\frac{10}{49}+\frac{20}{343}+\cdots)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{2}{3}}{1-(-\frac{2}{3})}+\frac{\frac{5}{7}}{1-\frac{2}{7}}=1-\frac{2}{5}+1=\frac{8}{5}$$

13.試求下列無窮級數的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^{n+2}}{4^n}=$＿＿＿＿＿。(2) $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+2)}+\cdots=$＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\frac{5}{3}$　(2) $\frac{5}{12}$

【詳解】

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^{n+2}}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{3}{4})^n+(-2)^2\cdot(\frac{-2}{4})^n]=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{4})^n+4\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-1}{2})^n=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}+4\times\frac{(\frac{-1}{2})}{1-(\frac{-1}{2})}=\frac{5}{3}$$

(2)一般項 $a_k=\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3})$

原式 $=\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3})$

$$=\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots]=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{5}{12}$$

14.設 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$ 之總和爲 S，而其前 n 項之和爲 S_n，若 $|S-S_n|<\frac{1}{1000}$，則 n 之最小値爲＿＿＿＿＿。

【解答】6

【詳解】$S=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$,　$S_n=\frac{\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}$

$$|S-S_n|=\left|\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}\right|=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3})^n<\frac{1}{1000}\quad\Rightarrow\quad 3^n>500$$

,則 n 之最小値爲 6

15.試求級數 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+20)=$＿＿＿＿＿。

【解答】1540
【詳解】

一般項 $a_k = 1 + 2 + \cdots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

所求 $= \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} \dfrac{k(k+1)}{2} = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{20} k(k+1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{20\times 21\times 22}{3} = 1540$

16.設 $S = \sum_{k=1}^{100} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + 100^2$，則 S 除以 3 的餘數 $=$__________。

【解答】1
【詳解】

$S = 1^2 + 2^2 + \cdots + 100^2 = \dfrac{1}{6} \times 100 \times (100 + 1)(2 \times 100 + 1) = 50 \times 101 \times 67$

$= (3 \times 16 + 2)(3 \times 33 + 2)(3 \times 22 + 1) = 3k + (2 \times 2 \times 1) = 3k + 4 = 3(k + 1) + 1$

$\therefore$ S 被 3 除之餘數爲 1

17.設 $x \in R$，若級數 $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}(1-x) + \dfrac{1}{3}(1-x)^2 - \dfrac{1}{3}(1-x)^3 + \cdots + \dfrac{1}{3}(-1)^{n-1}(1-x)^{n-1} + \cdots$ 收斂，

求(1) x 值之範圍爲__________。 (2)若此級數和爲 $\dfrac{1}{2}$，則 x 之值爲__________。

【解答】(1) $0 < x < 2$ (2) $\dfrac{4}{3}$

【詳解】

(1)收斂 $\Leftrightarrow$ $|r| < 1$，$|-(1-x)| = |x-1| < 1$ $\Rightarrow$ $0 < x < 2$

(2) $S = \dfrac{a_1}{1-r}$，$\dfrac{1}{2} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-[-(1-x)]}$ $\Rightarrow$ $2 - x = \dfrac{2}{3}$，得 $x = \dfrac{4}{3}$

18.求 $\sum_{k=1}^{20}[(k-1)(k-2)] =$__________。

【解答】2280
【詳解】

$\sum_{k=1}^{20}[(k-1)(k-2)] = \sum_{k=1}^{20}(k^2 - 3k + 2) = \sum_{k=1}^{20} k^2 - 3\sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 2 = \dfrac{1}{6} \times 20 \times 21 \times 41 - 3 \times \dfrac{20\times 21}{2} + 2 \times$

$20 = 2280$

19.求 $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2k-1)(2k+1) + \cdots + 29 \cdot 31 =$__________。

【解答】4945
【詳解】

一般項 $a_k = (2k-1)(2k+1) = 4k^2 - 1$

所求 $= \sum_{k=1}^{15} a_k = \sum_{k=1}^{15}(4k^2 - 1) = 4\sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{15} 1 = 4 \cdot \dfrac{15\times 16\times 31}{6} - 15 = 4960 - 15 = 4945$

20. 級數 $0.7 + 0.077 + 0.00777 + 0.0007777 + \cdots$ 之總和爲__________。

【解答】$\dfrac{700}{891}$

【詳解】

$$0.7+0.077+0.00777+0.0007777+\cdots=\frac{7}{9}(0.9+0.099+0.00999+0.0009999+\cdots)$$

$$=\frac{7}{9}[(1-\frac{1}{10})+(\frac{1}{10}-\frac{1}{1000})+(\frac{1}{100}-\frac{1}{100000})+\cdots]$$

$$=\frac{7}{9}[(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots)-(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\cdots)]=\frac{7}{9}(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}-\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{100}})=\frac{7}{9}(\frac{10}{9}-\frac{10}{99})=\frac{700}{891}$$

21. 設 $4(1+3+3^2+\cdots+3^n)=4372$，則 $n=$__________。

【解答】6

【詳解】$4(1+3+3^2+\cdots+3^n)=4372\Rightarrow 1+3+3^2+\cdots+3^n=1093$

$$S_n=\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}=1093\Rightarrow 3^{n+1}=2187，\quad n=6$$

22. 設 a，b，$c\in N$，$1<a<b<c<9$，且$<0.\overline{a}$，$0.0\overline{b}$，$0.00\overline{c}$，$\cdots>$成等比數列，則

(1) $(a，b，c)=$__________。(2)該數列之第四項爲__________。（寫成循環小數）

【解答】(1) (2，4，8)　(2) $0.001\overline{7}$

【詳解】

(1) $0.\overline{a}$，$0.0\overline{b}$，$0.00\overline{c}$成等比，即$\dfrac{a}{9}$，$\dfrac{b}{90}$，$\dfrac{c}{900}$成等比

則$\dfrac{a}{9}\times\dfrac{c}{900}=(\dfrac{b}{90})^2$　$\Rightarrow$　$b^2=ac$，又 $1<a<b<c<9$　　則$(a，b，c)=(2，4，8)$

(2)數列爲$<\dfrac{2}{9}$，$\dfrac{4}{90}$，$\dfrac{8}{900}$，$\cdots>$，首項 $a_1=\dfrac{2}{9}$，公比 $r=\dfrac{\frac{4}{90}}{\frac{2}{9}}=\dfrac{1}{5}$

故第四項 $a_4=a_1r^3=\dfrac{2}{9}\times\dfrac{1}{125}=\dfrac{16}{9000}=0.001\overline{7}$

23. 在 1 與 999 之間，插入 n 項，使其成爲一等差數列，試求數列總和超過 10000 時，最小自然數 n 值爲__________。

【解答】19

【詳解】

等差數列：1，b_1，b_2，$\cdots$，b_n，999，共$(n+2)$項，總和=$\dfrac{(n+2)(1+999)}{2}>10000$

$n>18$，所以最小自然數 n 爲 19

24.設數列$\langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{100} \rangle$爲一個等差數列，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，

(1)若$\langle a_n \rangle$之公差爲 2，且 $S_{100} = 300$，則其偶數項之和 $a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} =$__________。

(2)若 $S_{20} = 16$，$S_{40} = 36$，則 $S_{60} =$__________。

【解答】(1) 200　(2) 60

【詳解】

(1) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots + a_{99} + a_{100} = 300$

又 a_2 比 a_1 多 2、a_4 比 a_3 多 2、……..、a_{100} 比 a_{99} 多 2

$[(a_2 - 2) + a_2] + [(a_4 - 2) + a_4] + [(a_6 - 2) + a_6] + \cdots + [(a_{100} - 2) + a_{100}] = 300$

$2(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - 2 \times 50 = 300 \quad \Rightarrow \quad 2(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) = 400$

故 $a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = 200$

(2) S_{20}，$S_{40} - S_{20}$，$S_{60} - S_{40}$ 成等差(首 20 項的和、次 20 項的和、再 20 項的和、….亦成等差) $\Rightarrow$ 16，$36 - 16$，$S_{60} - 36$ 成等差 $\Rightarrow$ $(S_{60} - 36) + 16 = 2(36 - 16)$，得 $S_{60} = 60$

25.數列$\frac{1}{4}$，$\frac{4}{8}$，$\frac{7}{12}$，$\frac{10}{16}$，…，第 n 項爲 a_n，則

(1) a_n 爲__________。　(2)若 $a_n > \frac{29}{40}$，則 n 之最小值爲__________。

【解答】(1) $\frac{3n-2}{4n}$　(2) 21

【詳解】

找規則原式 $\frac{3\times1-2}{4\times1}, \frac{3\times2-2}{4\times2}, \frac{3\times3-2}{4\times3}, \ldots\ldots \Rightarrow a_k = \frac{3k-2}{4k}$

(1) $a_n = \frac{3n-2}{4n}$

(2) $\frac{3n-2}{4n} > \frac{29}{40} \Rightarrow 120n - 80 > 116n \Rightarrow 4n > 80, \quad n \geq 21$

26.二等差數列$\langle a_n \rangle$，$\langle b_n \rangle$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$，若 $S_n : T_n = (5n + 3) : (3n + 1)$，則

$\frac{a_9}{b_9} =$______。

【解答】$\frac{22}{13}$

【詳解】$\frac{S_n}{T_n} = \frac{5n+3}{3n+1} \Rightarrow \quad \frac{a_9}{b_9} = \frac{17a_9}{17b_9} = \frac{S_{17}}{T_{17}} = \frac{17\times5+3}{17\times3+1} = \frac{22}{13}$

27.一皮球自 120 公尺高處落下，每次反跳$\frac{2}{3}$的高度，則至靜止皮球所經過的距離爲______公尺。

【解答】600

【詳解】

球最先落下經過 120 公尺，因每次反彈的高度為前高度的$\frac{2}{3}$

高度依次分別為 120、$120(\frac{2}{3})$、$120(\frac{2}{3})^2$、$120(\frac{2}{3})^3$..................... 公尺

所求距離和$= 120 + 2 \times 120(\frac{2}{3}) + 2 \times 120(\frac{2}{3})^2 + 2 \times 120\,(\frac{2}{3})^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$= 120 + 240\,[\frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^3 + (\frac{2}{3})^4 + \ldots\ldots\ldots] = 120 + 240 \times \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 600$$