高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：98.11.10					
範圍	2-1 數列級數(2)	班級		姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 設$\langle a_n \rangle$是一等比數列，$a_6 = 24$ 且 $a_8 = 96$，公比是正數，若前 n 項總和是 S_n，試求 S_{10} =______。

【解答】$\dfrac{3069}{4}$

【詳解】

設公比為 r（$r > 0$），首項為 a_1

$$\begin{cases} 24 = a_1 r^5 \cdots\cdots ① \\ 96 = a_1 r^7 \cdots\cdots ② \end{cases}，\frac{②}{①} \Rightarrow r^2 = 4，得 r = 2，又 a_1 = \frac{24}{r^5} = \frac{24}{2^5} = \frac{3}{4}，$$

$$\therefore\ S_{10} = \frac{\frac{3}{4}(2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{3069}{4}$$

2. 假設某鎮每年的人口數逐年成長且成一等比數列，已知此鎮十年前有 25 萬人，現在 30 萬人，那麼二十年後，此鎮人口應有__________萬人。（求到小數點後第一位）

【解答】43.2

【詳解】

成等比數列$\Rightarrow a_1 = 25$，$a_2 = 30 \Rightarrow r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{30}{25} = \dfrac{6}{5}$

二十年後為 $a_4 = a_1 r^3 = 25 \times (\dfrac{6}{5})^3 = \dfrac{216}{5} = 43.2$ 萬人

3. 有三正數成等差數列，其和為 36，若各數依次加 1，4，43 後則成為等比數列，求此三數依序為__________。

【解答】3，12，21

【詳解】

設三正數為 $a - d$，a，$a + d \Rightarrow (a - d) + a + (a + d) = 36 \Rightarrow a = 12$

又$(a - d + 1)$，$(a + 4)$，$(a + d + 43)$成等比，則$(a + 4)^2 = (a - d + 1)(a + d + 43)$

$\Rightarrow 16^2 = (13 - d)(55 + d) \Rightarrow (d - 9)(d + 51) = 0 \Rightarrow d = 9$，$-51$（不合），

$\therefore$ 三正數為 3，12，21

4. 設 $n \in N$，且 $200 < n < 300$，則被 9 除餘 2 的所有 n 之總和為__________。

【解答】2794

【詳解】

設 $n = 9k + 2$，$k \in Z$，$200 < n < 300 \Rightarrow 200 < 9k + 2 < 300 \Rightarrow 198 < 9k < 298$

$\Rightarrow 22 < k < 33.\cdots$，$\therefore\ k = 23$，$24$，$\cdots$，$33$ 共 $33 - 23 + 1 = 11$個，

總和$= \dfrac{11[(9 \times 23 + 2) + (9 \times 33 + 2)]}{2} = 2794$

5. 設一級數的首項 $a_1 = 2$ 且 $a_{n+1} - a_n = 5$，若此級數前 n 項的和為 S_n，則第 k 項 a_k

$=$__________；而 $S_{100}=$__________。

【解答】$5k-3$；24950

【詳解】

因爲 $a_{n+1}-a_n=5$，故 $\sum_{k=1}^{n}a_k$ 是公差爲 5 的等差級數。

首項 $a_1=2$，故第 k 項爲 $a_k=a_1+(k-1)d=2+(k-1)\cdot 5=5k-3$

等差級數求和公式 $S_{100}=\dfrac{100}{2}[2\cdot 2+(100-1)\cdot 5]=50(4+495)=24950$

6. 一實數等比數列，設第 n 項爲 a_n，若 $a_4=5$，$a_{16}=320$ 且 $a_n>20000$，則最小自然數 n 值爲__________。

【解答】28

【詳解】

設公比爲 r，則 $a_{16}=a_4r^{16-4} \quad \Rightarrow \quad 320=5r^{12} \quad \Rightarrow \quad r^{12}=64 \quad \therefore \quad r=\pm\sqrt{2}$

由 $a_n=a_4r^{n-4}=5(\sqrt{2})^{n-4}>20000 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{2})^{n-4}>4000$

$2^{10}=1024, 2^{11}=2048, 2^{12}=4096, ...\Rightarrow \quad n-4\geq 24 \quad \therefore \quad n\geq 28$

7. 有一等差數列，設第 n 項爲 a_n，已知 $a_3=8$，$a_8=-7$，求 $a_n=$__________。

【解答】$-3n+17$

【詳解】

$$\begin{cases} a_3=a_1+2d=8 \\ a_8=a_1+7d=-7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1=14 \\ d=-3 \end{cases}，\therefore a_n=a_1+(n-1)d=14+(n-1)\cdot(-3)=-3n+17$$

8. 設數列 $<a_n>$ 爲一等比數列，且 $a_5=4$，$a_7=9$，則第 10 項爲__________。

【解答】$\pm\dfrac{243}{8}$

【詳解】

設首項爲 a_1，公比爲 r，則 $\begin{cases} a_1r^4=4 \cdots\cdots ① \\ a_1r^6=9 \cdots\cdots ② \end{cases}$

$\dfrac{②}{①}$ 得 $r^2=\dfrac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad r=\pm\dfrac{3}{2}$ 代入①得 $a_1=\dfrac{64}{81}$，$a_{10}=a_1\cdot r^9=\dfrac{64}{81}\cdot(\pm\dfrac{3}{2})^9=\pm\dfrac{243}{8}$

9. $1+2i+3i^2+4i^3+\cdots+102i^{101}=$__________。

【解答】$51+52i$

【詳解】

$$\begin{array}{rl} S= & 1+2i+3i^2+\cdots+102i^{101} \\ -)\quad iS= & \quad\ i+2i^2+\cdots+101i^{101}+102i^{102} \\ \hline (1-i)S= & 1+i+i^2+\cdots+i^{101}-102i^{102} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad S(1-i)=\dfrac{1\cdot(i^{102}-1)}{i-1}+102 \quad \Rightarrow \quad S=51+52i$

10.設 $<a_1，a_2，70，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，a_9，-7，\cdots>$ 爲一等差數列，求：

(1)第 30 項為＿＿＿＿＿。

(2)等差數列前 n 項總和 S_n，則 $n=$＿＿時，S_n 有最大值；又此時總和的最大值為＿＿＿＿。

【解答】(1) -227　(2) 9；432

【詳解】$\begin{cases} a_3=a_1+2d=70 \\ a_{10}=a_1+9d=-7 \end{cases}$ $\Rightarrow$　$d=-11$，$a_1=92$

(1) $a_{30}=92-11\times 29=-227$

(2) $a_n=a_{30}+(n-30)d=-227+(n-30)(-11)=103-11n$

當 a_n 開始為負時，S_{n-1} 最大

$a_n<0\Rightarrow 103-11n<0, n>\dfrac{103}{11},\Rightarrow n\geq 10$，故 S_9 最大，當 $n=9$ 時，S_n 有最大值 432

11.有兩等差級數，其首 n 項和之比為 $(2n+3):(3n+2)$，試求兩級數第 11 項的比為＿＿＿＿。

【解答】9：13

【詳解】

設等差數列 $<a_n>$ 前 n 項和為 S_n，等差數列 $<b_n>$ 前 n 項和為 S_n'，

第 $\dfrac{21+1}{2}=11$ 項為全部 21 項之中央項 $\dfrac{a_{11}}{b_{11}}=\dfrac{21\cdot a_{11}}{21\cdot b_{11}}=\dfrac{S_{21}}{S_{21}'}=\dfrac{2(21)+3}{3(21)+2}=\dfrac{45}{65}=\dfrac{9}{13}$

12.設一數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項總和為 n^2-2n，若 $a_k=999$，則 $k=$＿＿＿＿＿。

【解答】501

【詳解】

$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-2n)-[(n-1)^2-2(n-1)]=2n-3$，$2k-3=a_k=999$　$\Rightarrow$　$k=501$

13.設三正整數成一等比數列，其和為 52，倒數和為 $\dfrac{13}{36}$，則這三正數中最大者為＿＿＿＿。

【解答】36

【詳解】

$$\begin{cases} a+ar+ar^2=52 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{ar}+\dfrac{1}{ar^2}=\dfrac{13}{36} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1+r+r^2)=52 \cdots\cdots ① \\ \dfrac{1+r+r^2}{ar^2}=\dfrac{13}{36} \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① × ②得 $\dfrac{(1+r+r^2)^2}{r^2}=52\times\dfrac{13}{36}$　$\Rightarrow$　$\dfrac{1+r+r^2}{r}=\dfrac{13}{3}$　$\Rightarrow$　$3r^2-10r+3=0$

$\Rightarrow$　$(3r-1)(r-3)=0$　$\Rightarrow$　$r=3$ 或 $\dfrac{1}{3}$，代入①得 $a=4$ 或 6

$\therefore$　三數為 4，12，36 或 6，2，$\dfrac{2}{3}$（不合），故最大者是 36

14.在 3 與 100 之間，插入 a_1，a_2，…，a_8 八個數，使這十個數形成一等差數列，則

(1) $a_5 =$__________。 (2) $\sum_{k=1}^{8} a_k =$__________。

【解答】(1) $\frac{512}{9}$ (2) 412

【詳解】

在 3 與 100 之間，插入 a_1，a_2，…，a_8 八個數，使這十個數 $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_{10}$ 形成一等差數列，且 $b_1 = 3, b_{10} = 100 \Rightarrow 100 = 3 + 9d \Rightarrow d = \frac{100-3}{9} = \frac{98}{9}$

(1) $a_5 = b_6 = 3 + 5 \times \frac{98}{9} = \frac{512}{9}$

(2) $\sum_{k=1}^{8} a_k = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = \frac{8(b_1 + b_{10})}{2} = \frac{8(3+100)}{2} = 412$

15.等比數列 x，$3x+3$，$4x+4$，…，求第 4 項爲__________（不可以 x 表示）。

【解答】$-\frac{64}{15}$

【詳解】

等比數列，$\frac{3x+3}{x} = \frac{4x+4}{3x+3} \quad \Rightarrow \quad (3x+3)^2 = x(4x+4)$

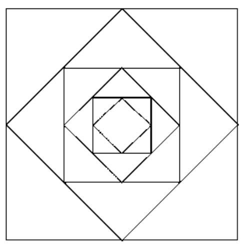
$\Rightarrow \quad 9x^2 + 18x + 9 = 4x^2 + 4x \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 14x + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad (5x+9)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{9}{5}$ 或 $x = -1$

①當 $x = -\frac{9}{5}$ 時，公比 $r = \frac{3 \cdot (-\frac{9}{5}) + 3}{-\frac{9}{5}} = \frac{4}{3}$，$a_4 = (-\frac{9}{5}) \cdot (\frac{4}{3})^3 = (-\frac{9}{5}) \cdot (\frac{64}{27}) = -\frac{64}{15}$

②當 $x = -1$ 時，公比 $r = \frac{3(-1)+3}{-1} = 0$（不合）

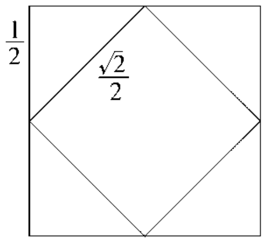
由①，②知 $a_4 = -\frac{64}{15}$



16.一正方形的邊長爲 10 公分，以各邊中點爲頂點連成的四邊形也是正方形，如此繼續作出五個由各邊中點爲頂點連成的正方形，求右圖中六個正方形

(1)周長的總和爲__________。

(1)面積的總和爲__________。



【解答】(1) $70 + 35\sqrt{2}$ (2) $\frac{1575}{8}$

【詳解】

由畢氏定理知：

正方形各邊中點爲頂點連成正方形的周長爲原正方形周長的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍，面積爲 $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2}$ 倍

故此六個正方形的周長依次爲 40，$20\sqrt{2}$，20，$10\sqrt{2}$，10，$5\sqrt{2}$

面積依次爲 100，50，25，$\frac{25}{2}$，$\frac{25}{4}$，$\frac{25}{8}$

(1)周長首項 40，公比 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，周長爲 $\dfrac{40[1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^6]}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=40\cdot\dfrac{1-\frac{1}{8}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{70}{2-\sqrt{2}}=35(2+\sqrt{2})$

(2)面積首項 100，公比 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，面積爲 $\dfrac{100[1-(\frac{1}{2})^6]}{1-\frac{1}{2}}=100\cdot\dfrac{1-\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{100\times63}{32}=\dfrac{1575}{8}$

17.數列 1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，…中，其

(1)第 100 項爲__________。(2)前 100 項之和爲__________。

【解答】(1) 14　(2)945

【詳解】

(1)，(2，2)，(3，3，3)，(4，4，4，4)，…

第 n 組之首項爲 n、末項爲原數列之第 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ 項

$n=13$ 時，$\frac{1}{2}\cdot13\cdot14=91$，$100-91=9$　∴　第 100 項位在第 14 組內之第 9 項

∴　$S_{100}=1+2\times2+3\times3+\cdots+13\times13+14\times9=\frac{1}{6}\cdot13\cdot14\cdot27+126=945$

18.一個球從 81 公尺自由落下，每次著地後又跳回原高度的 $\frac{1}{3}$ 再落下，當它第五次著地時，共經過__________公尺。

【解答】161

【詳解】

球最先落下經過 81 公尺，因每次反彈的高度爲前高度的 $\frac{1}{3}$

第一次著地的高度爲 81 公尺

第二次著地反彈的高度爲 $81\times\frac{1}{3}$ 公尺　，上、下各一趟。

第三次著地反彈的高度爲 $81\times(\frac{1}{3})^2$ 公尺　，上、下各一趟。

第四次著地反彈的高度爲 $81\times(\frac{1}{3})^3$ 公尺　，上、下各一趟。

第五次著地反彈的高度爲 $81\times(\frac{1}{3})^4$ 公尺　，上、下各一趟。

所求距離和 $=81+2\times81\times\frac{1}{3}+2\times81\times(\frac{1}{3})^2+2\times81\times(\frac{1}{3})^3+2\times81\times(\frac{1}{3})^4$

$$= 81 + 162\left[\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{3})^4\right] = 81 + 162 \times \frac{40}{81} = 81 + 80 = 161$$

19. 求 $0.2 + 0.22 + 0.222 + \cdots + 0.\overbrace{22\cdots2}^{n個}$ 和=__________。

【解答】 $\frac{2}{9}[n - \frac{1}{9}(1 - \frac{1}{10^n})] = \frac{2}{81}[9n - 1 + (\frac{1}{10})^n]$

【詳解】

$$0.2 + 0.22 + 0.222 + \cdots + 0.\overbrace{22\cdots2}^{n個} = \frac{2}{9}[0.9 + 0.99 + 0.999 + \cdots + 0.\overbrace{99\cdots9}^{n個}]$$

$$= \frac{2}{9}[(1-0.1)+(1-0.01)+(1-0.001)+......+(1-0.\overbrace{00\cdots01}^{n-1個})]$$

$$= \frac{2}{9}\{(1-\frac{1}{10})+[1-(\frac{1}{10})^2]+[1-(\frac{1}{10})^3]+......+[1-(\frac{1}{10})^n]\}$$

$$= \frac{2}{9}\{[1\times n-[\frac{1}{10}+(\frac{1}{10})^2+(\frac{1}{10})^3+......+(\frac{1}{10})^n]\}$$

$$= \frac{2}{9}\{n - \frac{\frac{1}{10}\cdot\left(1-(\frac{1}{10})^n\right)}{1-\frac{1}{10}}\} = \frac{2}{9}[n - \frac{1}{9}\cdot\left(1-(\frac{1}{10})^n\right)] = \frac{2}{81}[9n - 1 + (\frac{1}{10})^n]$$

20.若 $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{21}{11}$，則自然數 n 之值=__________。

【解答】21

【詳解】

$$a_k = \frac{1}{1+2+3+.......+k} = \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2}{k(k+1)} = 2\cdot\frac{1}{k(k+1)} = 2(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2[(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})] = 2(1-\frac{1}{n+1}) = \frac{21}{11}$$

$$2 - \frac{2}{n+1} = \frac{21}{11} \Rightarrow 22(n+1) - 22 = 21(n+1)\text{，}\therefore\ n = 21$$

21.規定 $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$，則 $\sum_{k=1}^{n}(3k+4)$ 之值爲__________。

【解答】 $\frac{3n^2 + 11n}{2}$

【詳解】

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+4) = 7 + 10 + 13 + ... + (3n+4) = \frac{n[7+(3n+4)]}{2} = \frac{1}{2}n(3n+11)$$