高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：98.11.03					
範圍	2-1 等差、等比數列級數(1)	班級		姓名	
		座號			

一、單選題(每題 5 分)

1.下列何者正確？

(A)若 $b^2 = ac$，則 a，b，c 爲等比數列

(B)數列$<a_n>$滿足 $a_n = a_{n-1}q$，$n \in N$，q 爲常數，則$<a_n>$爲等比數列

(C)數列$<a_n>$中，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n$，且 $S_n = 4n^2 - n + 2$，則 $a_n = S_n - S_{n-1} = 8n - 5$

(D)數列$<a_n>$前 n 項和 $S_n = A^n - 1$，則$<a_n>$不一定是等比數列

【解答】(D)

【詳解】

(A)若 $b^2 = ac$，則 $a：b = b：c$，但必須 $b \neq 0$ 且 $c \neq 0$，a，b，c 才爲等比數列

(B)若 $a_n = a_{n-1}q$，$n \in N$，則 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q$，此時必須 $q \neq 0$，則$<a_n>$才爲等比數列

(C) $a_1 = S_1 = 4 - 1 + 2 = 5$

$a_n = S_n - S_{n-1} = (4n^2 - n + 2) - [4(n-1)^2 - (n-1) + 2]$

$= 4n^2 - n + 2 - 4n^2 + 8n - 4 + n - 1 - 2 = 8n - 5$，$n \geq 2$，故 $a_n = \begin{cases} 5，n = 1 \\ 8n - 5，n \geq 2 \end{cases}$

$a_n = 8n - 5$，當 $n = 1$時不成立。

(D) $a_1 = S_1 = A - 1$，$a_2 = S_2 - S_1 = (A^2 - 1) - (A - 1) = A^2 - A = A(A-1)$

$a_3 = S_3 - S_2 = (A^3 - 1) - (A^2 - 1) = A^3 - A^2 = A^2(A-1)$，

$a_n = S_n - S_{n-1} = (A^n - 1) - (A^{n-1} - 1) = A^n - A^{n-1} = A^{n-1}(A-1)$

當 $A \neq 0$ 時，$\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = A$，則$<a_n>$是等比數列

二、填充題(每題 10 分)

1. 有一等差數列，設第 n 項爲 a_n，已知 $a_3 = 8$，$a_8 = -7$，求 $a_n =$__________。

【解答】$-3n + 17$

【詳解】

$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 8 \\ a_8 = a_1 + 7d = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 14 \\ d = -3 \end{cases}$，$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 14 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 17$

2. 等差數列$<a_n>$，首 n 項和爲 S_n，已知 $a_3 = 9$，$a_{20} = 43$，求 $S_n =$__________。

【解答】$n^2 + 4n$

【詳解】

$\begin{cases} a_1 + 19d = 43 \\ a_1 + 2d = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 5（首項） \\ d = 2（公差） \end{cases}$，則 $S_n = \dfrac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} = \dfrac{n}{2}[10 + (n-1) \times 2] = n^2 + 4n$

3. 若等比數列$\{a_n\}$的第四項爲 6，第六項爲 24，而且數列的每一項都是正數，求這個數列的前 10 項總和爲__________。

【解答】$\frac{3069}{4}$

【詳解】

$\begin{cases} 6 = a_1 r^3 & \cdots\cdots ① \\ 24 = a_1 r^5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$，$\frac{②}{①}$ $\Rightarrow r^2 = 4$，得 $r = 2$，-2（不合）

$r = 2$ 代入①，得 $a_1 = \frac{3}{4}$，所求$= \frac{\frac{3}{4}(2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{3069}{4}$

4. 設有一等比數列，首項爲 7，末項爲 448，總和爲 889，若此數列的公比爲 r，項數爲 n，則數對$(n，r) =$__________。

【解答】(7，2)

【詳解】

設等比數列$< a_n >$，公比 r，S_n 表前 n 項的和，由 $S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r}$ 可得 $889 = \frac{7 - r \cdot 448}{1 - r}$

∴　$889 - 889r = 7 - 448r$　∴　$441r = 882$，故得 $r = 2$

$r = 2$ 代入 $448 = 7 \cdot 2^{n-1}$　$\Leftrightarrow$　$64 = 2^{n-1}$，$n - 1 = 6$，$n = 7$，所求數對$(n，r) = (7，2)$

5. 一等差數列之前 10 項之和爲 30，前 30 項之和爲 10，則其前 40 項之和爲__________。

【解答】-40

【詳解】

設前 n 項之和爲 S_n，且令 $S_{20} = a$，$S_{40} = b$，則 S_{10}，$S_{20} - S_{10}$，$S_{30} - S_{20}$，$S_{40} - S_{30}$ 亦成等差數列即 30，$a - 30$，$10 - a$，$b - 10$ 成等差數列，$2(a - 30) = 30 + (10 - a) \Rightarrow a = \frac{100}{3}$，

公差 $d = (a - 30) - 30 = a - 60 = -\frac{80}{3}$，則$(b - 10) = (10 - a) + d = -50$，得 $S_{40} = b = -40$

6. 有一等比數列$< a_n >$，已知 $S_n = 16$，$S_{2n} = 20$，則 $S_{3n} =$__________。

【解答】21

【詳解】

S_n，$S_{2n} - S_n$，$S_{3n} - S_{2n}$ 成 G.P.，即 16，4，$S_{3n} - 20$ 成 G.P.，$4^2 = 16(S_{3n} - 20) \Rightarrow S_{3n} = 21$

7. 設 S_n 表數列$< a_n >$的前 n 項的和，若 $S_n = 2n^2 + n$，則此數列的第 n 項 $a_n =$__________。

【解答】$a_n = 4n - 1$，$\forall n \in N$

【詳解】 $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3$

$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 + n) - [2(n - 1)^2 + (n - 1)] = (2n^2 + n) - (2n^2 - 3n + 1) = 4n - 1$，$n \geq 2$

而 $a_1 = 3 = 4 \cdot 1 - 1$。對任意自然數 n 都有 $a_n = 4n - 1$

8. 在 4 與 12 之間依序插入 10 個數 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$,使此 12 個數成等差數列,則 $a_7 =$____。

【解答】$\frac{100}{11}$

【詳解】

等差數列 $<4, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}, 12>$ 的首項爲 4、第 12 項爲 12,$12 = 4 + (12-1)d$

故公差 $d = \frac{12-4}{12-1} = \frac{8}{11}$,等差數列第八項 $a_7 = 4 + (8-1) \cdot d = 4 + 7 \cdot \frac{8}{11} = \frac{100}{11}$

9. 在 1 與 999 之間,插入 n 項,使其成爲一等差數列,試求數列總和超過 10000 時,最小自然數 n 值爲__________。

【解答】19

【詳解】

等差數列:$1, b_1, b_2, \cdots, b_n, 999$,共 $(n+2)$ 項,總和 $= \frac{(n+2)(1+999)}{2} > 10000 \Rightarrow n > 18$,

所以最小自然數 n 爲 19

10. 若 $<a_n>$ 爲一個等比數列,已知 $a_n = 81$,公比 $r = 3$,$S_n = \frac{364}{3}$,則 $a_1 =$__________。

【解答】$\frac{1}{3}$

【詳解】

$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} = \frac{a_1 r^{n-1} \cdot r - a_1}{2} = \frac{a_n \cdot r - a_1}{2} = \frac{81 \cdot 3 - a_1}{2} = \frac{364}{3}$,$\therefore \quad a_1 = \frac{1}{3}$

11. (1) $<a_n>$ 爲一個等差數列,$a_{10} = 23$,$a_{25} = -22$,則 $a_n =$__________。

(2)接上題,若 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 爲最大時,n 之值爲__________。

【解答】(1) $53 - 3n$　(2) 17

【詳解】

(1)設公差爲 d,由 $a_{25} = a_{10} + (25-10)d \Rightarrow a_{25} - a_{10} = 15d \quad \therefore \quad 15d = (-22) - 23$

$\therefore \quad d = -3$,　$\therefore \quad a_n = a_{25} + (n-25)d = -22 + (n-25)(-3) = 53 - 3n$

(2) 當 a_n 開始爲負時,S_{n-1} 最大

$a_n < 0 \Rightarrow 53 - 3n < 0, n > \frac{53}{3}, \Rightarrow n \geq 18$,故 S_{17} 最大,$\therefore$當 $n = 17$ 時,S_n 之值爲最大

12.等差數列 $-1, 2, 5, 8, \cdots, (3n+2), \cdots$,至少要加到第幾項總和才會超過 75。答:______。

【解答】8

【詳解】

$a_1 = -1$，$d = 3 \quad \Rightarrow \quad S_n = \dfrac{n}{2}[2(-1) + (n-1)(3)] > 75 \quad \Rightarrow \quad n(3n-5) > 150$

$\Rightarrow \quad 3n^2 - 5n - 150 > 0 \quad \Rightarrow \quad n > \dfrac{5+\sqrt{25+12 \cdot 150}}{2 \cdot 3} = \dfrac{5+5\sqrt{73}}{6} \doteq 7.95\cdots$，$\therefore n \geq 8$

13.自 100 到 300 的正整數中，被 7 除餘 3 的數，它們的總和爲__________。

【解答】5771

【詳解】

$100 < 7k + 3 < 300$，$k \in Z \quad \Rightarrow 97 < 7k < 297 \quad \Rightarrow 13\dfrac{6}{7} < k < 42\dfrac{3}{7} \therefore \quad k = 14$，$15$，$\cdots$，$42$

共 $42-14+1=29$ 個，總和$=\dfrac{29\,[(7\times14+3)+(7\times42+3)]}{2}=5771$

14.設一等差複數數列的首項是 $2 + 45i$，公差是 $1 - 3i$，若此數列的首 n 項和爲 S_n，則使 S_n 爲實數的正整數 $n =$__________。

【解答】$n = 31$

【詳解】

首 n 項和 $S_n = \dfrac{n}{2}[2 \cdot (2 + 45i) + (n-1)(1-3i)]$

$= \dfrac{n}{2}[(n+3) + (93-3n)i] = \dfrac{1}{2}n(n+3) + \dfrac{1}{2}n(93-3n)i$

因爲 S_n 爲實數，則虛部 $\dfrac{1}{2}n(93-3n) = 0$，且 n 爲自然數，故取 $n = 31$

15.給定數列 $\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{1}$，$\dfrac{2}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{4}{1}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{5}{1}$，$\dfrac{4}{2}$，$\dfrac{3}{3}$，$\dfrac{2}{4}$，$\dfrac{1}{5}$，$\cdots$，則 $\dfrac{3}{10}$ 爲數列的第__________項。

【解答】76

【詳解】找規律，分子、分母和分別依序爲 2、3、4、…..11、12、13、……..

則 $\dfrac{3}{10}$ 在第 12 組第 10 個數，共 $(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 11) + 10 = 76$ 個

16.有一凸 n 邊形，內角度數依次成等差數列，公差爲 $5°$，最小角爲 $120°$，則

(1) $n =$__________。　(2)最大角爲__________。

【解答】(1) 9　(2) 160°

【詳解】

內角度數總和 $\dfrac{n[2\times120+(n-1)\times5]}{2} = (n-2)180 \Rightarrow n^2 - 25n + 144 = 0$

$(n-9)(n-16) = 0 \Rightarrow n = 9,16$，$n = 9 \Rightarrow$ 最大角 $a_9 = 120 + 8\times5 = 160$

但 $n = 16 \Rightarrow a_{16} = 120 + 15\times5 = 195 > 180$ (不合)

17.有二等差數列之首 n 項和之比爲$(3n+1):(7n-11)$，則此二數列第 6 項的比爲________。

【解答】$17:33$

【詳解】

設等差數列$<a_n>$前 n 項和爲 S_n，等差數列$<b_n>$前 n 項和爲 S_n'，

第$\dfrac{11+1}{2}=6$ 項爲全部 11 項之中央項 $\dfrac{a_6}{b_6}=\dfrac{11\cdot a_6}{11\cdot b_6}=\dfrac{S_{11}}{S_{11}'}=\dfrac{3(11)+1}{7(11)-11}=\dfrac{34}{66}=\dfrac{17}{33}$

18.有兩個等差數列，其第 n 項的比爲$(3n+1):(7n-11)$，則其前 9 項和的比爲__________。

【解答】$\dfrac{2}{3}$

【詳解】

設此二等差數列各爲$<a_n>$，$<b_n>$，前 n 項和各爲 S_n，S_n'，則

第$\dfrac{9+1}{2}=5$項爲全部 9 項之中央項 ， $\dfrac{S_9}{S_9'}=\dfrac{9a_5}{9b_5}=\dfrac{a_5}{b_5}=\dfrac{3(5)+1}{7(5)-11}=\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}$

19.集合序列$\{1\}$，$\{2，3\}$，$\{4，5，6\}$，$\{7，8，9，10\}$，…，若 S_n 表第 n 個集合內之元素各數值總和，求 $S_{21}=$__________。

【解答】4641

【詳解】

$1+2+3+\cdots+20=\dfrac{(1+20)\times 20}{2}=210$，第 21 個集合內之元素爲 211、212、213、….、231 共 21 個， $\therefore\ S_{21}=211+212+\cdots+231=\dfrac{(211+231)\times 21}{2}=4641$