高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：98.10.27					
範圍	1-4 複數(2)	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (每題 5 分)

( ) 1. 設 a，$b\in C$，$\alpha\in R$，則 $\frac{3a-bi}{a\alpha-2bi}$ 之共軛複數為

(1) $\frac{3a+bi}{a\bar{\alpha}-2bi}$ (2) $\frac{3\bar{a}-\bar{b}i}{a\bar{\alpha}-2bi}$ (3) $\frac{3\bar{a}+\bar{b}i}{\alpha\bar{a}-2\bar{b}i}$ (4) $\frac{3\bar{a}+\bar{b}i}{\bar{\alpha}a+2\bar{b}i}$ (5) $\frac{3\bar{a}+\bar{b}i}{\alpha\bar{a}+2\bar{b}i}$

解答 5

解析 $\overline{(\frac{3a-bi}{a\alpha-2bi})}=\frac{\overline{3a-bi}}{\overline{a\alpha-2bi}}=\frac{3\bar{a}-\bar{b}\bar{i}}{\bar{a}\bar{\alpha}-2\bar{b}\bar{i}}=\frac{3\bar{a}+\bar{b}i}{\alpha\bar{a}+2\bar{b}i}$

( ) 2. 下列敘述何者正確？ (1)若 $z=a+bi$ 為複數，則 b 為 z 之虛部 (2)若 $a+bi=0$，則 $a=b=0$ (3)若 $a^2>b^2$，則 $a^2-b^2>0$ (4)若 $a^2-b^2>0$，則 $a^2>b^2$

解答 3

解析 (1)若 $z=a+bi$ 為複數且 a，$b\in R$，則 b 才為 z 之虛部，故(1)不正確

(2)若 $a+bi=0$ 且 a，$b\in R$，則 $a=b=0$，故(2)不正確

(3)若 $a^2>b^2$，則 $a^2-b^2>0$ 成立，故(3)正確

(4)若 $a^2-b^2>0$ 且 a^2，$b^2\in R$，則 $a^2>b^2$，故(4)不正確

( ) 3. 以 $2+\sqrt{2}\,i$ 及 $2-\sqrt{2}\,i$ 為根，作一個一元二次方程式為 (1) $x^2+4x-2=0$ (2) $x^2-2x-3=0$ (3) $x^2-4x+6=0$ (4) $x^2-2x-1=0$ (5) $x^2-4x+8=0$

解答 3

解析 $\because$ $(2+\sqrt{2}\,i)+(2-\sqrt{2}\,i)=4$，$(2+\sqrt{2}\,i)(2-\sqrt{2}\,i)=6$

$\therefore$ 以 $2+\sqrt{2}\,i$ 及 $2-\sqrt{2}\,i$ 為二根之二次方程式為 $x^2-4x+6=0$

二、多選題 (每題 10 分)

( ) 1. 設 α，β 都是複數，則下列敘述何者正確？

(1) $\alpha\cdot\bar{\alpha}=|\alpha|^2$ (2) $\alpha+\beta i=0 \Rightarrow \alpha=0$，$\beta=0$ (3) $(\alpha^4)^{\frac{7}{4}}=\alpha^7$

(4)若 $\alpha>\beta$，則 α，$\beta\in R$ (5) $\alpha^0=1$

解答 14

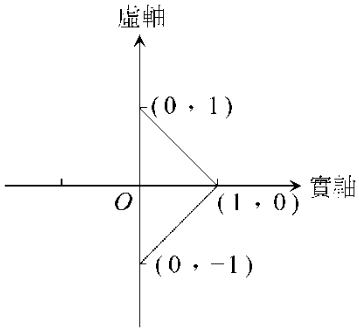
解析 (1)令 $\alpha=a+bi$，a，$b\in R$，則 $\alpha\cdot\bar{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|\alpha|^2$

(2)必須 α，$\beta\in R$ 時，$\alpha+\beta i=0 \Rightarrow \alpha=0$，$\beta=0$

(3)當 $\alpha=i$ 時，$i^7=i^{4\times\frac{7}{4}}\neq(i^4)^{\frac{7}{4}}=1$，即指數律不成立

(4)複數能比較大小時，它們都是實數，即虛數不能比較大小

(5) $\alpha\neq0$ 時，規定 $\alpha^0=1$



( ) 2. 如果將複數看成複數平面上的點，則下列哪些敘述是正確的？

(1) 1，i，$1+i$ 三點共線

(2) $\sqrt{2}+i$ 與 $1+\sqrt{2}\,i$ 和原點距離均相等

(3) $\sqrt{3}\,i$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{2}+i$，$1+\sqrt{2}\,i$ 四點共圓

(4)以 1，i，-1 為頂點作成的三角形是等腰三角形

解答 234

解析

(1) $1 \to (1，0)$，$i \to (0，1)$，$1+i \to (1，1)$　其斜率 $\frac{0-1}{1-0} \neq \frac{1-1}{0-1}$　∴　三點不共線

(2) $|\sqrt{2}+i|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1}=\sqrt{3}$，$|1+\sqrt{2}i|=\sqrt{1+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$

∴　$\sqrt{2}+i$ 與 $1+\sqrt{2}i$ 和　原點距離均相等

(3) $|\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$，$|\sqrt{3}|=\sqrt{3}$，$|\sqrt{2}+i|=\sqrt{3}$，$|1+\sqrt{2}i|=\sqrt{3}$

∴　四點均在以原點爲圓心，$\sqrt{3}$ 爲半徑的圓上

(4) $1 \to (1，0)$，$i \to (0，1)$，$-i \to (0，-1)$　∴　由圖知其圖形爲等腰三角形

三、填充題　（每題 10 分）

1. 若 a 與 $a+2$ 爲異號的兩實數，且均爲方程式 $x^2+|x|+3k=0$ 的解，則 k 之值爲____________。

解答　$-\frac{2}{3}$

解析　∵　a 與 $a+2$ 異號　∴　$a<0$，$a+2>0$

∵　a 與 $a+2$ 爲方程式 $x^2+|x|+3k=0$ 之二根，代入

∴　$a^2+|a|+3k=0 \Rightarrow a^2-a+3k=0$……①

$(a+2)^2+|a+2|+3k=0 \Rightarrow (a+2)^2+(a+2)+3k=0 \Rightarrow a^2+5a+6+3k=0$……②

② − ①得 $6a+6=0$　∴　$a=-1$，代入①得 $2+3k=0$　∴　$k=-\frac{2}{3}$

2. 設 k 爲實數，方程式 $x^2+(k+3)x+(k+3)=0$

(1)有虛根，則 k 的範圍爲____________。　(2)兩根相等，則 $k=$____________。

解答　(1) $-3<k<1$　(2) -3 或 1

解析

方程式 $x^2+(k+3)x+(k+3)=0 \Rightarrow \delta=(k+3)^2-4\cdot1\cdot(k+3)=(k+3)(k-1)$

(1) 有虛根 $\Leftrightarrow \delta<0$

$(k+3)(k-1)<0 \Rightarrow -3<k<1$

(2) 兩根相等 $\Leftrightarrow \delta=0$

$(k+3)(k-1)=0 \Rightarrow k=1,\ -3$

3. 設 $z \in C$，解方程式 $|z|+z=8-4i$ 得 $z=$____________。

解答　$3-4i$

解析　令 $z=a+bi$（$a，b \in R$），則 $\sqrt{a^2+b^2}+a+bi=8-4i$

$\Rightarrow$　$b=-4$ 且 $\sqrt{a^2+b^2}+a=8$　$\Rightarrow$　$a=3$　∴　$z=3-4i$

4. (1)設 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則

①$(3+\omega)(3+\omega^2)(3+\omega^3)(3+\omega^4)(3+\omega^5)=$____________。

②$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots\cdots+\omega^{2009}=$__________________。

(2)設 $\Omega=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$，則 $\Omega^{2002}=$____________。

解答　(1)① 196　② 0　(2) $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

解析　(1)

①若 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則 $\omega^3=1$ 且 $1+\omega+\omega^2=0$

$(3+\omega)(3+\omega^2)(3+\omega^3)(3+\omega^4)(3+\omega^5)$

$=(3+\omega)(3+\omega^2)(3+1)(3+\omega)(3+\omega^2)=4\,[(3+\omega)(3+\omega^2)]^2$

$=4\,[9+3(\omega+\omega^2)+\omega^3]^2=4\,[9+3\times(-1)+1]^2=4\times 49=196$

② $(2009+1)\div 3=670.......0$

$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots\cdots+\omega^{2009}=0\times 670=0$

(2) $\Omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\quad\Rightarrow\quad(2\Omega-1)=\sqrt{3}\,i\quad\Rightarrow\quad\Omega^2-\Omega+1=0$

$\therefore\quad(\Omega+1)(\Omega^2-\Omega+1)=0\quad\Rightarrow\quad\Omega^3+1=0$，即 $\Omega^3=-1$

$\Omega^{2002}=(\Omega^3)^{667}\cdot\Omega=(-1)^{667}\cdot\Omega=-\Omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

5. 化簡 $(1-i)^{100}=$ ____________。

解答 -2^{50}

解析 $(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$

$(1-i)^{100}=[(1-i)^2]^{50}=(-2i)^{50}=2^{50}\cdot i^{50}=2^{50}\,(i^2)=-2^{50}$

6. 設 $z=\dfrac{(5-12i)\cdot(7+2i)}{(2-7i)\cdot(3+4i)}$，則 $|z|=$ ____________。

解答 $\dfrac{13}{5}$

解析 若 α，$\beta\in C$，$\beta\neq 0$，則 $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$，$|\dfrac{\alpha}{\beta}|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

$\therefore\quad |z|=|\dfrac{(5-12i)\cdot(7+2i)}{(2-7i)\cdot(3+4i)}|$

$=\dfrac{|5-12i|\cdot|7+2i|}{|2-7i|\cdot|3+4i|}=\dfrac{\sqrt{5^2+12^2}\cdot\sqrt{7^2+2^2}}{\sqrt{2^2+7^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{13\cdot\sqrt{53}}{\sqrt{53}\cdot 5}=\dfrac{13}{5}$

7. 設 α，β 為 $x^2-4x+1=0$ 之二根，則 $\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}$ 之值為____________。

解答 $2\sqrt{6}$

解析 $\begin{cases}\alpha^2-4\alpha+1=0\\ \beta^2-4\beta+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha^2+1=4\alpha\\ \beta^2+1=4\beta\end{cases}$，又 $\begin{cases}\alpha+\beta=4\\ \alpha\beta=1\end{cases}$（$\alpha>0$，$\beta>0$）

$\therefore\quad\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}=\sqrt{4\alpha}+\sqrt{4\beta}=2\,(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha\beta}=4+2=6\quad\Rightarrow\quad(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})=\sqrt{6}$（$\because\quad\alpha>0$，$\beta>0$）

故所求 $=2\,(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})=2\sqrt{6}$

8. 設 α，β 為方程式 $x^2+8x+4=0$ 的兩根，則

(1)以 $\alpha+\beta$ 及 $\alpha\beta$ 為兩根的二次方程式為____________________。

(2)$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 之值為_________________。

解答 (1)$x^2+4x-32=0$;(2)-12

解析 (1)α，β 為 $x^2+8x+4=0$ 的兩根 $\therefore\quad\alpha+\beta=-8$，$\alpha\beta=4$，且 $\alpha<0$，$\beta<0$

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-4$，$(\alpha+\beta)(\alpha\beta)=-32$ $\therefore$ 以 $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ 為兩根的二次方程式為

$x^2-[(\alpha+\beta)+\alpha\beta]x+(\alpha+\beta)(\alpha\beta)=0$，即 $x^2+4x-32=0$

(2)又$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\ \alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=-8-2\sqrt{4}$（$\because\ \alpha<0$，$\beta<0$）

9. 設k爲給定之有理數，且對任一有理數m，恆使方程式$x^2-3(m-1)x+2m^2+3k=0$之根爲有理數，則$k=$____________。

解答　-6

解析　判別式 $\Rightarrow$ $[-3(m-1)]^2-4\cdot1\cdot(2m^2+3k)$

$=9(m-1)^2-4(2m^2+3k)=m^2-18m+(9-12k)$爲完全平方

$\therefore\ 9^2-(9-12k)=0$，則$k=-6$

10. α，β爲實數，若$\alpha+\beta=-5$，$\alpha\beta=4$，求

(1)$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=$____________。　(2)$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=$____________。

解答　(1)-9;(2)$3i$

解析　因爲$\begin{cases}\alpha+\beta=-5<0\\ \alpha\beta=4>0\end{cases}\Rightarrow\alpha<0$，$\beta<0\Rightarrow\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$

(1)$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+2\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}+(\sqrt{\beta})^2=\alpha-2\sqrt{\alpha\beta}+\beta=-5-2\sqrt{4}=-9$

(2)$\because(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=-9$，$\therefore\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\pm\sqrt{-9}$(負不合)，即$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=3i$

11. z爲複數，且$z+\bar{z}=2$，$z\cdot\bar{z}=2$，求$z=$____________。

解答　$1\pm i$

解析　設$z=a+bi$（a，b爲實數），則$z+\bar{z}=2a=2\quad\therefore a=1$

又$z\cdot\bar{z}=|z|^2=a^2+b^2=2\Rightarrow1+b^2=2\quad\therefore b^2=1\quad\therefore b=\pm1$，故$z=1\pm i$

12. 設二次方程式$(m+2)x^2-2mx+(m^2+3m+2)=0$

(1)有一根爲 0，則$m=$____________。　(2)兩根互爲倒數，則$m=$____________。

解答　(1)-1;(2)0

解析　(1)令$x=0$代入：$m^2+3m+2=0\Rightarrow(m+1)(m+2)=0\Rightarrow m=-1$或$-2$

但二次方程式$m\neq-2\Rightarrow m=-1$

(2)兩根之積爲 1 $\Rightarrow\dfrac{m^2+3m+2}{m+2}=1\Rightarrow m=0$（$-2$不合）

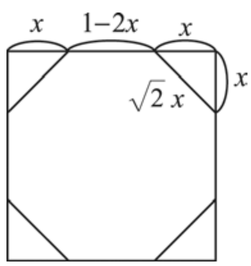
13. 設$x^2-2ax+a^2-4=0$之大根是小根的 5 倍，求$a=$____________。

解答　±3

解析　設兩根爲k，$5k$，$\begin{cases}k+5k=2a\\ k\times5k=a^2-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=\dfrac{1}{3}a\\ 5k^2=a^2-4\end{cases}$，代入$\Rightarrow\dfrac{5a^2}{9}=a^2-4\Rightarrow a=\pm3$

14. 正方形紙一張，邊長爲 1，今截去四角，使成正八邊形，則正八邊形的

(1)周長=____________，(2)面積=____________。



解答　(1)$8\sqrt{2}-8$;(2)$2\sqrt{2}-2$

解析　設截角之兩股長$x\Rightarrow1-2x=\sqrt{2}x\Rightarrow x=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

(1)周長$=8\times\sqrt{2}x=8\times\sqrt{2}\times\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}-8$

(2)面積$=\square-4\times\triangle=1^2-4\times(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2})^2\times\dfrac{1}{2}=1-(6-4\sqrt{2})\times\dfrac{1}{2}=2\sqrt{2}-2$

15. $x^2-2x-899=0$的兩根α，β，$\alpha>\beta$，則$\alpha-\beta=$____________。

解答　60

解析 $\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha\cdot\beta=-899\end{cases} \Rightarrow (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\times(-899)=3600$，$\therefore \alpha-\beta=60$

16. 設 $x^2+2x-7=0$，則 $(x+7)(x+3)(x-1)(x-5)=$______。

解答 -112

解析 原式 $=(x+7)(x-5)(x+3)(x-1) \quad =(x^2+2x-35)(x^2+2x-3)=(7-35)(7-3)=-112$

17. 設 $3x^2-3(2m+1)x+6m=(m-12)x$ 兩根和與積相等，則 $m=$______。

解答 9

解析 原式 $\Rightarrow 3x^2+(9-7m)x+6m=0$，

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{7m-9}{3}\\ \alpha\cdot\beta=\dfrac{6m}{3}\end{cases}, \frac{7m-9}{3}=\frac{6m}{3} \Rightarrow 7m-9=6m \Rightarrow m=9$$

18. 方程式 $x^2+(m-12)x+(m-1)=0$ 之二根均為正整數，則 $m=$______。

解答 6 或 7

解析 令方程式 $x^2+(m-12)x+(m-1)=0$ 之二正整數根為 α，β，

則 $\begin{cases}\alpha+\beta=-(m-12)\cdots\cdots①\\ \alpha\beta=m-1 \qquad\cdots\cdots②\end{cases}$

① + ② $\alpha+\beta+\alpha\beta=11 \Rightarrow (\alpha+1)(\beta+1)=12$

$\alpha+1$	1	2	3	4	6	12
$\beta+1$	12	6	4	3	2	1

$\because$ α，$\beta\in N$ $\therefore$

α	1	2	3	5
β	5	3	2	1

由②知 $m=\alpha\beta+1=5+1$ 或 $6+1$，即 $m=6$ 或 7

19. 設 $-2-i$ 是實係數方程式 $ax^3-11x+b=0$ 的一根，則 $(a，b)=$______。

解答 $(1，-20)$

解析 $\because$ $-2-i$ 是實係數方程式 $ax^3-11x+b=0$ 之一根 $\Rightarrow$ $-2+i$ 亦為其根

$[x-(-2-i)][x-(-2+i)]=x^2-(-2+i)x-(-2-i)x+4+1=x^2+4x+5 \mid ax^3-11x+b$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r|l} & a-4a \\ \hline 1+4+5 & a+0-11+b \\ & a+4a+5a \\ \hline & -4a-(11+5a)+b \\ & -4a-16a-20a \\ \hline & (-11+11a)+(b+20a) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-11+11a=0\cdots\cdots①\\ b+20a=0 \quad\cdots\cdots②\end{cases} \Rightarrow a=1，b=-20$$

20. 設 z 為複數，若 $z^2-\dfrac{1}{z^2}=2i$，則(1) $z^2=$______。 (2) $z+\dfrac{1}{z}=$______。

解答 (1) i (2) $\pm\sqrt{2}$

解析 (1) $z^2-\dfrac{1}{z^2}=2i \Rightarrow (z^2)^2-2iz^2-1=0 \Rightarrow z^2=\dfrac{2i\pm\sqrt{(-2i)^2+4}}{2}=i$

(2)設 $z=a+bi$（a，$b\in R$） $\Rightarrow z^2=(a^2-b^2)+2abi=i$

$\begin{cases}a^2-b^2=0\cdots\cdots①\\ 2ab=1 \quad\cdots\cdots②\end{cases}$，由① $\Rightarrow b^2=a^2$，即 $b=\pm a$

$b=a$ 代入② $\Rightarrow$ $2a^2=1$ $\Rightarrow$ $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，則 $b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$b=-a$ 代入② $\Rightarrow$ $-2a^2=1$ $\Rightarrow$ $a^2=\dfrac{-1}{2}$（不合 $\because$ $a\in R$）

若 $z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$，則 $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{z^2+1}{z}=\dfrac{i+1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}=\sqrt{2}$

若 $z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$，則 $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{z^2+1}{z}=\dfrac{i+1}{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}=-\sqrt{2}$

故 $z+\dfrac{1}{z}=\pm\sqrt{2}$