高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：98.10.20					
範圍	1-4 複數(1)	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (每題 5 分)

(　　) 1. 設 α，β 為 $x^2+6x+4=0$ 之二根，則$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=$？

(1) -2　(2) -4　(3) -6　(4) -8　(5) -10

解答　5

解析　$\because$　α，β 是 $x^2+6x+4=0$ 之二根，且$\delta=6^2-4\times1\times4>0$，$\alpha,\beta$ 為實數

又　$\alpha+\beta=-6$，$\alpha\beta=4$　$\Rightarrow$　$\alpha<0$，$\beta<0$

$\therefore$　$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\beta}=(\alpha+\beta)-2\sqrt{\alpha\beta}=(-6)-2\sqrt{4}=-6-4=-10$

(　　) 2. 設 Z_1，Z_2，Z_3 為任意三個不為 0 的複數，下列性質何者不恆正確？

(1) $|Z_1Z_2|=|Z_1||Z_2|$　(2) $|Z_1+Z_2|=|Z_1|+|Z_2|$　(3) $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right|=\dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$　(4) $|Z_1^n|=|Z_1|^n$

解答　2

解析　$\because$　$|Z_1+Z_2|\le|Z_1|+|Z_2|$　$\therefore$　$|Z_1+Z_2|=|Z_1|+|Z_2|$ 不恆正確

(　　) 3. 下列各式何者正確？

(1) $\sqrt{6}=\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$　(2) $\sqrt{-6}=-\sqrt{2}\times\sqrt{3}$　(3) $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$　(4) $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$

解答　4

解析　(1) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=\sqrt{6}i^2=-\sqrt{6}$，故 $\sqrt{6}\neq\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$

(2) $\sqrt{-6}=\sqrt{6}i$，$-\sqrt{2}\times\sqrt{3}=-\sqrt{6}$，故 $\sqrt{-6}\neq-\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}i$，$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}i}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot i}{\sqrt{2}\cdot i^2}=\dfrac{\sqrt{3}i}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}i$

(4)由(3)可知 $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}i$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=-(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}i)=\sqrt{\dfrac{3}{2}}i$，故 $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$

(　　) 4. 複數平面上，所有滿足 $|z-2-i|=3$ 的點，所成的圖形為何？

(1)一直線　(2)一圓　(3)一點　(4)不存在　(5)以上皆非

解答　2

解析　$|z-2-i|=3$ 之圖形為複數平面上與點(2，1)距離 3 的點之集合，亦即圓

二、多選題 (每題 10 分)

(　　) 1. 設 Z_1 與 Z_2 為方程式 $Z^2=-3+4i$ 的二根，則下列何者正確？

(1) $\overline{Z_1}=Z_2$　(2) $|Z_1|=|Z_2|=\sqrt{5}$　(3) $Z_1+Z_2=0$　(4) $Z_1+Z_2=4i$　(5) $Z_1Z_2=-Z^2$

解答　235

解析　設 $Z=x+yi$　$\therefore$　$(x+yi)^2=-3+4i$　$\Rightarrow$　$x^2-y^2+2xyi=-3+4i$

$\therefore$　$\begin{cases}x^2-y^2=-3\cdots\cdots① \\ 2xy=4\cdots\cdots②\end{cases}$

又　$x^2+y^2=5\cdots\cdots③$

$\dfrac{①+③}{2}$ 得 $x^2=1$ 代入③得 $y^2=4$　$\Rightarrow$　$x=\pm1$，$y=\pm2$

但由②知 $xy = 2$　∴　$x = 1$，$y = 2$ 或 $x = -1$，$y = -2$　∴　$Z_1 = 1 + 2i$，$Z_2 = -1 - 2i$

(1) $\overline{Z_1} = \overline{1+2i} = 1 - 2i \neq Z_2$　(2) $|Z_1| = |Z_2| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

(3)(4) $Z_1 + Z_2 = 1 + 2i + (-1 - 2i) = 0$　(5) $Z_1 Z_2 = (1 + 2i)(-1 - 2i) = 3 - 4i = -Z^2$

(　　) 2. 下列敘述何者不正確？

(1) $2i > i$　(2) $5 + 2i > 4 + 2i$　(3) $i^2 < 0$　(4) $|5i| > 0$　(5) $|3 - 4i| > |2 + i|$

解答　12

解析　(1)錯誤：虛數無法比較大小　(2)錯誤：同(1)

(3)正確：$i^2 = -1 < 0$　(4)正確：$|5i| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5 > 0$

(5)正確：$|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} > \sqrt{2^2 + 1^2} = |2 + i|$

(　　) 3. 設 a，$b \in R$，$b \neq 0$，則下列敘述何者正確？

(1) $\sqrt{a^2} = |a|$　(2) $(\sqrt{a})^2 = a$　(3) $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\, i$　(4) $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$　(5) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

解答　12

解析　(1)當 $a < 0$，$b < 0$ 時，$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$

(2)當 $a > 0$，$b < 0$ 時，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(3)$a \geq 0$ 時，$(\sqrt{a})^2 = a$，而 $a < 0$ 時，$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = -\sqrt{a \cdot a} = -|a| = -(-a) = a$

∴　$(\sqrt{a})^2 = a$，$\forall a \in R$

(4)當 $a < 0$ 時，$\sqrt{-a} = \sqrt{(-1)(a)} = -\sqrt{-1}\sqrt{a} = -\sqrt{a}\, i \neq \sqrt{a}\, i$

三、填充題　(每題 10 分)

1. 化簡 $\dfrac{(3-\sqrt{-16}) \cdot (-1+\sqrt{-25})}{2+\sqrt{-9}}$ 為標準式得__________。

解答　$7 - i$

解析　$\dfrac{(3-\sqrt{-16}) \cdot (-1+\sqrt{-25})}{2+\sqrt{-9}} = \dfrac{(3-4i)(-1+5i)}{2+3i}$

$= \dfrac{(-3+20)+(4+15)i}{2+3i} = \dfrac{17+19i}{2+3i} = \dfrac{(17+19i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$

$= \dfrac{(34+57)+(38-51)i}{4+9} = \dfrac{91-13i}{13} = 7 - i$

2. 若 $\alpha = 1+i$，$\beta = 2-3i$，求

(1) $\alpha + \beta =$________。　(2) $\alpha - \beta =$________。(3) $\alpha\beta =$________。　(4) $\dfrac{\alpha}{\beta} =$________。

解答　(1) $3-2i$;(2) $-1+4i$;(3) $5-i$;(4) $\dfrac{-1+5i}{13}$

解析　(1) $\alpha + \beta = (1+i)+(2-3i) = (1+2)+(1-3)i = 3-2i$

(2) $\alpha - \beta = (1+i)-(2-3i) = 1+i-2+3i = -1+4i$

(3) $\alpha\beta = (1+i)(2-3i) = 2-3i+2i-3i^2 = 5-i$

(4) $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1+i}{2-3i} = \dfrac{(1+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{2+3i+2i+3i^2}{4-9i^2} = \dfrac{-1+5i}{13}$

3. 複數 $(-2+\sqrt{3}\, i)^4$ 的(1)實部為__________。　(2)虛部為__________。

解答　(1) -47；(2) $-8\sqrt{3}$

解析　$(-2+\sqrt{3}\,i)^4=(4-4\sqrt{3}\,i-3)^2=1-8\sqrt{3}\,i-48=-47-8\sqrt{3}\,i$，實部 -47，虛部 $-8\sqrt{3}$

4. 設 x，y 是實數，若 $(1+i)(x+2y)-(3-2i)(x-y)=8+3i$，求 (1) $x=$_________。(2) $y=$___________。

解答　(1) $x=1$；(2) $y=2$

解析　左式 $=x+2y+xi+2yi-(3x-3y-2xi+2yi)=(-2x+5y)+(3x)i=8+3i$

$$\therefore \begin{cases}-2x+5y=8\\3x=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$$

5. 設 $i=\sqrt{-1}$，則 $\dfrac{5i^5+4i^3+1}{8i^9-5i-3}$ 的絕對值爲____________。

解答　$\dfrac{1}{3}$

解析

$$\because i^4=1\quad\Rightarrow\quad\frac{5i^5+4i^3+1}{8i^9-5i-3}=\frac{5i-4i+1}{8i-5i-3}=\frac{i+1}{3i-3}=\frac{1+i}{3(-1+i)}$$

$$\text{絕對值}\left|\frac{(1+i)}{3(-1+i)}\right|=\frac{|1+i|}{|3(-1+i)|}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$$

6. x，$y\in R$，若 $\dfrac{1+3i}{x+yi}=1+i$，則數對 $(x，y)=$____________。

解答　$(2，1)$

解析　$\because\ \dfrac{1+3i}{x+yi}=1+i$，$x+yi=\dfrac{1+3i}{1+i}=\dfrac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{4+2i}{2}=2+i$，$\therefore x=2$，$y=1$

7. 設 a 爲實數，若方程式 $x^2-(a+i)x+2+2i=0$ 有一實根，試求 a 的值爲_______。及另一根爲________。

解答　3；$1+i$

解析　設實根爲 k，則 $\alpha^2-(a+i)k+2+2i=0\quad\Rightarrow\quad(\alpha^2-ak+2)+(-k+2)i=0$

$$\text{解}\begin{cases}k^2-ak+2=0\\-k+2=0\end{cases}，\text{得}\begin{cases}a=3\\k=2\end{cases}$$

設另一根爲 β，則 $2+\beta=3+i\quad\Rightarrow\quad\beta=1+i$

8. 設 $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，則 $1+z^{88}+\sqrt{2}\,z^{1999}=$____________。

解答　$3-i$

解析　$\because\quad z^2=(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})^2=\dfrac{2i}{2}=i\quad\therefore\quad z^{88}=(z^2)^{44}=1$

$z^{1999}=z^{1998}\cdot z=(z^2)^{999}\cdot z=(i)^{999}\cdot z=i^{996}\cdot i^3\cdot z=(i^4)^{249}\cdot(-i)z=-iz$

故 $1+z^{88}+\sqrt{2}\,z^{1999}=1+1+\sqrt{2}\,(-i)\cdot\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=2-i(1+i)=2-i+1=3-i$

9. 設 $i=\sqrt{-1}$，若 $1-i$ 爲 $x^2-cx+1=0$ 之一根，則複數 $c=$____________。（以 $a+bi$ 的形式表示）

解答　$\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$

解析　$\because\quad 1-i$ 爲 $x^2-cx+1=0$ 之一根，$\therefore\quad(1-i)^2-c(1-i)+1=0$

$\Rightarrow\quad 1-2i+i^2-c(1-i)+1=0\quad\Rightarrow\quad c(1-i)=1-2i$

$\Rightarrow \quad c=\dfrac{1-2i}{1-i}=\dfrac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+i-2i-2i^2}{1-i^2}=\dfrac{1-i+2}{1+1}=\dfrac{3-i}{2}$

10. 設 $z=1+2i$，$w=4-3i$，則(1)絕對值 $|\dfrac{z^2}{w}|=$____________。 (2)共軛複數 $\overline{z\cdot w}=$____________（以複數 $a+bi$ 形式表之）。

解答　(1)1;(2)$10+(-5)i$

解析　$z=1+2i \Rightarrow |z|=\sqrt{5}$，$w=4-3i \Rightarrow |w|=5$，$|\dfrac{z^2}{w}|=\dfrac{|z|^2}{|w|}=\dfrac{(\sqrt{5})^2}{5}=1$，

又 $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}=(1-2i)(4+3i)=4+6+(3-8)i=10+(-5)i$

11. 設 a，$b\in R$ 且 $[(a+1)-4i]+[5+(b-2)i]=2+5i$，則 $\overline{a+bi}=$____________。

解答　$-4-11i$

解析　$[(a+1)-4i]+[5+(b-2)i]=2+5i \Rightarrow (a+1+5)+(-4+b-2)i=2+5i$

$\Rightarrow (a+6)+(b-6)i=2+5i \Rightarrow \begin{cases}a+6=2\\ b-6=5\end{cases} \quad \therefore \begin{cases}a=-4\\ b=11\end{cases}$

$\therefore \overline{a+bi}=\overline{-4+11i}=-4-11i$

12. 設 $z=\dfrac{(5-12i)\cdot(7+2i)}{(2-7i)\cdot(3+4i)}$，則 $|z|=$____________。

解答　$\dfrac{13}{5}$

解析　若 α，$\beta\in C$，$\beta\neq 0$，則 $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$，$|\dfrac{\alpha}{\beta}|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

$\therefore |z|=|\dfrac{(5-12i)\cdot(7+2i)}{(2-7i)\cdot(3+4i)}|$

$=\dfrac{|5-12i|\cdot|7+2i|}{|2-7i|\cdot|3+4i|}=\dfrac{\sqrt{5^2+12^2}\cdot\sqrt{7^2+2^2}}{\sqrt{2^2+7^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{13\cdot\sqrt{53}}{\sqrt{53}\cdot 5}=\dfrac{13}{5}$

13. 設 α，β 為方程式 $x^2+8x+6=0$ 的兩根，求

(1) $\alpha^2+\beta^2=$____________。 (2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=$____________。 (3) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=$____________。

解答　(1)52;(2)$\dfrac{26}{3}$;(3)$\dfrac{13}{9}$

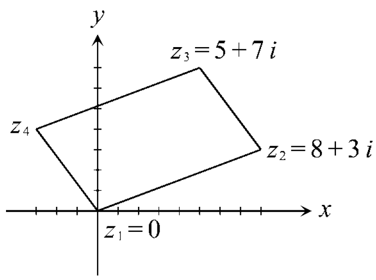
解析　$\alpha+\beta=-8$，$\alpha\beta=6$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-8)^2-2\times 6=52$

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\dfrac{52}{6}=\dfrac{26}{3}$

(3) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha\beta)^2}=\dfrac{52}{6^2}=\dfrac{13}{9}$

14. 四個複數 $z_1=0$，$z_2=8+3i$，$z_3=5+7i$ 及 z_4 在複數平面上構成平行四邊形 $z_1z_2z_3z_4$，求



(1) $z_4=$____________。

(2)此平行四邊形兩鄰邊的長度＝____________。

解答　(1) $-3+4i$;(2) $\sqrt{73}$，5

解析　(1)如圖

$z_2(8,3)\xrightarrow[y:+4]{x:-3} z_3(5,7)$

$z_1(0,0)\xrightarrow[y:+4]{x:-3} z_4(-3,4)$ ， 故 $z_4=-3+4i$

(2) $\overline{z_1z_2}=|z_1-z_2|=|0-(8+3i)|=|-8-3i|=\sqrt{64+9}=\sqrt{73}$

$\overline{z_1z_4}=|z_1-z_4|=|0-(-3+4i)|=|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

15. 若 α ， β 為方程式 $x^2+7x+9=0$ 之兩根，求

(1) $(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=$____________。 (2) $(\alpha^2+10\alpha+1)(\beta^2+10\beta+1)=$____________。

解答 (1) -1;(2)313

解析 $\begin{cases}\alpha+\beta=-7<0\\ \alpha\beta=9>0\end{cases}$ 且 $D=7^2-4\times1\times9>0 \Rightarrow \alpha<0$ 且 $\beta<0$

(1) $(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+(\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta=-7+2\sqrt{9}=-1$

(2) $\because \alpha$ ， β 為 $x^2+7x+9=0$ 之兩根 $\Rightarrow \begin{cases}\alpha^2+7\alpha+9=0\\ \beta^2+7\beta+9=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha^2=-7\alpha-9\\ \beta^2=-7\beta-9\end{cases}$

$\therefore (\alpha^2+10\alpha+1)(\beta^2+10\beta+1)=(-7\alpha-9+10\alpha+1)(-7\beta-9+10\beta+1)$

$=(3\alpha-8)(3\beta-8)=9\alpha\beta-24(\alpha+\beta)+64=9\times9-24\times(-7)+64=313$

16. $x^2-2x-899=0$ 的兩根 α ， β ， $\alpha>\beta$ ，則 $\alpha-\beta=$____________。

解答 60

解析 $\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha\cdot\beta=-899\end{cases} \Rightarrow (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\times(-899)=3600$ ， $\therefore \alpha-\beta=60$

17. 設 α，β 為 $x^2-3x-4=0$ 的二根，則 $\dfrac{\alpha^3}{\alpha^2-4}+\dfrac{\beta^3}{\beta^2-4}$ 之值為____________。

解答 $\dfrac{17}{3}$

解析 $\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=-4$；$\alpha^2-3\alpha-4=0$，$\beta^2-3\beta-4=0$

$\therefore \dfrac{\alpha^3}{\alpha^2-4}+\dfrac{\beta^3}{\beta^2-4}=\dfrac{\alpha^3}{3\alpha}+\dfrac{\beta^3}{3\beta}=\dfrac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2)=\dfrac{1}{3}[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]=\dfrac{17}{3}$

18. 設方程式 $Z^2=7-24i$，則 $Z=$____________________。

解答 $Z_1=4-3i$，$Z_2=-4+3i$

解析 設 $Z=x+yi$ $\therefore$ $(x+yi)^2=7-24i \Rightarrow x^2-y^2+2xyi=7-24i$

$\therefore \begin{cases}x^2-y^2=7\\ 2xy=-24\\ x^2+y^2=25\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2=16\\ y^2=9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\pm4\\ y=\mp3\end{cases}$ $\therefore$ $Z_1=4-3i$，$Z_2=-4+3i$

19. 在複數平面上表示三複數 $-2+i$，$4+i$，$2-3i$ 的三個點 A，B，C，則△ABC 之垂心所表的複數為______。

解答 $2-i$

解析 $-2+i\leftrightarrow A$，$4+i\leftrightarrow B$，$2-3i\leftrightarrow C$，$A(-2，1)$，$B(4，1)$，$C(2，-3)$

$\because$ $\overline{BC}$ 之斜率為 $\dfrac{1-(-3)}{4-2}=2$

$\therefore$　過 A 點的高所在直線爲 $y-1=-\frac{1}{2}(x+2)$　$\Rightarrow$　$x+2y=0\cdots\cdots$①

又　$\because$　$\overline{AC}$ 之斜率爲 $\frac{1-(-3)}{-2-2}=-1$

$\therefore$　過 B 點的高所在直線爲 $y-1=1\cdot(x-4)$　$\Rightarrow$　$x-y-3=0\cdots\cdots$②

① − ②得 $y=-1$，代入① $x=2$，得垂心 H 之坐標爲$(2，-1)$

20. 設 k 爲給定之有理數，且對任一有理數 m，恆使方程式 $x^2-3(m-1)x+2m^2+3k=0$ 之根爲有理數，則 $k=$ ____________ 。

解答　-6

解析　根爲有理數判別式　$\Rightarrow$　$[-3(m-1)]^2-4\cdot1\cdot(2m^2+3k)$

$=9(m-1)^2-4(2m^2+3k)=m^2-18m+(9-12k)$爲完全平方式

$\therefore$　$9^2-(9-12k)=0$，則 $k=-6$

P.S.　ax^2+bx+c 爲完全平方式 $\Leftrightarrow \delta=b^2-4ac=0$