高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：98.10.26					
範圍	1-4 複數平面(2)	班級		姓名	
		座號			

一、計算題 (每題 25 分)

1、 設 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，試求下列各式之值(寫成標準式)

(1) $1+\omega+\omega^2+........+\omega^{100}=$ ＿＿＿＿＿＿。

(2) $(8-2\omega-2\omega^2)(4-5\omega+4\omega^2)(7+7\omega-6\omega^2)$

答案：(1) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$　(2) 1170

解析：

(1) $1+\omega+\omega^2+........+\omega^{100}$

$=(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3+\omega^4+\omega^5)+........+(\omega^{96}+\omega^{97}+\omega^{98})+\omega^{99}+\omega^{100}$

$=0+0+0+..........+0+\omega^{99}+\omega^{100}$

$=1+\omega=-\omega^2=-\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

(2) $(8-2\omega-2\omega^2)(4-5\omega+4\omega^2)(7+7\omega-6\omega^2)$

$=[10-2(1+\omega+\omega^2)][4(1+\omega+\omega^2)-9\omega][7(1+\omega+\omega^2)-13\omega^2]$

$=10\times(-9)\times(-13)\times\omega^3=1170$

2、設 $a\in\mathbb{R}$，若方程式 $x^2+(a+i)x-(6-2i)=0$ 有一實根，試求 a 之值，並求方程式的所有根。

答案：$a=-1$, 兩根爲 $-2,\quad 3-i$

解析：

設實根爲 α，另一根 β

則 $\alpha^2+(a+i)\alpha-(6-2i)=0$，　即 $(\alpha^2+a\alpha-6)+(\alpha+2)i=0$

$\begin{cases}\alpha^2+a\alpha-6=0\\ \alpha+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-2\\ a=-1\end{cases}$。

又 $-2+\beta=-(-1+i)\Rightarrow\beta=3-i$

3、試決定實數 m 之範圍，使方程式 $x^2+(m-5)x+(m+3)=0$ 有：

(1)兩相異實根　　(2) 兩相等實根　　(3) 兩共軛複根

答案：(1) $m<1$ 或 $m>13$　　(2) $m=1,13$　　(3) $1<m<13$

解析：

判別式 $\delta=(m-5)^2-4\times1\times(m+3)=m^2-14m+13=(m-1)(m-13)$，

(1) 兩相異實根 $\Leftrightarrow\delta=(m-1)(m-13)>0\Rightarrow m<1$ 或 $m>13$

(2) 兩相等實根 $\Leftrightarrow\delta=(m-1)(m-13)=0\Rightarrow m=1,13$

(3) 兩共軛複根 $\Leftrightarrow\delta=(m-1)(m-13)<0\Rightarrow$ 則 $1<m<13$

4、 設α,β爲$2x^2-3x+5=0$之二根，試求下列各值：

(1) $\alpha^2+\beta^2=$ (2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=$ (3) $\alpha^3+\beta^3=$ (4) $(1+\alpha-2\alpha^2)(4-4\beta+4\beta^2)$

答案：(1) $-\dfrac{11}{4}$ (2) $-\dfrac{11}{10}$ (3) $-\dfrac{63}{8}$ (4) -28

解析：α,β爲$2x^2-3x+5=0$之二根$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{3}{2}\\ \alpha\beta=\dfrac{5}{2}\end{cases}$，又$\begin{cases}2\alpha^2-3\alpha+5=0\Rightarrow 2\alpha^2=3\alpha-5\\ 2\beta^2-3\beta+5=0\Rightarrow 2\beta^2=3\beta-5\end{cases}$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(\dfrac{3}{2})^2-2\cdot\dfrac{5}{2}=-\dfrac{11}{4}$

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-\frac{11}{4}}{\frac{5}{2}}=-\dfrac{11}{10}$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(\dfrac{3}{2})^3-3\cdot\dfrac{5}{2}(\dfrac{3}{2})=-\dfrac{63}{8}$

(4) $(1+\alpha-2\alpha^2)(4-4\beta+4\beta^2)=[1+\alpha-(3\alpha-5)][4+\beta+(6\beta-10)]$

$=(6-2\alpha)(2\beta-6)=-36+12(\alpha+\beta)-4\alpha\beta$

$=-36+12(\dfrac{3}{2})-4(\dfrac{5}{2})=-28$