高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：98.09.29					
範圍	1-2 有理數與實數(1)	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (每題 5 分)

( ) 1. 化簡 $\dfrac{(1+\frac{13}{5})(1+\frac{13}{6})(1+\frac{13}{7})\cdots(1+\frac{13}{13})}{(1+\frac{12}{4})(1+\frac{12}{5})(1+\frac{12}{6})\cdots(1+\frac{12}{12})}$ 之值爲

(1) $\frac{24}{35}$ (2) $\frac{45}{32}$ (3) $\frac{25}{34}$ (4) $\frac{42}{53}$ (5) $\frac{32}{54}$.

解答 3

解析

$$\frac{(1+\frac{13}{5})(1+\frac{13}{6})(1+\frac{13}{7})\cdots(1+\frac{13}{13})}{(1+\frac{12}{4})(1+\frac{12}{5})(1+\frac{12}{6})\cdots(1+\frac{12}{12})}=\frac{\frac{18}{5}\times\frac{19}{6}\times\frac{20}{7}\times\cdots\times\frac{26}{13}}{\frac{16}{4}\times\frac{17}{5}\times\frac{18}{6}\times\cdots\times\frac{24}{12}}$$

$$=\frac{18}{5}\times\frac{19}{6}\times\frac{20}{7}\times\cdots\cdots\times\frac{24}{11}\times\frac{25}{12}\times\frac{26}{13}\times(\frac{4}{16}\times\frac{5}{17}\times\frac{6}{18}\times\cdots\cdots\times\frac{10}{22}\times\frac{11}{23}\times\frac{12}{24})$$

$$=\frac{4\times25\times26}{16\times17\times13}=\frac{25}{34}.$$

( ) 2. $\sqrt{74-\sqrt{47}}$ 介在哪兩個連續整數之間？

(1)5 與 6 (2)6 與 7 (3)7 與 8 (4)8 與 9 (5)9 與 10 .

解答 4

解析 令$a=\sqrt{74-\sqrt{47}}\Rightarrow a^2=74-\sqrt{47}$,

又$6<\sqrt{47}<7\Rightarrow 67<a^2<68\Rightarrow\sqrt{67}<a<\sqrt{68}\Rightarrow 8=\sqrt{64}<\sqrt{67}<a<\sqrt{68}<\sqrt{81}=9.$

二、多選題 (每題 10 分)

( ) 1. 設r 、s 是有理數, $r<s$ 且 m 、n 是正整數, 則下列何者恆成立？

(1) $r<\frac{r+s}{3}<s$ (2) $r<\frac{3r+s}{4}<\frac{r+s}{2}<\frac{r+3s}{4}<s$ (3) $r<\frac{2r+3s}{5}<\frac{3r+2s}{5}<s$

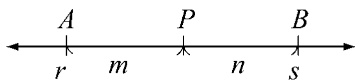
(4) $r<\frac{nr+ms}{m+n}<s$.

解答 24

解析 (1)反例： $r=-0.9, s=-0.6\Rightarrow -0.9<\frac{(-0.9)+(-0.6)}{3}=-0.5<-0.6$ (矛盾)

(2)(3)(4)依分點公式：

$A-P-B$



且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n, A(r), B(s),$ 則 $P(\frac{nr+ms}{m+n})$

( ) 2. 下列何者正確？

(1) $0.\overline{9}<1$ (2) $0.2\overline{32}=0.\overline{23}$ (3) $0.\overline{34}>0.343$ (4) $0.\overline{34}<0.344$ (5) $0.12\overline{3}$ 爲有理數 .

解答 2345

解析 (1)$0.\overline{9}=\dfrac{9}{9}=1.$

(2)$0.2\overline{32}=0.23232\cdots=0.\overline{23}.$

(3)$0.\overline{34}=0.3434\cdots>0.343.$

(4)$0.\overline{34}=0.3434\cdots<0.344.$

(5)$0.12\overline{3}=\dfrac{123-12}{900}=\dfrac{111}{900}.$

(　　) 3. 下列何者爲真？

(1)存在有兩個無理數，使得 $a-b$ 爲無理數且 $a+b$ 爲有理數

(2)若 $2a+b,2b+c,2c+a$ 均爲有理數，則 a,b,c 也必均爲有理數

(3)有理數與無理數均具有稠密性

(4)若 $a,b,\dfrac{a}{b}$ 均爲無理數，則 $a+b$ 或 ab 必爲無理數

(5)設 a,b 是實數，且 $a+b\sqrt{3}=0$， 則 $a=b=0$.

解答 123

解析 (1)舉例: $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$

(2)$(2a+b)+(2b+c)+(2c+a)=3(a+b+c)$爲有理數,

$\therefore a+b+c$ 爲有理數,

$\therefore 2(a+b+c)-(2a+b)=b+2c$ 爲有理數,

$\therefore 2(b+2c)-(2b+c)=3c$ 爲有理數,

$\therefore c$爲有理數,且 a,b 也爲有理數 .

(4)反例: $a=1-\sqrt{2},b=1+\sqrt{2}.$

(5)反例: $a=-3,b=\sqrt{3}.$

(　　) 4. 下列何者可化爲有限小數？

(1)$\dfrac{284}{15}$ (2)$\dfrac{562}{256}$ (3)$\dfrac{207}{144\times625}$ (4)$\dfrac{123}{25^3}$ (5)$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$.

解答 234

解析 分式化簡後，分母含有 2、5 以外的質因數化爲小數時爲無限(循環)小數

(1)╳ $:15=3\times5$ 且 $3\nmid284.$　　(2)○ $:256=2^8$.

(3)○$:\dfrac{207}{144\times625}=\dfrac{207}{16\times9\times25\times25}=\dfrac{23}{16\times25\times25}.$　　(4)○.

(5)╳:分子爲無理數 .

(　　) 5. 設 a,b 爲有理數，c,d 爲無理數，且 $a\neq0$，則下列何者爲真?

(1) $a+c$ 爲無理數　(2) $c+d$ 爲無理數　(3) ac 爲無理數

(4) cd 爲無理數　(5) $\dfrac{b}{a}$ 爲有理數.

解答 135

解析 (1)○: 例如: $2+\sqrt{3}$.　　(2)╳: 例如 : $\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})=1$ 爲有理數 .

(3)○: 例如: $5\cdot\sqrt{3}=5\sqrt{3}$.　　(4)╳: 例如 : $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=2-1=1$ 爲有理數 .

(5)○: 例如 : $\dfrac{3}{5}$.

(　　) 6. 下列哪些有理數可化成有限小數？ (1)$\frac{41}{16}$ (2)$\frac{137}{15}$ (3)$\frac{7}{50}$ (4)$\frac{1}{512}$ (5)$\frac{21}{15}$.

解答　1345

解析　最簡分數的分母只含 2 或 5 兩個質因數的有理數均可化成有限小數,

三、填充題(每題 10 分)

1. 將下列各數化成最簡根式:

(1)$\sqrt{20}+\sqrt{80}-\sqrt{45}$　(2)$(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.　(3)$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

(4)$\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.　(5)$\frac{1}{\sqrt{5}+1}-\frac{1}{\sqrt{5}-1}$　(6)$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

解答　(1)$3\sqrt{5}$;(2)4　(3)$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$;(4)$\sqrt{6}+\sqrt{2}$　(5)$-\frac{1}{2}$　(6)$5+2\sqrt{6}$

解析

(1)$\sqrt{20}+\sqrt{80}-\sqrt{45}=2\sqrt{5}+4\sqrt{5}-3\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

(2)$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=6-2=4$.

(3)$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$.

(4)$\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\left(\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\right)=\frac{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

(5)$\frac{1}{\sqrt{5}+1}-\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)-\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{-2}{5-1}=-\frac{1}{2}$.

(6)$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2}=5+2\sqrt{6}$.

2. $0.2\overline{37}$ 化為有理數=______________.

解答　$\frac{47}{198}$

解析　$\frac{237-2}{990}=\frac{47}{198}$.

3. 若函數 $f(n)$ 表「$\frac{4}{7}$ 化成小數，小數點後第 n 位數」，則

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(123)=$__________.

解答　553

解析　$\frac{4}{7}=0.\overline{571428}$,

$123=6\times20+3\Rightarrow f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=5+7+1+4+2+8=27$,

所求$=27\times20+5+7+1=553$.

4. 設 a，b，c 為 1 至 9 的正整數，若 $\frac{699}{900}<0.a\overline{bc}<\frac{700}{900}$，則序組$(a,b,c)$=__________.

解答　$(7,7,6)$

解析　原式

$\Rightarrow \dfrac{699}{900} < \dfrac{(100a+10b+c)-a}{990} - a < \dfrac{700}{900} \Rightarrow 768.9 < (100a+10b+c)-a < 770,$

$\therefore (100a+10b+c)-a = 769$，取$a=7, b=7, c=6$.

5. 設$a2811$是一個五位數，且$\dfrac{a2811}{420}$爲有限小數，則數字$a=$________.

解答　6

解析　$\dfrac{a2811}{2^2\times3\times5\times7}$爲有限小數$\Rightarrow 3 \mid a2811\cdots(1)$

且$7 \mid a2811\cdots(2)$

由(1) $\Rightarrow 3 \mid (a+2+8+1+1)$　　$\Rightarrow a$可爲0(不合), 3，6，9,

依次代入(2)驗算得$a=6$（$62811\div7=8973$）.

6. 有一個最簡分數，其分子與分母之和爲 20，若將此分數化爲小數，並將第三位小數四捨五入得 0.54 一數，則此分數爲_________ .

解答　$\dfrac{7}{13}$

解析　設此最簡分數爲$\dfrac{20-p}{p}$（ p爲正整數,$1\le p<20, (p,20-p)=1$ ），

則 $0.535 \le \dfrac{20-p}{p} < 0.545 \Rightarrow 0.535p \le 20-p < 0.545p$ ，

左式$\Rightarrow p \le 13.\cdots$，右式$\Rightarrow p > 12.\cdots$，　$\therefore p=13$,此分數$=\dfrac{7}{13}$.

7. 設a,b是有理數，且滿足$(4a+3b)+3\sqrt{2}=1+(2a-6b)\sqrt{2}$，則數對$(a,b)=$___________.

解答　$(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3})$

解析　原式整理得$(4a+3b-1)+(-2a+6b+3)\sqrt{2}=0,$

$\because a,b$爲有理數，　$\therefore 4a+3b-1=0$且$-2a+6b+3=0$, $\therefore a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{1}{3}$.

8. 設a,b爲有理數，滿足$a\sqrt{3-2\sqrt{2}}+b\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{43-30\sqrt{2}}$,求$a=$__________ .

解答　1

解析　原式整理得$\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{17-2\sqrt{72}}=\sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{8})^2}=3-2\sqrt{2}$，

$\sqrt{43-30\sqrt{2}}=\sqrt{43-2\sqrt{450}}=\sqrt{(\sqrt{25}-\sqrt{18})^2}=5-3\sqrt{2}$ ，

$\sqrt{3-3\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1,$

$a(\sqrt{2}-1)+b(3-2\sqrt{2})=5-3\sqrt{2} \Rightarrow (-a+3b-5)+(a-2b+3)\sqrt{2}=0,$

$\because a,b$是有理數$,\therefore -a+3b-5=0,$且$a-2b+3=0 \Rightarrow a=1, b=2$.

9. 設 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=a+b$，其中 a 是整數，$0\le b<1$，則 $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{2-b}=$__________.

解答 $\dfrac{6}{7}$

解析 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{11+2\sqrt{18}}=\sqrt{9}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}, a=4, b=(3+\sqrt{2})-4=\sqrt{2}-1,$

則 $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{2-b}=\dfrac{1}{3+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{6}{7}.$

10. 設 $\sqrt{3}$ 的小數部分爲 x，則 $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}=$_____________.

解答 $\sqrt{2}$

解析 $\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4},$

$\therefore \sqrt{3}=1+x, x=\sqrt{3}-1,$　所求 $=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{2}.$

11. x 爲自然數，滿足 $|2x-3|<10$ 之解共有__________個.

解答 6

解析 $|2x-3|<10$

$\Rightarrow -10<2x-3<10$

$\Rightarrow -7<2x<13$

$\Rightarrow -\dfrac{7}{2}<x<\dfrac{13}{2},$

$\because x$爲自然數，　則 $x=1, 2, 3, 4, 5, 6,$ 共6個.

12. 解 $|-2x+1|>4$ 得 x 的範圍爲________ .

解答 $x>\dfrac{5}{2}$ 或 $x<-\dfrac{3}{2}$

解析 $-2x+1>4$ 或 $-2x+1<-4,$

$\Rightarrow -2x>3$ 或 $-2x<-5,$

$\therefore x<-\dfrac{3}{2}$ 或 $x>\dfrac{5}{2}.$

13. 設 a,b 爲實數，若 $|ax+2|\le b$ 之解爲 $-3\le x\le 5$，則 $a+b=$___________

解答 6

解析 $-3\le x\le 5 \Leftrightarrow \left|x-\dfrac{(-3)+5}{2}\right|\le\dfrac{5-(-3)}{2}$，即 $|x-1|\le 4,$

同乘 $|-2| \Rightarrow |-2x+2|\le 8$，即 $\begin{cases} a=-2 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow a+b=6$

14. 設 a,b 爲整數，若 $|a-1|+3|b+2|=4$，則數對 (a,b) 共有_______組解.

解答 6

解析 (I) $|b+2|=1, |a-1|=1$ 時: $(a,b)=(2,-1),(2,-3),(0,-1),(0,-3).$

(II) $|b+2|=0, |a-1|=4$ 時: $(a,b)=(5,-2)$ 或 $(-3,-2)$.

由(I)(II)知共6組解.

15. 設 x , y , z 爲實數，且 $|x+y-3|+|y+z-4|+|z+x-5|=0$，則序組 $(x,y,z)=$________.

解答　(2,1,3)

解析

由原式可得

$x+y-3=0, y+z-4=0, z+x-5=0$，解得 $x=2,\ y=1,\ z=3$.

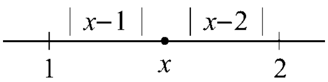
16. 設 x 爲實數，且 $|x-1|+|x-2|=5$，則 $x=$________.

解答　4 或 -1

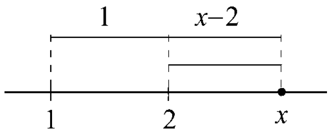
解析　(I)$1\le x\le 2$ 時 : 如下圖(1), $|x-1|+|x-2|=2-1=1$　（不合）.

(II)$x>2$時 : 如下圖(2), $1+2(x-2)=5,\ x=4$.

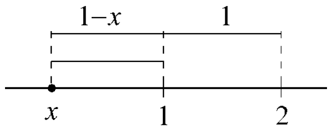
(III)$x<1$時 : 如下圖(3), $1+2(1-x)=5,\ x=-1$.



圖(1)



圖(2)



圖(3)

17. 解方程式 $x+3=|x-1|$，則 $x=$________.

解答　-1

解析　(I)若$x-1\ge 0$,則$x+3=x-1$,得$3=-1$（矛盾）.

(II)若$x-1<0$,則$x+3=1-x$,整理得$2x+2=0$,　　解得$x=-1$.

由(I)(II)解爲$x=-1$.

18. 設 x，y 爲實數，且 $-1\le x\le 2, 2\le y\le 3$, 若 $\dfrac{x}{y}$ 有最大值 M 及最小值 m, 則 $\dfrac{M}{m}$ 的值爲___ .

解答　-2

解析　$\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{y}\le\dfrac{1}{2}, -1\le x\le 2,\quad \therefore \dfrac{-1}{2}\le x\cdot\dfrac{1}{y}\le 1,\quad M=1, m=-\dfrac{1}{2}$, 故 $\dfrac{M}{m}=-2$.

19. 設 x 爲實數，且 $|x-1|+|x-3|<k$ 無解，則 k 的最大值爲_______.

解答　2

解析　$f(x)=|x-1|+|x-3|$的最小值爲$f(3)=2$,

$\therefore$原式表示 : $k>|x-1|+|x-3|\ge 2$無解,　　$\therefore k\le 2$, $\therefore k$的最大值爲2.

20. 設 x, y 爲實數，若 $(x+y-2)^2+(3x-y-4)^2=0$，則 $x=$(1)________，$y=$(2)_________.

解答　(1) $x=\dfrac{3}{2}$;(2) $y=\dfrac{1}{2}$

解析

$\because (x+y-2)^2+(3x-y-4)^2=0$,

$\therefore \begin{cases} x+y-2=0 \\ 3x-y-4=0 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}, y=\dfrac{1}{2}$.

21. 設 x, y 爲實數，若 $|x-2| \le 5, |y+6| \le 3$，則 $3x-y$ 的最大值爲(1)____，最小值爲 (2)____.

解答　(1)30;(2) -6

解析　$|x-2| \le 5 \Rightarrow -3 \le x \le 7 \Rightarrow -9 \le 3x \le 21,$

$|y+6| \le 3 \Rightarrow -9 \le y \le -3 \Rightarrow 3 \le -y \le 9,$

$\therefore -6 \le 3x-y \le 30,$　故最大值30,最小值 -6.

22. 若實數 x 滿足 $1 < |x-1| \le 2$，則 x 之範圍爲_______.

解答　$2 < x \le 3$ 或 $-1 \le x < 0$

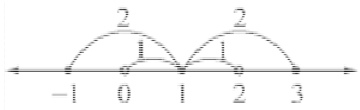
解析

（解一）

$\because 1 < |x-1| \le 2,$

$\therefore 1 < x-1 \le 2$ 或 $-2 \le x-1 < -1,$

$2 < x \le 3$ 或 $-1 \le x < 0.$



（解二）

用圖解法:

$1 < |x-1| \le 2 \Rightarrow 2 < x \le 3$ 或 $-1 \le x < 0.$

23. 試比較下列兩組數的大小：

(1) $a = \dfrac{101}{103}, b = \dfrac{105}{107}, c = \dfrac{109}{111}.$ （由小至大排序）__________________________(以 $a, b, c.$ 回答)

(2) $a = -\dfrac{128}{125}, b = -\dfrac{140}{137}, c = -\dfrac{193}{190}.$ （由小至大排序） ______________________(以 $a, b, c.$ 回答)

解答　(1) $a < b < c$;(2) $a < b < c$

解析　(1) $a = 1 - \dfrac{2}{103},\quad b = 1 - \dfrac{2}{105},\ \therefore \dfrac{2}{103} > \dfrac{2}{105},\ \therefore a < b,$　同理 $b < c.$

(2) $a = -1 - \dfrac{3}{125},\quad b = -1 - \dfrac{3}{137},\ \because \dfrac{3}{125} > \dfrac{3}{137},\ \therefore a < b,$　同理 $b < c.$

24. $a = \sqrt{7} + \sqrt{2}, b = \sqrt{6} + \sqrt{3}, c = 2 + \sqrt{5}$，比較 a, b, c 大小____________________.(以 $a, b, c.$ 回答)

解答　$c > b > a$

解析　$a^2 = 9 + 2\sqrt{14}, b^2 = 9 + 2\sqrt{18}, c^2 = 9 + 2\sqrt{20},$

$\because 20 > 18 > 14, \therefore c^2 > b^2 > a^2,$

$\therefore c > b > a$　（$\because a, b, c$ 均正）.

25. 試比較 $a = \sqrt{8} - \sqrt{6}$ 與 $b = 3 - \sqrt{7}$ 的大小 .

解答　$a > b$

解析

$a = \dfrac{(\sqrt{8}-\sqrt{6})(\sqrt{8}+\sqrt{6})}{\sqrt{8}+\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{6}},$

$b = \dfrac{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}{3+\sqrt{7}} = \dfrac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{7}},$

$\because \sqrt{8} < \sqrt{9}, \sqrt{6} < \sqrt{7}, \therefore \sqrt{8}+\sqrt{6} < \sqrt{9}+\sqrt{7},\quad \Rightarrow a > b.$

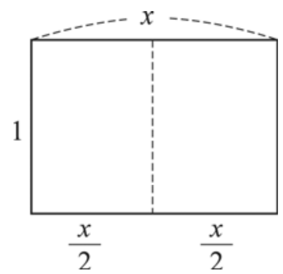
26. 市售的八開圖畫紙是將一張全開的紙（如報紙）對折 3 次所得的尺寸，其面積爲原來的$\frac{1}{8}$. 整張紙的長、寬比要設計得合理，才能使對開、4 開、8 開、16 開等尺寸的紙張形狀相似.

(1)欲使一矩形紙張對折之後的形狀和原來的相似，紙張的長、寬比爲何？

(2)欲使一矩形裁去一以寬爲邊長的正方形之後，形狀和原來的矩形相似，矩形的長、寬比爲何？

解答　(1) $\sqrt{2}:1$;(2) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}:1$

解析

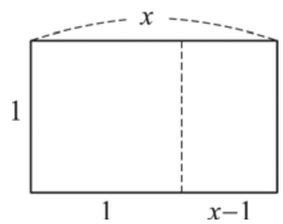


(1)設紙張原來的寬爲 1，長爲 $x\left(x>0\right)$，

則經對折後的長方形長爲 1，寬爲$\frac{x}{2}$，

故$x:1=1:\frac{x}{2}$，得$\frac{x^2}{2}=1$，$x^2=2$，$x=\sqrt{2}$．

紙張的長寬比值爲$\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$．



(2)設矩形原來的寬爲 1，長爲 $x\left(x>1\right)$，

則經裁去一以寬爲邊長的正方形之後，

剩餘長方形的長爲 1，寬爲$x-1$，

故$x:1=1:\left(x-1\right)$，$x^2-x-1=0$，得$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(x>1\right)$．

矩形的長寬比值爲$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$．

四、證明題

1. 證明：$\sqrt{2}$ 不是有理數.

解析

假設$\sqrt{2}$ 爲有理數，設$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$（其中 p，q 是互質的正整數）．

等式兩邊平方，得到$2=\frac{q^2}{p^2}$，即$2p^2=q^2$．

因爲q^2是偶數，所以q也是偶數．

(因爲偶數的平方才會是偶數；若q是奇數，q^2不可能是偶數．)

將q寫成$q=2m$（m是整數），代入$2p^2=q^2$，得$2p^2=4m^2$，

即$p^2=2m^2$，因此p^2是偶數，故p也是偶數．

p，q都是偶數的推論與p，q是互質兩數的假設互相矛盾，

故原假設錯誤，所以$\sqrt{2}$不是有理數．

2. 利用$\sqrt{2}$是無理數，證明：(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　(2) $5+\sqrt{2}$ 皆爲無理數．

$\boxed{\text{解析}}$ (1)設$\frac{\sqrt{2}}{2}$是有理數，即設$\frac{\sqrt{2}}{2}=p$，p 爲有理數$\Rightarrow\sqrt{2}=2p$ 爲有理數

此與已知“$\sqrt{2}$是無理數”矛盾，故$\frac{\sqrt{2}}{2}$是無理數.

(2)設$5+\sqrt{2}$是有理數，即設$5+\sqrt{2}=p$, p 爲有理數，

則$\sqrt{2}=p-5$爲有理數，此與已知矛盾，故$5+\sqrt{2}$是無理數.

3. (1)設a,b是正實數，試證：$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.⇐(算術平均數大於或等於幾何平均數、算幾不等式)

(2) 證明：若$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$，則 $a=b$

$\boxed{\text{解析}}$ (1)因爲a， b是正實數，所以

$a=\left(\sqrt{a}\right)^2$， $b=\left(\sqrt{b}\right)^2$，且$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$.

得$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\geq 0$，（實數的平方恆爲正數或0），

故$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

(2) $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$，即$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=0$

$$\Rightarrow\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{ab}}{2}=0\Rightarrow\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}=0\Rightarrow\sqrt{a}=\sqrt{b}\Rightarrow a=b$$

4. (1)已知a,b是實數且$a^2+b^2=16$，求ab的最大值．

(2)已知a,b是正實數且$ab=16$，求$a+b$的最小值．

$\boxed{\text{解答}}$ (1)8;(2)8

$\boxed{\text{解析}}$ (1)因爲a,b是實數，所以a^2和b^2均爲正數，

由算幾不等式$\frac{a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{a^2b^2}$,得

$\frac{16}{2}\geq|ab|\Rightarrow -8\leq ab\leq 8$,　故$ab$的最大值爲 8.

(2) a,b是正實數，　由算幾不等式$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$,得

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{16}\Rightarrow a+b\geq 8$,　故$a+b$的最小值爲 8.