高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：98.09.22					
範圍	1-1 整數(3)	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (每題 5 分)

( ) 1. 設 a 及 $\dfrac{3a+25}{2a-5}$ 均爲自然數，則滿足條件的 a 有幾個? (1)5 (2)4 (3)3 (4)2 (5)1 .

解答 2

解析 $2a-5\,|\,3a+25,\ 2a-5\,|\,2a-5 \Rightarrow 2a-5\,|\,2(3a+25)-3(2a-5)$,

$\therefore\ 2a-5\,|\,65$ ，又 a 爲正整數， $3a+25$ 爲正整數

$\therefore\ 2a-5$ 爲正整數 $\Rightarrow 2a-5=1$ ，5，13 或 65，$\therefore a=3$ ，5，9 或 35 . 共 4 個 a 滿足條件 .

( ) 2. 下列何者是質數？ (1) 97 (2) 143 (3) 221 (4) 361 (5) 529

解答 1

解析 $\because$ 比 $\sqrt{97}$ 小的質數 2，3，5，7 都不是 97 之因數 $\therefore$ 97 爲質數

( ) 3. 設 n 爲正質數，且 $p=n^4-3n^2+9$ 亦爲質數，則 n 之值爲

(1) 2 (2) 3 (3) 5 (4) 7 (5)13

解答 1

解析 $\because n^4-3n^2+9=(n^4+6n^2+9)-9n^2=(n^2+3)^2-(3n)^2=(n^2+3n+3)(n^2-3n+3)$爲質數

又 $n^2+3n+3>n^2-3n+3$

$\therefore\ n^2-3n+3=1 \Rightarrow n^2-3n+2=0 \Rightarrow (n-1)(n-2)=0$

$\Rightarrow\ n=1$ 或 $n=2$（但 1 不是質數，不合）

$\therefore\ n=2$，此時 $p=16-12+9=13$

( ) 4. 李家三兄弟寄宿在外，大哥每 5 天回家一次，二哥每 7 天回家一次，三弟每 15 天回家一次；已知 2004 年的五月九日（母親節）同時回家相聚後，三兄弟下一次再度同時回家相聚的時間是當年的

(1) 8 月 8 日 (2) 8 月 20 日 (3) 8 月 21 日 (4) 8 月 22 日 (5) 8 月 23 日

解答 4

解析 $\because$ $[5，7，15]=105$ $\therefore$ 三兄弟每次同時回家相隔 105 天

又 5 月 10 日至 5 月 31 日有 22 天，6 月有 30 天，7 月有 31 天，8 月有 31 天

$\therefore$ 由 5 月 10 日到 8 月 22 日共有 $22+30+31+22=105$ 天，下次返家爲 8 月 22 日

二、多選題 (每題 10 分)

( ) 1. 設 a，b，c 均爲整數，下列敘述何者恆真？

(1)若 $a\,|\,c$，$b\,|\,c$，則 $ab\,|\,c$ (2)若 $a\,|\,bc$，則 $a\,|\,b$ 或 $a\,|\,c$

(3)若 $a\,|\,b$，$a\,|\,c$，則 $a\,|\,(b-c)$ (4)若$(a，b)=1$，則 a，b 必爲質數

(5)若$(a，b)=1$，則$(a\cdot b，a\pm b)=1$

解答 35

解析 (1)若$(a，b)\neq 1$，則不真

(2)若 a 不是質數，則不真

(4)若 $a=4$，$b=7$，則$(a，b)=1$，但 $a=4$ 不是質數

( ) 2. 設 $a\in Z$，$a\neq 0$，$(a，48)=1$，則 (1) $(a，144)=1$ (2) $(a^2，72)=1$ (3) $(a^3，24)=1$

(4) $(2a，3)=1$ (5) $(a+12，36)=1$

解答　12345

解析　$\because\ (a，48)=1 \Leftrightarrow (a，2^4\times 3)=1 \Leftrightarrow a$ 不是 2 的倍數，a 不是 3 的倍數

$\therefore$ (1) $(a，144)=(a，2^4\times 3^2)=1$　(2) $(a^2，72)=(a^2，2^3\times 3^2)=1$

(3) $(a^3，24)=(a^3，2^3\times 3)=1$　(4) $(2a，3)=1$　(5) $(a+12，36)=(a+12，2^2\times 3^2)=1$

三、填充題　(每題 10 分)

1. 若函數 $f(x)$表2^x 之個位數字，例如 $f(3)=8$， $f(4)=6$；則 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$____．

解答　246

解析　$f(1)=2=f(5)=f(9)=\cdots$,

$f(2)=4=f(6)=f(10)=\cdots$,

$f(3)=8=f(7)=f(11)=\cdots$,

$f(4)=6=f(8)=f(12)=\cdots$,　2,4,8,6 四個為一週期

$\therefore\ f(1)+f(2)+\cdots+f(50)=(2+4+8+6)\times 12+2+4=246$ ．

2. 設 n 為正整數，且 $\dfrac{2n^3-3n^2+5n-9}{n-2}$ 為質數，則 $n=$____________．

解答　1 或 7

解析　原數$=(2n^2+n+7)+\dfrac{5}{n-2}$為質數，

先令 $n-2\,|\,5$, $(n-2\geq -1)$，得 $n-2=-1$，1，5，即 $n=1$，3，7，

再一一代回 $(2n^2+n+7)+\dfrac{5}{n-2}$，驗算是否確為質數．$n=1$，7

3. 在 3150 之正因數中，為 25 之倍數，但不為 9 之倍數，其總和為____________。

解答　2400

解析　$3150=2\times 3^2\times 5^2\times 7$，所求 $=(2^0+2^1)(3^0+3^1)(5^2)(7^0+7^1)=3\times 4\times 25\times 8=2400$

4. 正整數 n 被 18，26，28 除，所得餘數依次為 11，19，21，則

(1) n 之最小值為____________。　(2)若 $n<10000$，則 n 之最大值為____________。

解答　(1)3269;(2)9821

解析

(1) $n=k[18,26,28]-7\Rightarrow n=3276k-7$，　取 $k=1\Rightarrow n=3276\times 1-7=3269$ 最小

(2) 取 $k=3\Rightarrow n=3276\times 3-7=9821$

5. x 是自然數，且$[x，18]=90$，則 x 的值可為____________。

解答　5，10，15，30，45，90

解析　$\because\ [x，18]=90\quad \therefore\ 18\,|\,90$ 且 $x\,|\,90$

$\because\ 90=18\times 5\quad \therefore$ 令 $x=5t$，則 $5t\,|\,90\ \Rightarrow\ t\,|\,18$

$\because\ x\in N\quad \therefore\ t\in N\ \Rightarrow\ t=1，2，3，6，9$ 或 18

故 $x=5，10，15，30，45$ 或 90

6. 七位數 $43a35b2$ 為 12 之倍數，則此種七位整數共有____________個。

解答　17

解析　$\because$ 七位數 $43a35b2$ 為 $12=3\times 4$ 之倍數　$\therefore$ 為 4 之倍數且為 3 之倍數

(1) $b2=b\times 10+2$ 為 4 之倍數　$\therefore\ b$ 可能為 1，3，5，7，9

(2) $4+3+a+3+5+b+2=a+b+17$ 為 3 之倍數　$\Rightarrow\ 3\,|\,a+b+2$

$\because\ 0\leq a\leq 9，0\leq b\leq 9\quad \therefore\ 0\leq a+b\leq 18$

$\because\ 3 \mid a+b+2 \quad \therefore\ a+b$ 可能為 1，4，7，10，13，16

(3)$\because$

b	1 1 1 1	3 3 3	5 5 5	7 7 7 7	9 9 9
a	0 3 6 9	1 4 7	2 5 8	0 3 6 9	1 4 7

$\therefore$ 七位數共有 $4+3+3+4+3=17$ 個

7. 設 a，b，q_1，q_2，$q_3 \in N$，且滿足 $\begin{cases} a = bq_1 + 272 \\ b = 272q_2 + 85 \\ 272 = 85q_3 + 17 \end{cases}$，則 a，b 之最大公因數__________。

解答　17

解析

$\begin{cases} a = bq_1 + 272 \\ b = 272q_2 + 85 \\ 272 = 85q_3 + 17 \end{cases} \therefore\ (a，b) = (b，272) = (272，85) = (85，17) = 17$

8. 540 之(1)正因數有__________個，(2)所有正因數之和為__________。

(3)又滿足 $x^2 \mid 540$ 之整數 x 共有__________個。

解答　(1)24;(2)1680;(3)8

解析　$\because\ 540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

$\therefore$ 正因數之個數為 $(2+1)(3+1)(1+1) = 24$

正因數之總和為 $(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1+3^2+3^3)(5^0+5^1) = 1680$

又滿足 $x^2 \mid 540$ 之整數 $x \mid 2^1 \times 3^1 \Rightarrow$ 整數 x 的個數等於 $2(1+1)(1+1) = 8$

9. 兩正整數 a，b，$a > b$，且 $a+b = 72$，$[a，b] = 7(a，b)$，則 $a =$__________。

解答　63

解析　設 $d = (a，b)$，則 $a = dh$，$b = dk$，$h > k$ 且 $(h，k) = 1$

$\begin{cases} a+b = d(h+k) = 72 \cdots\cdots ① \\ [a，b] = dhk = 7d \cdots\cdots ② \end{cases}$，由②得 $hk = 7$，即 $h = 7$，$k = 1$，代入①，得 $d = 9$

故 $a = dh = 9 \times 7 = 63$

10. 設 a，$b \in N$，$a > b$，$a \cdot b = 864$，$[a，b] = 144$，求 a，b 之值。

解答　$a = 48$，$b = 18$ 或 $a = 144$，$b = 6$

解析　設 $(a，b) = d$，$a = hd$，$b = kd$，則 $(h，k) = 1$

$\because\ a \cdot b = 864 \quad \therefore\ hkd^2 = 864 \ \cdots\cdots ①$

$\because\ [a，b] = 144 \quad \therefore\ hkd = 144 \ \cdots\cdots ②$

，$\dfrac{①}{②}$ 得 $d = 6 \quad \therefore\ hk = 24$

$\because\ (h，k) = 1$ 且 $a > b \quad \therefore\ h > k \ \Rightarrow\ h = 24$，$k = 1$ 或 $h = 8$，$k = 3$

$\therefore\ \begin{cases} a = 24 \times 6 = 144 \\ b = 1 \times 6 = 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 8 \times 6 = 48 \\ b = 3 \times 6 = 18 \end{cases}$

11. (1)求 6328 與 18645 之最大公因數__________。

(2)續上題，找出一組整數 m，n 使 $6328m + 18645n = (6328，18645)$，則數對 $(m，n) =$__________。

解答　(1)113;(2) $(56, -19)$

解析　(1)利用輾轉相除法

a	6328	18645	b
$-2a+b$	5989	12656	$2a$
$3a-b$	339	5989	$-2a+b$
$-53a+18b$	226	5763	$51a-17b$
$56a-19b$	113	226	$-53a+18b$
		226	

$\therefore$ $(6328，18645) = 113$

(2) $113 = 6328 \times 56 + 18645 \times (-19)$， $\therefore$ $(m，n) = (56，-19)$

12. $n = 2^7 \times 3^4 \times 5^3$的正因數中，被 45 整除，不被 8 整除者共____________個。

解答　27

解析　$45 = 3^2 \times 5$

$n = 2^7 \times 3^4 \times 5^3$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$2^0 \quad 3^2 \quad 5^1$

$2^1 \quad 3^3 \quad 5^2$

$2^2 \quad 3^4 \quad 5^3$

$\therefore$ 方法共 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 種

13. $a，b，c \in N$，$a - 2b + 3c = 0$，$3a - b - 5c = 0$ 且$(a，b，c) + [a，b，c] = 2733$，則 $c =$____________。

解答　15

解析　$\begin{cases} a-2b+3c=0 \\ 3a-b-5c=0 \end{cases} \Rightarrow a:b:c = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 13:14:5$

設$(a，b，c) = k$，則$[a，b，c] = [13k，14k，5k] = 910k$

$(a，b，c) + [a，b，c] = k + 910k = 911k = 2733 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow c = 5k = 15$

14. 設有三個質數，其積爲其和的 17 倍，則此三質數爲____________。

解答　2，17，19

解析　設三質數爲 $m，n，p$，則 $mnp = 17(m + n + p)$

$\Rightarrow$ $17 \mid mnp$，三質數 $m，n，p$ 中，設 $p = 17$ 且 $m \le n$ ，$mn = m + n + 17$

$\Rightarrow$ $mn - m - n = 17 \Rightarrow m(n-1) - (n-1) = 18$

$\Rightarrow$ $(m-1)(n-1) = 18 \Rightarrow \begin{cases} m-1=1，2，3 \\ n-1=18，9，6 \end{cases} \Rightarrow m = 2，n = 19$

$\therefore$ 三質數爲 2，17，19

15. $x，y \in N$，$xy - 2x + 3y = 0$，則$(x，y) =$____________。

解答　(3，1)

解析　$xy - 2x + 3y = 0 \Rightarrow x(y-2) + 3(y-2) = -6 \Rightarrow (x+3)(y-2) = -6(x，y \in N)$

$x+3$	1	2	3	6
$y-2$	-6	-3	-2	-1

$\Rightarrow$

x	-2	-1	0	3
y	-4	-1	0	1

$\Rightarrow (x，y) = (3，1)$

16. 設 $n \in N$，以 n 除 13511，13903，14589 得相等的餘數，求最大正整數 n=____________。。

解答　98

解析　設以 n 除 13511，13903，14589 得相同的餘數為 r

商分別為 q_1，q_2，q_3，則 $\begin{cases} 13511 = nq_1 + r \cdots\cdots ① \\ 13903 = nq_2 + r \cdots\cdots ② \\ 14589 = nq_3 + r \cdots\cdots ③ \end{cases}$

② − ①得 $392 = n(q_2 - q_1)$　∴　$n \mid 392$；

③ − ②得 $686 = n(q_3 - q_2)$　∴　$n \mid 686$

$n \mid (392, 686) \Rightarrow$ 故最大整數 $n = (392，686) = 98$

17. 求滿足 $x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ 的整數解$(x，y)$ =____________。。

解答　$(x，y) = (-1，0)，(-5，-2)，(-3，0)，(-7，-2)$

解析

$x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x - 6y + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4(y-1)x + 5y^2 - 6y + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad [x^2 - 4(y-1)x + 4(y-1)^2] - 4(y-1)^2 + 5y^2 - 6y + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad [x - 2(y-1)]^2 + (y+1)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad (x - 2y + 2)^2 + (y+1)^2 = 2$

$\because \quad x，y \in Z \quad \therefore \quad x - 2y + 2，y + 1 \in Z$

故 $\begin{cases} x - 2y + 2 = 1 \\ y + 1 = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - 2y + 2 = 1 \\ y + 1 = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - 2y + 2 = -1 \\ y + 1 = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - 2y + 2 = -1 \\ y + 1 = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -7 \\ y = -2 \end{cases}$

18. 設 $n \in N$ 且 $\sqrt{n^2 - 9n - 1} \in N$，求 n 之值。

解答　10 或 26

解析

設 $\sqrt{n^2 - 9n - 1} = k \in N$，則 $n^2 - 9n - 1 = k^2$

配方 $n^2 - 9n + (\frac{9}{2})^2 = k^2 + 1 + (\frac{9}{2})^2$

$\Rightarrow (n - \frac{9}{2})^2 - k^2 = \frac{85}{4}$

$\Rightarrow \quad (n + k - \frac{9}{2})(n - k - \frac{9}{2}) = \frac{85}{4}$

$\Rightarrow \quad (2n + 2k - 9)(2n - 2k - 9) = 85 = 85 \cdot 1 = 17 \cdot 5$

$\because \quad 2n + 2k - 9 > 2n - 2k - 9$

$\therefore \quad \begin{cases} 2n + 2k - 9 = 85 \\ 2n - 2k - 9 = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2n + 2k - 9 = 17 \\ 2n - 2k - 9 = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} n + k = 47 \\ n - k = 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} n + k = 13 \\ n - k = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} n = 26 \\ k = 21 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} n = 10 \\ k = 3 \end{cases}$，故 $n = 26$ 或 $n = 10$