

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：98.09.15				
範圍	1-1 整數(2)	班級		姓名
		座號		

一、單選題 (每題 5 分)

() 1. 下列何者是 2^{100} 除以 10 的餘數? (1)0 (2)2 (3)4 (4)6 (5)8 .

解答 4

解析 所求即為 2^{100} 之個位數字,

$$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, \dots \text{個位數字循環.}$$

$$2^{4k+1} = 10p + 2, 2^{4k+2} = 10q + 4, 2^{4k+3} = 10r + 8, 2^{4k} = 10s + 6 \quad (p, q, r, s \text{ 均為整數}),$$

$$2^{100} = 2^{4 \times 25} \text{ 其個位數字為 } 6.$$

() 2. 設 a 及 $\frac{5a+6}{3a+2}$ 均為自然數, 則滿足條件的 a 有幾個? (1)5 (2)4 (3)3 (4)2 (5)1 .

解答 5

解析 $3a+2 \mid 5a+6$ 且 $3a+2 \mid 3a+2 \Rightarrow 3a+2 \mid 3(5a+6) - 5(3a+2), \therefore 3a+2 \mid 8$, 又 a 為正整數, $\therefore 3a+2$ 為正整數 $\Rightarrow 3a+2=1, 2, 4$ 或 $8, \therefore a=2$. 只有 1 個 a 滿足條件.

() 3. 設 m 為大於 1 的正整數, n 為整數, 若 $m \mid 8n+7, m \mid 12n+4$, 則 m 的最大值為 (1)52 (2)26 (3)13 (4)4 (5)3 .

解答 3

解析 $m \mid 8n+7, m \mid 12n+4 \Rightarrow m \mid 3(8n+7) - 2(12n+4)$, 即 $m \mid 13$ (m 為正整數), $\therefore m=1$ 或 13 , 但 $m > 1$ 故 $m=13$.

() 4. 六位數 $6a472b$ 為 44 的倍數, 則 a, b 可能的解有幾組? (1)1 (2)2 (3)3 (4)4 (5)0 .

解答 3

解析 $44 = 4 \times 11 \Rightarrow 4 \mid 6a472b, 4 \mid 20+b \Rightarrow b=0, 4$ 或 8 , $11 \mid 6a472b, 11 \mid (a+7+b) - (6+4+2) \Rightarrow a+b=5$ 或 $16 \Rightarrow (a,b) = (5,0), (1,4)$ 或 $(8,8)$, 3 組

() 5. 設 a 為異於 1 的正整數, 以 a 除 4510, 3718, 2970 之餘數相同, 則 a 有幾個解? (1)1 (2)3 (3)5 (4)7 (5)9 .

解答 3

解析 $4510 = aq_1 + r \dots \textcircled{1}$

$$3718 = aq_2 + r \dots \textcircled{2}$$

$$2970 = aq_3 + r \dots \textcircled{3} \quad q_1, q_2, q_3, r \text{ 為整數}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } 792 = a(q_1 - q_2),$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{3} \text{ 得 } 1540 = a(q_1 - q_3),$$

$$\Rightarrow a \mid (792, 1540), \therefore a \mid 44, a = 2, 4, 11, 22, 44, \text{ 共 } 5 \text{ 個解.}$$

二、多選題 (每題 10 分)

() 1. 設 a, b, c, m, n 皆為整數, 則下列何者正確?

(1)若 $a \mid c, b \mid c$, 則 $ab \mid c$

(2)若 $a \mid bc$, 則 $a \mid b$ 或 $a \mid c$

(3)若 $a \mid b$, 則 $a \leq b$

(4)若 $c \mid a, c \mid b$, 則 $c \mid (a-b)$

(5)若 $c \mid (ma+nb)$, 則 $c \mid a$ 且 $c \mid b$.

解答 4

解析 (1)反例: $4 \mid 12$, $6 \mid 12$ 但 $4 \times 6 \nmid 12$.

(2)必須 a 是質數才成立 .

(3)除了 $b = 0$ 之外, 都有 $|a| \leq |b|$, 但 $a \leq b$ 卻不成立 . 反例: $3 \mid -6$, 但 $3 > -6$.

(5)反例: $7 \mid 14 \times 3 + 2 \times 7$, 但 $7 \nmid 3$.

() 2. 設 n 為正整數, 下列何者恆為 11 的倍數?

(1) $10^{2n+1} + 1$ (2) $10^{2n+1} - 1$ (3) $10^{2n} - 10$ (4) $10^{2n} + 1$ (5) $10^{2n} + 10$.

解答 15

解析 (1) $10^{2n+1} + 1 = (11-1)^{2n+1} + 1$ 以 11 除之, $(-1)^{2n+1} + 1 = 0$, \therefore 為 11 的倍數 .

(2) $10^{2n+1} - 1 = (11-1)^{2n+1} - 1$ 以 11 除之, $(-1)^{2n+1} - 1 = -2$, 即餘數為 9 .

(3) $10^{2n} - 10 = (11-1)^{2n} - 10$ 以 11 除之, $(-1)^{2n} - 10 = -9$, 即餘數為 2 .

(4) $10^{2n} + 1 = (11-1)^{2n} + 1$ 以 11 除之, $(-1)^{2n} + 1 = 2$, 即餘數為 2 .

(5) $10^{2n} + 10 = (11-1)^{2n} + 10$ 以 11 除之, $(-1)^{2n} + 10 = 11$, 餘數為 0, \therefore 為 11 的倍數 .

() 3. 已知「大於 1 的正整數 a 如果找不到不大於 \sqrt{a} 的質因數, 則 a 就是質數」, 下列何者是質數? (1)277 (2)157 (3)361 (4)667 (5)271 .

解答 125

解析 $\sqrt{277} = 16. \dots$, 且 2, 3, 5, 7, 11, 13 均不為 277 的因數, \therefore 277 為質數, 同理 157, 271 也是質數, 而 $361 = 19 \times 19$, $667 = 23 \times 29$.

三、填充題 (每題 10 分)

1. 若 $n = 2^4 \times 3^3 \times 6^2$, 則 n 之正因數共有 _____ 個 . n 之正因數為 6 的倍數共有 _____ 個 .

解答 42, 30

解析 $n = 2^4 \times 3^3 \times (2 \times 3)^2 = 2^6 \times 3^5$,

(1)正因數共有 $(6+1)(5+1) = 42$ (個) .

(2) $n = 2^4 \times 3^3 \times (2 \times 3)^2 = 2^6 \times 3^5 = 6(2^5 \times 3^4)$, 正因數為 6 的倍數共有 $(5+1)(4+1) = 30$

2. 999^3 除以 7 的餘數 _____ .

解答 6

解析 $999^3 = (7 \times 142 + 5)^3$ 展式中除以 7 之餘數即為 $5^3 = 125$,

除以 7 之餘數 $125 \div 7 = 17$ 餘 6, \therefore 餘數為 6 .

3. 若函數 $f(x)$ 表 2^x 之個位數字, 例如 $f(3) = 8$, $f(4) = 6$; 則 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(101) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答 502

解析 $f(1) = 2 = f(5) = f(9) = \dots$,

$f(2) = 4 = f(6) = f(10) = \dots$,

$f(3) = 8 = f(7) = f(11) = \dots$,

$f(4) = 6 = f(8) = f(12) = \dots$,

$\therefore f(1) + f(2) + \dots + f(101) = (2 + 4 + 8 + 6) \times 25 + 2 = 502$.

4. 若七位數 $76x06y2$ 為 99 的倍數, 則數對 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答 (4, 2)

解析 $99 \mid 76x06y2 \Rightarrow 9 \mid 76x06y2$ 且 $11 \mid 76x06y2$

由 $9 \mid 76x06y2 \Rightarrow 9 \mid 7 + 6 + x + 6 + y + 2 \Rightarrow 9 \mid 21 + x + y$

$$\Rightarrow x + y = 6 \text{ 或 } x + y = 15 \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{由 } 11 \mid 76x06y2 \Rightarrow 11 \mid (7 + x + 6 + 2) - (6 + 0 + y) \Rightarrow 11 \mid x - y + 9$$

$$\Rightarrow x - y = -9 \text{ 或 } x - y = 2 \cdots \textcircled{2}$$

由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 解得 $x = 4, y = 2$, 則 $(x, y) = (4, 2)$.

5. 720 的所有正因數中為 6 的倍數者共有 n 個, 而這 n 個正因數之和為 m , 則數對 $(n, m) =$ _____.

解答 (16, 2160)

解析 $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$, $x \mid 720$, $6 \mid x \Rightarrow x = 2^a \times 3^b \times 5^c$,

$$a = 1, 2, 3, 4; b = 1, 2; c = 0, 1,$$

$$n = 4 \times 2 \times 2 = 16,$$

$$m = (2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \times (3^1 + 3^2) \times (5^0 + 5^1) = 2160.$$

6. 設 a 為整數, 若 $2a - 3 \mid 3a + 4$ 且 $a + 2 \mid 2a - 1$, 則 $a =$ _____.

解答 -7

解析 $2a - 3 \mid 3a + 4$, $2a - 3 \mid 2a - 3 \Rightarrow 2a - 3 \mid 2(3a + 4) - 3(2a - 3)$

$$\Rightarrow 2a - 3 \mid 17 \Rightarrow 2a - 3 = 1, -1, 17, -17$$

$$\Rightarrow a = 2, 1, 10, -7, \quad \text{代入 } a + 2 \mid 2a - 1 \text{ 檢驗得 } a = -7.$$

7. 設 $p = (a^2 - 22a + 121)(a^2 - 2a + 137)$, 其中 a 為自然數, 若 p 是質數, 則 $p =$ _____.

解答 257

解析 p 為質數, \therefore 其中必有一因數為 1 或 -1,

$$\text{但 } a^2 - 2a + 137 = (a - 1)^2 + 136 > 1,$$

$$\text{且 } a^2 - 22a + 121 = (a - 11)^2 \geq 0, \therefore (a - 11)^2 = 1 \quad (-1 \text{ 不合}),$$

$$\therefore a - 11 = 1 \text{ 或 } -1, \quad \therefore a = 12 \text{ 或 } a = 10.$$

$$\textcircled{1} a = 12, p = 1 \times 257 = 257 \text{ 是質數.}$$

$$\textcircled{2} a = 10, p = 1 \times 217 = 7 \times 31 \text{ 不是質數.}$$

8. 設 n 為整數, 且 $n^4 - 6n^2 + 25$ 為質數, 則 n 之值為(1)_____, 且此質數為(2)_____.

解答 (1) $n = \pm 2$; (2) 17

解析 令 $p = n^4 - 6n^2 + 25$

$$= n^4 + 10n^2 + 25 - 16n^2$$

$$= (n^2 + 5)^2 - (4n)^2$$

$$= (n^2 + 5 - 4n)(n^2 + 5 + 4n),$$

$$n^2 \pm 4n + 5 = (n \pm 2)^2 + 1 > 0,$$

$$\textcircled{1} n^2 - 4n + 5 = 1 \Rightarrow n = 2, p = 17.$$

$$\textcircled{2} n^2 + 4n + 5 = 1 \Rightarrow n = -2, p = 17.$$

9. 設 n 為正整數, 且 $\frac{2n^3 - 3n^2 + 5n - 6}{n - 2}$ 為質數, 則 $n =$ _____.

解答 1 或 4

解析 原數 $= (2n^2 + n + 7) + \frac{8}{n - 2}$ 為質數,

$$\text{令 } n - 2 \mid 8, (n - 2 \geq -1), \text{ 得 } n - 2 = -1, 1, 2, 4, 8, \text{ 即 } n = 1, 3, 4, 6, 10,$$

再一一代回原數, 驗算是否確為質數.

10. 設 $x, \sqrt{x^2 + 21}$ 均為自然數, 則 $x =$ _____.

解答 2 或 10

解析 令 $x^2 + 21 = k^2$ (k 是正整數) $\Rightarrow k^2 - x^2 = 21$, $(k+x)(k-x) = 21$,

$$\begin{array}{c|c|c} k+x & 21 & 7 \\ \hline k-x & 1 & 3 \end{array} \Rightarrow x=10 \text{ 或 } 2.$$

11. 設 a, b 為整數, 滿足 $2a^2 - 5ab - 3b^2 = 11$, 求 $a+b =$ _____ .

解答 1, -1

解析 $2a^2 - 5ab - 3b^2 = 11 \Rightarrow (2a+b)(a-3b) = 11$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 2a+b & 1 & 11 & -1 & -11 \\ \hline a-3b & 11 & 1 & -11 & -1 \end{array} \quad \therefore \begin{array}{c|c|c} a & 2 & -2 \\ \hline b & -3 & 3 \end{array}$$

$\therefore a+b = -1$ 或 1 .

12. 設 a, b 是二位數, 且 $ab - 18a - b = -53$, 則數對 $(a, b) =$ _____ .

解答 (36,17)

解析 $ab - 18a - b = -53 \Rightarrow a(b-18) - (b-18) = -53+18 \Rightarrow (a-1)(b-18) = -35$,

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} a-1 & 1 & -1 & 5 & -5 & 7 & -7 & 35 & -35 \\ \hline b-18 & -35 & 35 & -7 & 7 & -5 & 5 & -1 & 1 \end{array}$$

得 $a=36, b=17$ ($\because a, b$ 是二位數) .

13. 設 a, b 為整數, $a(b+2) = b, a > 1$, 則 $a+b$ 之值為 _____ .

解答 -2 或 0

解析 $a(b+2) = b$

$$\Rightarrow ab + 2a - b = 0 \Rightarrow (a-1)(b+2) = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1=1 \\ b+2=-2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a-1=2 \\ b+2=-1 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=-4 \text{ 或 } a=3, b=-3,$$

$\therefore a+b = -2$ 或 0 .

14. 韓信點兵, 兵不滿萬人, 每 5 人一數, 9 人一數, 13 人一數, 17 人一數皆餘 3 人, 則兵有 _____ 人 .

解答 9948

解析 所求 = $[5, 9, 13, 17] \times k + 3 = 9945k + 3$, 取 $k=1$, 得所求 = 9948 .

15. 設 a, b 是二位正整數, $a < b$, 若 $ab = 360$ 且 $[a, b] = 120$, 則數對 $(a, b) =$ _____ .

解答 (15,24)

解析 由 $(a, b)[a, b] = ab$, 得 $(a, b) \times 120 = 360$, $\therefore (a, b) = 3$.

設 $a=3m, b=3n, (m, n)=1, m < n$, 代入 $ab = 360$ 得 $mn = 40$

\Rightarrow 數對 $(m, n) = (1, 40)$ 或 $(5, 8)$,

\Rightarrow 數對 $(a, b) = (3 \times 1, 3 \times 40)$ 或 $(3 \times 5, 3 \times 8)$ (前者不合) .

16. 設 p, q 為正整數且 $p > q$, 若 $p+q = 2184, [p, q] = 6048$, 則數對 $(p, q) =$ _____ .

解答 (1512, 672)

解析 設 $(p, q) = d$, 令 $p = dh, q = dk, (h, k) = 1, h > k$,

$$p+q = d(h+k) = 2184, [p, q] = dhk = 6048,$$

$$\therefore (h, k) = 1, \therefore (h+k, hk) = 1, \text{ 故 } d = (2184, 6048) = 168,$$

$$\therefore h+k = 13, hk = 36 \Rightarrow h = 9, k = 4, \text{ 故 } (p, q) = (1512, 672) .$$

17. 設 m, n 為自然數, 若 m, n 的最大公因數與最小公倍數之和為 15, 則 m, n 之解有 _____ 組 .

解答 8

解析 設 $(m, n) = d$, 令 $m = dh$, $n = dk$, h, k 為正整數, $(h, k) = 1 \Rightarrow [m, n] = dhk$,

$$\because (m, n) + [m, n] = 15, \therefore d + dhk = 15 \Rightarrow d(1 + hk) = 15,$$

d	1	1	1	1	3	3	5	5
h	1	2	7	14	1	4	1	2
k	14	7	2	1	4	1	2	1

共 8 組 .

18. x, y, z 均為正整數, 且 $6x + 21y - 20z = 0$, $3x - 7y + 4z = 0$, 若 $(x, y, z) + [x, y, z] = 3025$, 則

$$x + y + z = \underline{\hspace{2cm}} .$$

解答 875

解析 解 $\begin{cases} 6x + 21y = 20z \\ 3x - 7y = -4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{15}z \\ y = \frac{4}{5}z \end{cases}$, 得 $x : y : z = 8 : 12 : 15$, 可設 $x = 8k$, $y = 12k$, $z = 15k$,

$$(x, y, z) + [x, y, z] = k + 120k = 121k = 3025, \therefore k = 25,$$

$$x + y + z = k(8 + 12 + 15) = 25 \times 35 = 875 .$$