高雄市明誠中學 高三平時測驗 日期：98.04.16					
範圍	選修(Ⅱ)CHAP1 極限、連續、導數	班級	普三　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1、(B)　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1})=$？ (A)0 (B)$-1$ (C)1 (D)$-\dfrac{1}{2}$ (E)不存在

解析：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}\cdot\dfrac{(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}\cdot\frac{-2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}=\frac{-2}{2}=-1$$

2、(D)　設 $2n-5<3na_n<(n+1)^2-n^2$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$？ (A)2 (B)$-5$ (C)不存在 (D)$\dfrac{2}{3}$ (E)0

解析：$\because 2n-5<3na_n<2n+1$

$$\frac{2n-5}{3n}<a_n<\frac{2n+1}{3n}$$

$$\therefore \frac{2}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-5}{3n}<\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n}=\frac{2}{3}$$

3、(C)　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n\theta}{n}=$？ (A)1 (B)$-1$ (C)0 (D)$\dfrac{1}{2}$ (E)$-\dfrac{1}{2}$

解析：$\because |\sin n\theta|\le 1$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n\theta}{n}=0$

4、(E)　試求 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+1)^{100}-1}{x+2}=$ ？ (A)100 (B)99 (C)98 (D)97 (E)-100

解析：$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+1)^{100}-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)[(x+1)^{99}-(x+1)^{98}+(x+1)^{97}-\cdots-1]}{x+2}$

$$=\lim_{x\to(-2)}[(x+1)^{99}-(x+1)^{98}+\cdots-1]$$

$$=(-1)^{99}-(-1)^{98}+\cdots+(-1)=-100$$

5、(E)　設 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+4x+3}-ax-b)=-3\sqrt{2}$，求 $a+b=$ ？

(A)0 (B)$\sqrt{2}$ (C)$3\sqrt{2}$ (D)$4\sqrt{2}$ (E)$5\sqrt{2}$

解析：$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+4x+3}-ax-b)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^2+4x+3)-(ax+b)^2}{\sqrt{2x^2+4x+3}+(ax+b)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-a^2)x^2+(4-2ab)x+(3-b^2)}{\sqrt{2x^2+4x+3}+(ax+b)}$$

$$=-3\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}2-a^2=0,\quad \therefore a=\sqrt{2}\ \ (-\sqrt{2}\text{不合})\\ \dfrac{4-2ab}{2\sqrt{2}}=-3\sqrt{2}\end{cases}$$

$\therefore a=\sqrt{2}$，$b=4\sqrt{2}$，$\therefore a+b=5\sqrt{2}$

6、(A)　求 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1-(1-h)^2}{\sqrt{h}}=$ ？ (A)0 (B)1 (C)-1 (D)$\dfrac{1}{2}$ (E)不存在

$\boxed{\text{解析}}$：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-(1-h)^2}{\sqrt{h}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-(1-2h+h^2)}{\sqrt{h}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h-h^2}{\sqrt{h}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2h-h^2)\sqrt{h}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(2-h)\sqrt{h}=0$

7、(E) 設a，$b\in\mathbb{R}$且$a>0$，若$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+bx+3b}{x-a}=8$，求$a=$？ (A)1 (B)2 (C)4 (D)5 (E)6

$\boxed{\text{解析}}$：由題意$x^2+bx+3b=(x-a)(x-\dfrac{3b}{a})\Rightarrow a+\dfrac{3b}{a}=-b$

且$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+bx+3b}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x-\dfrac{3b}{a})=8$，$\therefore a-\dfrac{3b}{a}=8$

解得$a=6$或-4，$\because a>0$，$\therefore a=6$

8、(BCE) (複選)函數 $f(x)=\begin{cases}2x-3, & x<-1\\ -4, & x=-1\\ x^2+4x-2, & -1<x\le 1\\ x^3+3x-1, & x>1\end{cases}$，則下列何者為真？ (A)$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=-4$

(B)$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=-5$ (C)$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$ (D)$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$ (E)$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=13$

$\boxed{\text{解析}}$：(A) $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=(-1)^2+4(-1)-2=-5$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2\cdot(-1)-3=-5$，$\therefore\lim\limits_{x\to -1}f(x)=-5$

(C)$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1+3-1=3$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1+4-2=3$，$\therefore\lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$

(E)$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=8+6-1=13$

9、(A) 設函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+x-4a-2}{x-2}, & x\ne 2\\ -11, & x=2\end{cases}$，若$f(x)$在$x=2$是連續的，求$a=$？

(A)-3 (B)-2 (C)0 (D)2 (E)3

$\boxed{\text{解析}}$：依題意 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax^2+x-4a-2}{x-2}=-11$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(ax+2a+1)}{x-2}=-11$，$\therefore 2a+2a+1=-11$，$\therefore a=-3$

10、(E) 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{[x+1]-x}{x-[x]}=$？ (A)1 (B)0 (C)$-1$ (D)-2 (E)不存在

$\boxed{\text{解析}}$：$\because\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{[x+1]-x}{x-[x]}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3-x}{x-2}$不存在，且$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{[x+1]-x}{x-[x]}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-x}{x-1}=0$

$\therefore\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{[x+1]-x}{x-[x]}$不存在

11、(E) 設$f(x)=|x^2-3x|$，求$f'(0)=$？ (A)-3 (B)0 (C)3 (D)-1 (E)不存在

$\boxed{\text{解析}}$：

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x^2-3x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3x-x^2}{x}=3\\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x^2-3x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2-3x}{x}=-3\end{array}\right\}\therefore f'(0)\text{不存在}$$

12、(D) 若 $f(x)=x^3$，求 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}=$？ (A)0 (B)2 (C)4 (D)6 (E)12

$\boxed{\text{解析}}$：$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}=2f'(1)=2\cdot3=6$

13、(C) 設 $f(x)=\sqrt{ax^2-1}$，若 $f'(1)=2$，求 $a=$？

(A)$\dfrac{1}{2}$ (B)1 (C)2 (D)$\dfrac{1}{4}$ (E)4

$\boxed{\text{解析}}$：$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{ax^2-1}-\sqrt{a-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(ax^2-1)-(a-1)}{(x-1)(\sqrt{ax^2-1}+\sqrt{a-1})}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{a(x+1)}{(\sqrt{ax^2-1}+\sqrt{a-1})}=\frac{2a}{2\sqrt{a-1}}=2\Rightarrow a=2$$

14、(E) 若 $f(2)=3,\ \ f'(2)=5$，則 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+3h)-f(2-h)}{h}$ 之值爲何？

(A)4 (B)8 (C)12 (D)16 (E)20

$\boxed{\text{解析}}$：$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+3h)-f(2-h)}{h}=4\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+3h)-f(2-h)}{4h}=4\cdot f'(2)=20$

15、(B) 設 $a>0$，過 $P(0,\ a)$ 作一直線垂直於拋物線 Γ：$x^2=2y$ 的對稱軸，交 Γ 於 A,B 兩點，過 A,B 分別作 Γ 的切線，若此二切線互相垂直，則 a 之值爲何？

(A)$\dfrac{1}{4}$ (B)$\dfrac{1}{2}$ (C)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D)2 (E)1

$\boxed{\text{解析}}$：設 $A=(\sqrt{2a},a),B=(-\sqrt{2a},a)$

$$\therefore m_1=f'(\sqrt{2a})=\lim_{x\to\sqrt{2a}}\frac{\frac{x^2}{2}-a}{x-\sqrt{2a}}=\lim_{x\to\sqrt{2a}}\frac{\frac{1}{2}(x+\sqrt{2a})(x-\sqrt{2a})}{x-\sqrt{2a}}=\sqrt{2a}$$

$$m_2=f'(-\sqrt{2a})=\lim_{x\to-\sqrt{2a}}\frac{\frac{x^2}{2}-a}{x+\sqrt{2a}}=-\sqrt{2a}$$

$\because L_1$ 與 L_2 垂直，$\therefore\sqrt{2a}\cdot(-\sqrt{2a})=-1\Rightarrow2a=1,\ \therefore a=\dfrac{1}{2}$

16、(A) 函數 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+cx+d$，若滿足 $f(2x+1)=4g(x)$, $f'(x)=g'(x)$ 且 $f(5)=30$，則 $g(4)=$？ (A)$\dfrac{47}{2}$ (B)$\dfrac{45}{2}$ (C)$\dfrac{43}{2}$ (D)$\dfrac{41}{2}$ (E)$\dfrac{39}{2}$

$\boxed{\text{解析}}$：

$$\left.\begin{array}{l}f(2x+1)=(2x+1)^2+a(2x+1)+b\\ \qquad\qquad\ \ =4x^2+(4+2a)x+(1+a+b)\\ 4g(x)=4x^2+4cx+4d\end{array}\right\}\begin{array}{l}4+2a=4c\\ 1+a+b=4d\end{array}$$

$\because\ f'(x)=g'(x)\Rightarrow 2x+a=2x+c\Rightarrow a=c$，$\therefore a=2,\ c=2$

又 $f(5)=25+5a+b=30\Rightarrow b=-5\Rightarrow d=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore g(4)=16+4c+d=24-\dfrac{1}{2}=\dfrac{47}{2}$

17、(C) 設 $f(x)=\sqrt{x^4+3}$，求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-1}{x-1}=$？ (A)$\dfrac{9}{2}$ (B)$\dfrac{7}{2}$ (C)$\dfrac{5}{2}$ (D)$\dfrac{3}{2}$ (E)$\dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{解析}}$： $f'(x)=\dfrac{1}{2}(x^4+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4x^3=2x^3(x^4+3)^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow f''(x)=6x^2(x^4+3)^{-\frac{1}{2}}+2x^3\cdot(-\dfrac{1}{2})(x^4+3)^{-\frac{3}{2}}\cdot 4x^3$

又 $f'(1)=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=f''(1)=6\cdot 2^{-1}+2\cdot(-\dfrac{1}{2})(\dfrac{1}{8})\cdot 4=3-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

18、(B) 設 $f(x)$ 爲一個三次多項式，且 $f(0)=1,\ \ f(1)=2,\ \ f'(0)=f'(1)=0$，求 $f'(2)=$？

(A)-24 (B)-12 (C)0 (D)12 (E)24

$\boxed{\text{解析}}$：令 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，則 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

依題意 $\begin{cases} d=1 \\ a+b+c+d=2 \\ c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}$ 解得 $a=-2$，$b=3$，$c=0$，$d=1$

$\therefore f'(2)=12a+4b+c=-24+12=-12$

二、填充題(每題 10 分)

1、 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}=$________。

$\boxed{\text{答案}}$：$\dfrac{1}{4}$

$\boxed{\text{解析}}$：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{n(n+1)}{2})^2}{n^4}=\dfrac{1}{4}$

2、 設 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2+1}{n+1}-an+b)=2$，求數對 $(a,\ b)=$________。

$\boxed{\text{答案}}$：(1, 3)

$\boxed{\text{解析}}$：$\because \lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2+1}{n+1}-an+b)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-a)n^2+(b-a)n+b+1}{n+1}=2$

$\therefore 1-a=0$ 且 $b-a=2$，$\therefore a=1$，$b=3$

3、 設 $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-x-2}$，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$ 且 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$，求 $(a,\ b,\ c,\ d)=$________。

$\boxed{\text{答案}}$：$(0,\ 2,\ 1,\ -10)$

$\boxed{解析}$：由題意 $a=0$，$b=2$，且 $f(x)=\dfrac{(x-2)(2x-\frac{d}{2})}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{2x-\frac{d}{2}}{x+1}$

$\because \lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$，$\therefore \dfrac{4-\frac{d}{2}}{3}=3$，$\therefore d=-10$，比較係數 $c=1$

4、 若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(a+1)x+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}=4$，求數對 $(a,\ b)=$________。

$\boxed{答案}$：$(1,-2)$

$\boxed{解析}$：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(a+1)x+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[(a+1)x+b](\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}{(3x+1)-(x+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[(a+1)x+b](\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}{2(x-1)}=4$

$\because \lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})=4 \Rightarrow \begin{cases} a+1=2 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow a=1,\ b=-2$

5、 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+3$ 且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=4$，求 $a+b-c=$________。

$\boxed{答案}$：7

$\boxed{解析}$：由題意 $ax^3+bx^2+cx+3=(x-1)^2(ax+3)$

$\because \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=4 \Rightarrow a+3=4$，$\therefore a=1$

比較係數得 $b=1,\ c=-5$，$\therefore a+b-c=7$

5、 求 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{8-x}{\sqrt[3]{x}-2}=$________。

$\boxed{答案}$：-12

$\boxed{解析}$：$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{8-x}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{(8-x)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8}=-12$

6、 若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+ax+b}=\dfrac{3}{7}$，求 $a-b=$________。

$\boxed{答案}$：13

$\boxed{解析}$：設 $x^2+ax+b=(x-2)(x-\frac{b}{2}) \Rightarrow 2+\dfrac{b}{2}=-a$

又 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+ax+b}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-\frac{b}{2}}=\dfrac{3}{7}$

$\therefore \dfrac{2+1}{2-\frac{b}{2}}=\dfrac{3}{7} \Rightarrow b=-10$，$\therefore a=3$

7、 $\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{1}{x^2-x-2}-\dfrac{1}{2x^2-5x+2})=$________。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{1}{9}$

解析：$\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{1}{x^2-x-2}-\dfrac{1}{2x^2-5x+2})=\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}-\dfrac{1}{(x-2)(2x-1)})$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+1)(2x-1)}=\dfrac{1}{9}$

8、 若$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a\sqrt{x^2+3}-b}{x-1}=2$，求$a-b=$________。

答案：-4

解析：依題意，令 $f(x)=a\sqrt{x^2+3}-b$ ，則 $f(1)=2a-b=0\Rightarrow b=2a$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a\sqrt{x^2+3}-2a}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x^2+3-4)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\dfrac{2a}{4}=2$

$\therefore a=4,\ b=8$

9、設 $f(x)$ 爲三次多項式函數，若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x(x-1)}=1$ 且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x(x-1)}=2$，則$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x(x-1)}=$？

答案：令 $f(x)=x(x-1)(ax-b)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x(x-1)}=1\Rightarrow -b=1,\ \therefore b=-1$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x(x-1)}=2\Rightarrow a-b=2,\ \therefore a=1$

$\therefore\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x(x-1)}=3+1=4$

10、設$a,b,c\in\mathbb{Z}$且 $f(x)=x^3+(2a-1)x^2+bx+c$ 滿足下列二條件

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{x^3+1}=\dfrac{1}{3}$, (2)方程式 $f(x)=0$ 有虛根，求數對$(a,b,c)=$？

答案：依題意 $f(-1)=-1+2a-1-b+c=0\Rightarrow 2a-b+c=2$

$\therefore f(x)=x^3+(2a-1)x^2+bx+c=x^3+(b-c+1)x^2+bx+c$

$=(x+1)(x^2+bx-cx+c)$

$\because\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{x^3+1}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^2+bx-cx+c)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\dfrac{1-b+c+c}{1+1+1}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow b=2c$

$\because x^2+bx-cx+c=0$有虛根$\Rightarrow x^2+cx+c=0$有虛根

$\therefore c^2-4c<0,\ 0<c<4,\quad\therefore c=1$ 或 2 或 3

(i)若$c=1$，則 $b=2\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$ （不合）

(ii)若$c=2$，則 $b=4\Rightarrow a=2$

(iii)若$c=3$，則 $b=6\Rightarrow a=\dfrac{5}{2}$ （不合）

$\therefore(a,b,c)=(2,4,2)$

11、設 $f(x)$ 爲三次式且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-3x+2}=-1$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x^2-3x+2}=2$，求 $f(x)=$？

答案：令 $f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$

$\because \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-3x+2}=-1$, $\therefore a+b=-1$

$\because \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x^2-3x+2}=2$, $\therefore 2a+b=2$　解得　$a=3$, $b=-4$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(3x-4)$

12、求下列各極限值

(1) $a>0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a-x}-\sqrt{a+x}}{x}=$？　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+a-\sqrt{b+x^2})=$？

$\boxed{答案}$：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a-x}-\sqrt{a+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{x(\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x})}=\dfrac{-2}{2\sqrt{a}}=\dfrac{-1}{\sqrt{a}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+a-\sqrt{b+x^2})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2ax+a^2-(b+x^2)}{(x+a)+\sqrt{b+x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2ax+a^2-b}{(x+a)+\sqrt{b+x^2}}=\dfrac{2a}{2}=a$

13、函數 $f(x)=\begin{cases}4x-5, & x<1\\ 3, & x=1\\ ax+2, & x>1\end{cases}$，若 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=k$，則

(1) (　　) $a=$？ (A) -4　(B) -3　(C) 0　(D) 1　(E) 2

(2) (　　) $k=$？ (A) -5　(B) -3　(C) -1　(D) 1　(E) 3

$\boxed{答案}$：(1) (B)　(2) (C)

$\boxed{解析}$：(1) $\because \lim\limits_{x\to 1}f(x)=k$　（存在），　$\therefore \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=4-5=-1$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=a+2$，

$\therefore a+2=-1$, $\therefore a=-3$

(2) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-1$

14、 設 $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{3x^2+x}}$，求 $f'(1)=$______。

$\boxed{答案}$：$-\dfrac{13}{16}$

$\boxed{解析}$： $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{x+2}{\sqrt{3x^2+x}}-\dfrac{3}{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x+2)-3\sqrt{3x^2+x}}{2(x-1)\sqrt{3x^2+x}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(23x+16)}{2\sqrt{3x^2+x}(2(x+2)+3\sqrt{3x^2+x})}=\dfrac{-39}{2\cdot 2\cdot 12}=-\dfrac{13}{16}$

15、自點 $P(2,0)$作 $y=x^2-x-2$的切線，則其切線方程式爲______，切點爲______。

$\boxed{答案}$：$3x-y-6=0$；$(2,0)$

$\boxed{解析}$：$m=f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)-0}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$，

$\therefore$切線：$y-0=3(x-2)\Rightarrow 3x-y-6=0$,切點$(2,0)$

16、自點 $P(2,-2)$ 向曲線 $y=x^3-3x+4$所作的切線方程式爲______。

$\boxed{答案}$：$3x+y=4$ 或 $24x-y=50$

解析：設切點坐標爲 $P'(t,\ t^3-3t+4)$

$$f'(t)=\lim_{x\to t}\frac{(x^3-3x+4)-(t^3-3t+4)}{x-t}=\lim_{x\to t}(x^2+tx+t^2-3)=3t^2-3$$

∴過 P' 之切線方程式爲 $y-(t^3-3t+4)=(3t^2-3)(x-t)$

以 $(2,-2)$ 代入 $-2-t^3+3t-4=(3t^2-3)(2-t)$,解得 $t=0$ 或 3

∴切線方程式爲 $y-4=-3x$ 或 $y-22=24(x-3)$

17、 設 $f(x)$ 爲可微分函數，若 $f(1)=a$， $f'(1)=b$ ($a,b\in\mathbb{R}$)，則

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}=$______。（以 a,b 表示）

答案：$2a-2b$

解析：

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(1)-(f(x^2)-f(1))}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)f(1)-(x+1)f'(1)$$

$$=2f(1)-2f'(1)=2a-2b$$

18、 設 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$， $a>0$，過 $P(\frac{a}{9},\frac{4}{9}a)$ 的切線方程式爲____________________。

答案： $2x+y=\dfrac{2}{3}a$

解析：∵ $\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}$， ∴ $y=f(x)=a+x-2\sqrt{ax}$

$$f'(\frac{a}{9})=\lim_{x\to\frac{a}{9}}\frac{(a+x-2\sqrt{ax})-(a+\frac{a}{9}-\frac{2a}{3})}{x-\frac{a}{9}}=\lim_{x\to\frac{a}{9}}\frac{(x+\frac{5a}{9}-2\sqrt{ax})(x+\frac{5a}{9}+2\sqrt{ax})}{(x-\frac{a}{9})(x+\frac{5a}{9}+2\sqrt{ax})}$$

$$=\lim_{x\to\frac{a}{9}}\frac{x-\frac{25}{9}a}{x+\frac{5}{9}a+2\sqrt{ax}}=-2$$

∴切線方程式爲 $y-\dfrac{4}{9}a=-2(x-\dfrac{a}{9})$

19、設 $f(x)=\dfrac{x\cdot|2x-4|}{|x|-2}$，求 $f'(3)=$______。

答案：2

解析：

$$f'(3)=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{x(2x-4)}{x-2}-6}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{2(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)}=2$$

20、設 $f(x)=\begin{cases}3x^2, & x\le1\\ 2x^3+1, & x>1\end{cases}$，求 $f'(1)=$______。

答案：6

解析： $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\therefore\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2x^3+1-3}{x-1}=\lim_{x\to1^+}2(x^2+x+1)=6$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{3x^2-3}{x-1}=\lim_{x\to1^-}3(x+1)=6$$

$\therefore\ f'(1)=6$

21、設 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$ 且 $f'(1)$ 存在，求 $a-b=$______。

答案：3

解析：$f'(1)=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\because \lim_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\dfrac{(ax+b)-(a+b)}{x-1}=a$

$\lim_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，$\therefore a=2$

又 $a+b=1,\ \therefore b=-1\Rightarrow a-b=3$

22、已知 $f'(x)$ 爲 $f(x)$ 的導函數且 $f'(5)=3$，則 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(5+h)-f(5-h)}{h}=$______。

答案：6

解析：$\lim_{h\to0}\dfrac{f(5+h)-f(5-h)}{h}=2\lim_{h\to0}\dfrac{f(5+h)-f(5-h)}{2h}=2f'(5)=6$

23、有一運動質點的位移函數爲 $f(t)=\dfrac{1}{3}t^3+2$，試求此質點在時刻 3 的瞬時速度。

答案：所求之瞬時速度爲 $f'(3)=\lim_{t\to3}\dfrac{(\frac{1}{3}t^3+2)-(\frac{1}{3}\cdot3^3+2)}{t-3}$

$$=\lim_{t\to3}\frac{t^3-3^3}{3(t-3)}=\lim_{t\to3}\frac{t^2+3t+9}{3}=\frac{9+9+9}{3}=9$$

24、設曲線Γ：$y=x^3-3x^2-3x+1$，在曲線上 P 點的切線斜率最小，則曲線在 P 點的切線方程式爲______。

答案：$6x+y-2=0$

解析：$y=f(x)=x^3-3x^2-3x+1\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x-3=3(x-1)^2-6$

$\therefore$當 $x=1$ 時切線斜率最小値爲 -6，又 $f(1)=-4$，$\therefore$切線方程式爲 $y+4=-6(x-1)$

25、試求在 $y=\sqrt{x^2-16}$ 的圖形上以(5,3)爲切點的切線方程式。

答案：切線之斜率爲 $\lim_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x^2-16}-\sqrt{5^2-16}}{x-5}=\lim_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x^2-16}-3}{x-5}$

$$=\lim_{x\to5}\frac{(\sqrt{x^2-16}-3)(\sqrt{x^2-16}+3)}{(x-5)(\sqrt{x^2-16}+3)}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(\sqrt{x^2-16}+3)}$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{x+5}{\sqrt{x^2-16}+3}=\frac{5+5}{3+3}=\frac{5}{3}$$

切線之方程式爲 $y-3=\dfrac{5}{3}(x-5)$，即 $5x-3y-16=0$

26、設 $f(x)=(x-1)^2(x+3)^4(x-3)^3$，若 $f'(x)=(x-1)(x+3)^3(x-3)^2(ax^2+bx+c)$

則 $a-b+c=$_______。

$\boxed{答案}$：4

$\boxed{解析}$： $f(x)=(x-1)^2(x+3)^4(x-3)^3$

$$f'(x)=2(x-1)(x+3)^4(x-3)^3+4(x+3)^3(x-1)^2(x-3)^3+3(x-3)^2(x-1)^2(x+3)^4$$
$$=(x-1)(x+3)^3(x-3)^2[2(x+3)(x-3)+4(x-1)(x-3)+3(x-1)(x+3)]$$
$$=(x-1)(x+3)^3(x-3)^2(9x^2-10x-15)$$

$\therefore a=9$， $b=-10$， $c=-15$

27、設 $f(x)=(2x-1)^2(x^2+4)$ ，求 $f'(x)=$_______。

$\boxed{答案}$： $2(2x-1)^2(x^2+2)^3(11x^2-4x+6)$

$\boxed{解析}$： $f(x)=(2x-1)^2(x^2+4)$

$$\Rightarrow f'(x)=2(2x-1)\cdot 2(x^2+4)+(2x-1)^2\cdot 2x$$
$$=4(2x-1)(x^2+4)+2x(2x-1)^2$$
$$=2(2x-1)(2x^2+8+2x^2-x)$$
$$=2(2x-1)(4x^2-x+8)$$

28、設 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ 且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=3$ ，求 $f'(1)=$_______。

$\boxed{答案}$：3

$\boxed{解析}$：$\because \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=3$（存在）

$\therefore x-1 \mid f(x)\Rightarrow f(1)=0$

$\therefore f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=3$

29、雙曲線 Γ：$xy=3$ 上有一點 $P(3,1)$ ，求通過 P 點之切線方程式為_______。

$\boxed{答案}$： $x+3y-6=0$

$\boxed{解析}$：令 $y=f(x)=\dfrac{3}{x}\Rightarrow f'(x)=-3x^{-2}$， $\therefore f'(3)=-\dfrac{1}{3}$ ，$\therefore$切線方程式為 $y-1=-\dfrac{1}{3}(x-3)$

30、設 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}}{x^2+1}$ ，求 $f'(x)=$_______。

$\boxed{答案}$： $\dfrac{-2x^3-3x^2-6x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}(x^2+1)^2}$

$\boxed{解析}$： $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}}{x^2+1}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(x^2+1)\cdot\frac{1}{2}(x^2+x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+1)-\sqrt{x^2+x+2}\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^3-3x^2-6x+1}{2(x^2+1)^2\cdot\sqrt{x^2+x+2}}$$

31、設曲線 $y=f(x)=x^3-4x$，若直線 L 過 $(1,1)$ 且曲線 $y=f(x)$ 相切於點___________，則直線 L 的方程式為_______。

$\boxed{答案}$： $x+y-2=0$

$\boxed{解析}$：設切點點(t, t^3-4t)，$\because f(x)=x^3-4x$，$\therefore f'(x)=3x^2-4$，$\therefore f'(t)=3t^2-4$

$\Rightarrow$切線方程式：$y-(t^3-4t)=(3t^2-4)(x-t)$，$(1, 1)$ 代入解得 $t=-1$，

$\therefore L$：$y-3=-(x+1)$

32、設 $f(x)$ 爲可微分函數滿足 $f(4)=1,\ f'(4)=2$，則$\displaystyle\lim_{x\to 2}=\frac{x^2 f(4)-4f(x^2)}{x^2-4}=$________。

$\boxed{答案}$：-7

$\boxed{解析}$：$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2 f(4)-4f(x^2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2 f(4)-4f(4)-(4f(x^2)-4f(4))}{x^2-4}$

$\displaystyle=f(4)-4\lim_{x\to 2}\frac{(f(x^2)-f(4))}{x^2-4}=f(4)-4f'(4)=1-8=-7$

33、設 $f(x)=x^3-2x^2+5x-1$，求$\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f'(x)-f'(3)}{x-3}=$________。

$\boxed{答案}$：14

$\boxed{解析}$：$f(x)=x^3-2x^2+5x-1\Rightarrow f'(x)=3x^2-4x+5\Rightarrow f''(x)=6x-4$

$\displaystyle\therefore\lim_{x\to 3}\frac{f'(x)-f'(3)}{x-3}=f''(3)=14$

34、設 $f(x)=(2x^3-x^2+3)^3$，試求 $f'(x),\ f'(-1)$。

$\boxed{答案}$：$f'(x)=3(2x^3-x^2+3)^2\cdot(6x^2-2x)=6x(2x^3-x^2+3)^2(3x-1)$

$f'(-1)=6\cdot(-1)(-2-1+3)^2\cdot(-3-4)=-6\cdot 0\cdot(-7)=0$

35、設 $f(x)=(x^3+3x)^2(2x+1)$，求 $f'(x)=$？ $f'(0)=$？

$\boxed{答案}$：$\because f(x)=(x^3+3x)^2(2x+1)$

$\therefore f'(x)=((x^3+3x)^2)'(2x+1)+(x^3+3x)^2(2x+1)'$

$=2(x^3+3x)(2x+1)(3x^2+3)+2(x^3+3x)^2$

$=(x^3+3x)(14x^3+6x^2+18x+6)$

$\therefore f'(0)=0$

36、設Γ_1: $y=x^3$，Γ_2: $y=x^2+2x$。若Γ_1與Γ_2在第一象限之交點爲 A，以 A 爲切點分別作Γ_1，Γ_2之切線，令二切線所夾的銳角爲θ，求 $\tan\theta=$？

$\boxed{答案}$：解$\begin{cases} y=x^3 \\ y=x^2+2x \end{cases}$ 且$x>0,\ y>0$，得$(x,y)=(2,8)$

$y=x^3\Rightarrow y'=3x^2$，則過 $(2,8)$ 切線斜率爲 12

$y=x^2+2x\Rightarrow y'=2x+2$，則過 $(2,8)$ 切線斜率爲 6，$\therefore\tan\theta=\dfrac{12-6}{1+12\times 6}=\dfrac{6}{73}$

37、試求曲線 $y=x^4-8x^3+24x^2-34x+25$ 在 $x=3$ 處的切線方程式。

$\boxed{答案}$：由綜合除法

1	-8	$+24$	-34	$+25$	3
	$+3$	-15	$+27$	-21	
1	-5	$+9$	-7	$+4$	
	$+3$	-6	$+9$		
1	-2	$+3$	$+2$		

得所求之切線方程式為 $y=2(x-3)+4$，即 $y=2x-2$

38、二曲線 Γ_1: $y=x^2+ax+b$ 與 Γ_2: $y=-x^3+c$ 在點 $(1,-2)$ 相切且有公切線，求（1）$a+b+c=$_______。（2）公切線的方程式為_______。

答案：（1）-4　　　（2）$3x+y=1$

解析：（1）$y=x^2+ax+b \Rightarrow y'=2x+a$

$y=-x^3+c \Rightarrow y'=-3x^2$

依題意：$\begin{cases}1+a+b=-2\\-1+c=-2\\2+a=-3\end{cases}$　解得 $c=-1$，$a=-5$，$b=2 \Rightarrow a+b+c=-4$

（2）公切線方程式為 $y+2=-3(x-1)$