高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：98.04.23					
範圍	選修(Ⅱ)2-1.2-3 多項函數的圖形與極值	班級	三年　　班	姓名	
		座號			

2-1-1. 討論函數 $f(x)=x^3-3x^2-9x+6$ 的遞增與遞減的區間。

解：$\because f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$

(1) 當 $x<-1$，$f'(x)>0$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上爲遞增函數

(2) 當 $-1<x<3$，$f'(x)<0$

$\therefore f(x)$ 在 $[-1,3]$ 爲遞減函數

(3) 當 $x>3$，$f'(x)>0$

$\therefore f(x)$ 在 $[3,\infty)$ 爲遞增函數

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	11	↘	-21	↗

2-1-2. 設 $f(x)=x^3-ax^2+3x+7$ 在實數 R 上爲遞增函數，試求 a 值的範圍。

解：$f'(x)=3x^2-2ax+3$

$\because f(x)$在 R 上爲遞增函數

$\because \forall x\in R$，$f'(x)=3x^2-2ax+3\geq 0$ 恆成立

$\therefore$ 二次函數 $f'(x)=3x^2-2ax+3$ 的判別式 $(-2a)^2-4\times3\times3\leq 0$

$\Rightarrow a^2-9\leq 0 \Rightarrow (a-3)(a+3)\leq 0 \Rightarrow -3\leq a\leq 3$

2-1-3. 討論函數 $f(x)=x^3-3x^2+2$ 圖形的遞增、遞減及凹向性。

解：$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$ 或 2

$f''(x)=6x-6=6(x-1)$

$\therefore$ 在區間 $(-\infty,0]$,$[2,\infty)$ 爲遞增函數

在區間 $[0,2]$ 爲遞減函數

在區間 $[1,\infty)$，凹口向上

在區間 $(-\infty,1]$，凹口向下

x		0		1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↗	2	↘	0	↘	-2	↗

2-1-4. 承上題，此函數反曲點的坐標爲何？

解：令 $f''(x)=6x-6=0$　$\therefore x=1$ 代入得 $y=1-3+2=0$

$\therefore$ 反曲點坐標爲 $(1,0)$

2-1-5. 某公司生產 x 單位產品的成本爲 $C(x)=x^3-6x^2+9x+300$ (萬元) 其中 $x\geq 1$，求生產成本在何種範圍內爲遞減？

解：$C'(x)=3x^2-12x+9=3(x-3)(x-1)$

當 $1\leq x\leq 3$ 時，$C'(x)\leq 0$

$\therefore$ 在區間 $[1,3]$ 時，生產成本是遞減

2-1-6. 描繪函數 $f(x)=x^3+3x^2+1$ 之圖形。

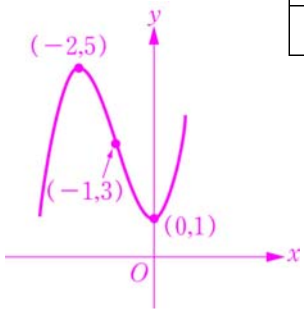
解：$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f''(x)=6x+6$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$ 或 -2

令 $f''(x)=0 \Rightarrow x=-1$

x		-2		-1		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$



2-1-7. 某公司生產某產品，生產 x 單位的成本為 $C(x)=-x^3+ax^2+bx+200$ (萬元)，$x\geq 1$，且知 $C(x)$ 在區間〔2 , 4〕為遞增函數，則 $a=$ __9__ ，$b=$ __-24__ 。

解：$\because f'(x)=-3x^2+2ax+b=-3(x-2)(x-4)=-3x^2+18x-24$

$\therefore a=9$，$b=-24$

2-1-8. 函數 $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$ 的圖形的反曲點坐標為 __(1 , 0)__ ，過反曲點的切線為 __$y=0$__ 。

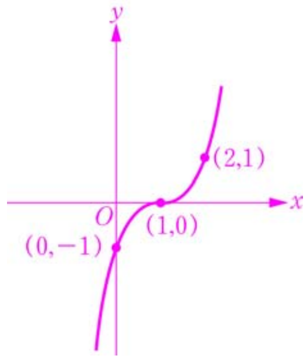
解：$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

令 $f''(x)=6x-6=6(x-1)=0 \Rightarrow x=1$

$\therefore$ 反曲點 (1 , 0)

過反曲點的切線為水平切線 $y=0$

($\because f'(1)=0$，斜率為 0)



2-2-1. 試討論函數 $f(x)=x^3-3x+4$，在區間〔-3 , 3〕的極值可能出現在 x 為多少時？

解：$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$

當 $f'(x)=0$ 時，$x=1$ 或 -1

$\therefore f(x)$ 的極值可能出現在 $x=1$，-1 及端點 $x=-3$，3

2-2-2. 試求函數 $f(x)=x^4-2x^2+3$ 在區間〔-2 , 2〕的極大值與極小值。

解：$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

當 $f'(x)=0$，$x=-1$，0，1；而 $x=-2$，2 為 $f(x)$ 的端點所在

x	-2		-1		0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	11	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	11

$\therefore f(-2)=11$ 為極大值，$f(-1)=2$ 為極小值，$f(0)=3$ 為極大值

$f(1)=2$ 為極小值，$f(2)=11$ 為極大值

2-2-3. 承上題，求函數 $f(x)$ 在區間〔-2 , 2〕的最大值與最小值。

解：所有極值中最大者為最大值 11

所有極值中最小者為最小值 2

2-2-4. 試求函數 $f(x)=-x^2+4x+5$ 在區間〔0 , 3〕之極值。

解：$f'(x)=-2x+4=-2(x-2)$，$f''(x)=-2$

又 $f'(x)=0$ 時，$x=2$，

又 $f''(2)=-2<0$

x	0		2		3
$f'(x)$		+	0	−	
$f''(x)$			−		
$f(x)$	5	↗	9	↘	8

$\therefore f(0)=5$ 為極小值，$f(2)=9$ 為極大值，$f(3)=8$ 為極小值

2-2-5. 函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，$x\in R$，若 $f(x)$ 在 $x=1$ 有極大值 8，在 $x=3$ 有極小值，求 a，b，c 之值。

解：$f'(x)=3x^2+2ax+b$，$f''(x)=6x+2a$

$\because f(x)$ 在 $x=1$ 與 $x=3$ 處有極值

$$\therefore \begin{cases} f'(1)=3+2a+b=0 \\ f'(3)=27+6a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=9 \end{cases}$$

又 $f(1)=8$ $\quad\therefore 1-6+9+c=8$ $\quad\therefore c=4$

$\therefore a=-6$，$b=9$，$c=4$

2-2-6. 承上題之結果，求在函數圖形 $y=f(x)$ 上斜率最小的切線方程式為 <u>$3x+y=12$</u> 。

解：$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x)+9=3(x-2)^2-3$

$\therefore$ 斜率最小值為 -3，此時 $x=2$，$f(2)=2^3+(-6)\times 2^2+9\times 2+4=8-24+18+4=6$

$\therefore$ 切點為 $(2, 6)$

$\because$ 切線為 $y-6=-3(x-2) \Rightarrow y-6=-3x+6 \Rightarrow 3x+y=12$

2-2-7. 設 $f(x)=x^3+3x$，$x\in R$，求 $f(x)$ 的極大值與極小值。

解：$\because f'(x)=3x^2+3$

$\therefore f'(x)>0$，對所有實數 x 均成立

$\therefore f(x)$為一嚴格遞增函數，$\therefore$ 無極大值或極小值

2-2-8. 若函數 $f(x)=x^3+3ax^2+3(a+2)x+2$，$a\in R$，沒有極值，則 a 的範圍為 <u>$-1\le a\le 2$</u> 。

解：$f'(x)=3x^2+6ax+3(a+2)$

$\because f(x)$ 沒有極值

$\therefore f'(x)=0$ 沒有兩相異實根

$\therefore$ 判別式 $D=(6a)^2-4\times 3\times 3(a+2)\le 0$

$\Rightarrow a^2-a-2\le 0$

$\Rightarrow (a-2)(a+1)\le 0$

$\Rightarrow -1\le a\le 2$