高雄市明誠中學　高三平時測驗　　日期：98.04.09					
範圍	選修(Ⅱ) CHAP1 多項式的與導數	班級	普三　　班	姓名	
		座號			

1-1. 求下列各函數的定義域：

(1) $f(x)=\dfrac{2x}{(1-x)(3+x)}$。　　(2) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$。

【解答】:

(1) $(1-x)(3+x)\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$，$x\neq -3$，

$\therefore$ 定義域 $\{x \mid x\in R$，但 $x\neq 1$，$x\neq -3\}$

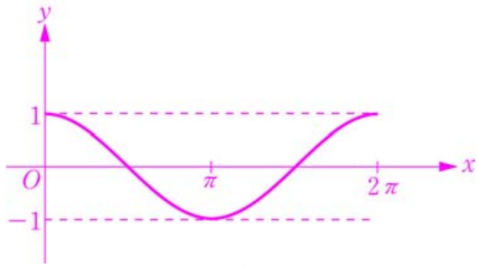
(2) $9-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2-9\leq 0 \Rightarrow (x-3)(x+3)\leq 0 \Rightarrow -3\leq x\leq 3$，

$\therefore$定義域 $\{x \mid -3\leq x\leq 3$，$x\in R\}$

1-2. (1) 請畫出餘弦函數 $y=\cos x$，$0\leq x\leq 2\pi$ 之圖形。

(2) 試寫出 $y=\cos x$ 在〔$0, 2\pi$〕內遞增及遞減的區間。

【解答】:(1)

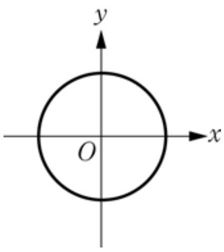


(2)〔$0,\pi$〕爲遞減

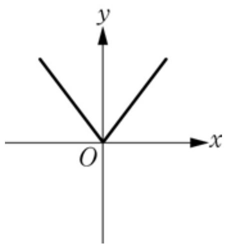
〔$\pi, 2\pi$〕爲遞增

1-3. (1) 下列的圖形，何者爲「y 是 x」的函數圖形？

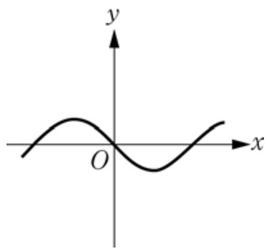
(A)



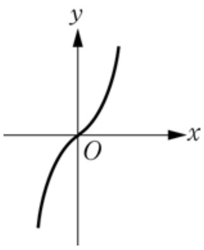
(B)



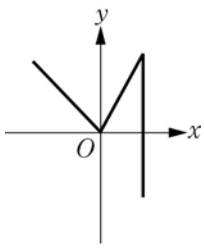
(C)



(D)



(E)



(2) 何者爲「y 是 x」的一對一函數圖形？

【解答】:

(1) 畫鉛直線與圖形恰好交於一點，$\therefore$ (B) (C) (D) 是函數圖形

(2) 畫水平線與圖形恰好交於一點，$\therefore$ (D) 是一對一函數圖形

1-4. (1) 試描出函數 $y=|x-1|+|x-3|$ 的圖形，並寫出折點的坐標。

(2) 求函數 y 的最小值爲何？

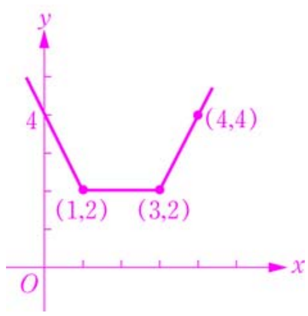
【解答】:

(1) 當 $x\geq 3$ 時，$y=(x-1)+(x-3)=2x-4$

當 $1\leq x\leq 3$ 時，$y=(x-1)-(x-3)=2$

當 $x\leq 1$ 時，$y=-(x-1)-(x-3)=-2x+4$

(2) 函數 y 的最小值爲 2



1-5. 設$G(x)=[x]$爲一高斯函數，

(1) 求 $[-2.1]+[0.28]+[\pi]+[-\frac{1}{2}]=$ __-1__ 。

(2) 若 $[x]=-5$，則實數x取值的範圍爲何？

【解答】:

(1) $[-2.1]+[0.28]+[\pi]+[-\frac{1}{2}]=-3+0+3+(-1)=-1$

(2) $[x]=-5$，則$-5\le x\le -5+1 \Rightarrow -5\le x<-4$

1-6. <u>台北市</u>的計程車跑了x公里，該付的車資爲$f(x)$元 (不計時)，

其中$f(x)=\begin{cases}70， & 0<x<1.5\\ 75+5[\frac{10}{3}x-5]， & x\ge 1.5 \ (\ [\quad]\ \text{是高斯符號})\end{cases}$。若<u>小麗</u>付了計程車資 200 元，請估計她搭乘計程車的里程數x約在哪個範圍？

【解答】:

$f(x)=75+5[\frac{10}{3}x-5]$

$\Rightarrow [\frac{10}{3}x-5]=\frac{200-75}{5}=25 \Rightarrow 25\le \frac{10}{3}x-5<26$

$\Rightarrow 75\le 10x-15<78 \Rightarrow 90\le 10x<93 \Rightarrow 9\le x<9.3$

1-7. 用 19.6 (公尺/秒) 的速度由地面垂直上拋一粒小石子，設 x 秒後小石子的高度爲 y 公尺，如果不計空氣阻力，x 與 y 有下列關係式：$y=19.6x-4.9x^2$，則：

(1) 小石子拋出多少秒後，達到最高點？最大高度爲何？

(2) 小石子拋出後，經過多少時間才落地？

【解答】:

(1) $y=19.6x-4.9x^2=-4.9(x^2-4x)=-4.9(x-2)^2+19.6$

$\therefore$ 經 2 秒可達最高點，高度爲 19.6 公尺

(2) $y=0$ 得 $19.6x-4.9x^2=0 \Rightarrow 4.9x(4-x)=0 \Rightarrow x=0$ 或 4，

$\therefore$ 小石子拋出後第 4 秒落回地面

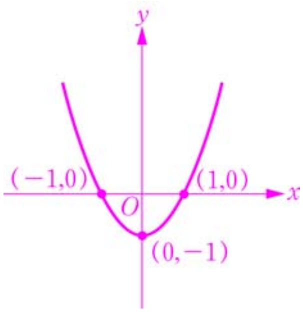
1-8. 設 $f(x)=x^2-1$，

(1) 描繪 $y=f(x)$ 之圖形。

(2) 求 $f(x)$ 在閉區間〔$-1, 4$〕上的最大值與最小值。

【解答】:

(1)



(2) $f(0)=-1$ 爲最小值

$f(4)=15$ 爲最大值

2-1.一質點在直線上運動，其位移與時間 t 的函數關係爲 $S(t)=2t^2+3t$，試求：

(1) 此質點在時間 $t=2$ 至 $t=4$ 之間的平均速度。

(2) 此質點在 $t=2$ 時的瞬時速度。

【解答】:

(1) $\bar{v}=\frac{S(4)-S(2)}{4-2}=\frac{44-14}{2}=15$

(2) $t=2$ 時的瞬時速度爲

$$v=\lim_{\triangle t\to 0}\bar{v}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle s}{\triangle t}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{S(2+\triangle t)-S(2)}{\triangle t}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{2(2+\triangle t)^2+3(2+\triangle t)-14}{\triangle t}$$
$$=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{11\triangle t+2(\triangle t)^2}{\triangle t}=11$$

2-2.函數 $f(x)=2x^2$ 的圖形上，以 $P(1,2)$ 爲切點的切線方程式斜率爲何？切線的方程式爲何？

【解答】：

(1) 切線的斜率 $m=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(1+\triangle x)-f(1)}{\triangle x}$
$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{2(1+\triangle x)^2-2}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{4\cdot\triangle x+2(\triangle x)^2}{\triangle x}=4$$

(2) 切線方程式 $y-2=4(x-1)\Rightarrow y=4x-2$

2-3.設 $f(x)=5$，則 $\lim_{x\to 3}f(x)=$ ___5___。

【解答】：

常數函數 $f(x)=5$ 的圖形爲一條水平直線　$\therefore \lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}5=5$

2-4.設 $f(x)=x-4$，$g(x)=\frac{x^2-6x+8}{x-2}$，則：(1) $\lim_{x\to 2}f(x)=$ ___-2___。(2) $\lim_{x\to 2}g(x)=$ ___-2___。

【解答】：

(1) $\lim_{x\to 2}f(x)=2-4=-2$

(2) $\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=-2$

2-5.設 $g(x)=[x]$（高斯函數），則：

(1) $\lim_{\triangle x\to 0^+}g(5+\triangle x)=$ ___5___。

(2) $\lim_{\triangle x\to 0^-}g(5+\triangle x)=$ ___4___。

(3) $\lim_{\triangle x\to 0}g(5+\triangle x)$ 是否存在？$\lim_{x\to 5}g(x)$ 是否存在？

【解答】：

(1) $\lim_{\triangle x\to 0^+}g(5+\triangle x)=\lim_{\triangle x\to 0^+}5=5$

(2) $\lim_{\triangle x\to 0^-}g(5+\triangle x)=\lim_{\triangle x\to 0^-}4=4$

(3) $\because \lim_{\triangle x\to 0^+}g(5+\triangle x)\neq\lim_{\triangle x\to 0^-}g(5+\triangle x)$

$\therefore \lim_{\triangle x\to 0}g(5+\triangle x)$ 不存在且 $\lim_{x\to 5}g(x)$ 不存在

2-6.求下列各式的極限值：

(1) $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^3-27}{|x-3|}=$ ___-27___。　　(2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+1}{x^2+2}=$ ___$\frac{-1}{3}$___。

【解答】：

(1) $\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{-(x-3)}=-(9+9+9)=-27$

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+1}{x^2+2}=\frac{1-3+1}{1+2}=\frac{-1}{3}$

2-7. 設 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ a, & x=1\end{cases}$，若 $f(x)$ 爲一連續函數，則 $a=$ ___2___。

【解答】：

$\because f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$，$x\neq 1$

欲使$f(x)$爲連續函數，則 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \Rightarrow 2=a$

2-8. 若極限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+a}{x-2}$ 存在，則$a=$ __-2__，此極限值爲__3__。

【解答】:

x^2-x+a有$x-2$之因式　$\therefore 4-2+a=0$　$\therefore a=-2$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$

3-1. 函數$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+3x$，請按以下程序求出導數$f'(2)$，

(1) 求出"y的差量"$\triangle y=f(2+\triangle x)-f(2)=$ __$\dfrac{1}{2}(\triangle x)^2+5\triangle x$__。

(2) 化簡"差商"$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=\dfrac{f(2+\triangle x)-f(2)}{\triangle x}=$ __$\dfrac{1}{2}\triangle x+5$__。

(3) 求出"極限"$f'(2)=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=$ __5__。

【解答】:

(1) $\triangle y=\dfrac{1}{2}(2+\triangle x)^2+3(2+\triangle x)-(\dfrac{1}{2}\times 2^2+3\times 2)=\dfrac{1}{2}(\triangle x)^2+5\triangle x$

(2) $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=\dfrac{1}{2}\triangle x+5$

(3) $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=5$

3-2. 請利用$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$(函數$y=f(x)$在$x=a$的導數)公式，求$f(x)=3x+5$在$x=2$的導數爲__3__。

【解答】:

$f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(3x+5)-(3\times 2+5)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3(x-2)}{x-2}=3$

3-3. 設$f(x)=x^5-3x^3+4x-7$，利用微分公式求：

(1) $f'(x)=$ __$5x^4-9x^2+4$__，$f'(1)=$ __0__。　　(2) $f''(x)=$ __$20x^3-18x$__，$f''(1)=$ __2__。

【解答】:

(1) $f'(x)=5x^4-9x^2+4$，$f'(1)=5-9+4=0$

(2) $f''(x)=20x^3-18x$，$f''(1)=20-18=2$

3-4. 設$P(x)=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-3x+7$，則$P'(0)=$ __-3__，$P''(2)=$ __20__。

【解答】:

$P'(x)=x^3+x^2+4x-3$　$\therefore P'(0)=-3$

$P''(x)=3x^2+2x+4$　$\therefore P''(2)=12+4+4=20$

3-5. 設Γ：$y=4x^2$，點$P(1,4)$在拋物線Γ上，求通過$P(1,4)$之切線L的方程式爲 $y=8x-4$ 。

【解答】：

過 $P(1,4)$ 之切線斜率爲 $f'(1)$

而 $f(x)=4x^2 \Rightarrow f'(x)=8x \quad \therefore f'(1)=8$

$\therefore$ 切線 L 之方程式爲 $y-4=8(x-1) \Rightarrow y=8x-4$

3-6. 有一運動質點的位移函數爲$S(t)=t^3+8t$，則此質點在時刻$t=3$的瞬時速度爲 35 。

【解答】：

$S'(t)=3t^2+8 \quad \therefore S'(3)=3\times 9+8=35$

3-7. 設二次函數$f(x)=2x^2-8x+3$之圖形爲Γ，則Γ的水平切線爲 $y=-5$ ，對應的切點爲 $(2,-5)$ 。

【解答】：

$f'(x)=4x-8$，令 $f'(x)=0$ (水平切線斜率爲 0) $\Rightarrow 4x-8=0 \Rightarrow x=2$

$\therefore x=2$ 代入得切點爲 $(2,-5)$，$\therefore$ 水平切線爲 $y=-5$

3-8.設$f(x)=(x^2-1)(x^3+2x+1)$，則$f'(x)=$ $5x^4+3x^2+2x-2$ ，$f'(2)=$ 94 。

【解答】：

$f(x)=g(x)\cdot h(x)$，則 $f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x)&=2x(x^3+2x+1)+(x^2-1)(3x^2+2)\\&=2x^4+4x^2+2x+3x^4+2x^2-3x^2-2\\&=5x^4+3x^2+2x-2\end{aligned}$$

$f'(2)=5\times 16+3\times 4+2\times 2-2=80+12+4-2=94$