

高雄市明誠中學 高三數學平時測驗					日期：98.02.19
範圍	選修(I)	班級	三年 班	姓	
	3-3 線性規劃(B)	座號		名	

一、填充題 (每題 10 分)

1. 汽車公司有 A 和 B 兩廠生產同規格汽車，其每天產量分別為 15 輛及 20 輛，該公司之二經銷站 M 與 N 每日需求分別為 10 輛及 25 輛，今公司欲擬最佳運輸計畫使每日總運費最低。已知每輛車之運費為：由 A 廠至 M 站 150 元，A 廠至 N 站 200 元，B 廠至 M 站 200 元，B 廠至 N 站 100 元，則其每日最低運費為何？

解答 4500 元

解析 設由 A 廠運 x 輛至 M，運 y 輛至 N；由 B 廠運 $10-x$ 輛至 M 及由 B 廠運 $25-y$ 輛至 N

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 0 \leq x+y \leq 15 \\ 0 \leq (10-x) + (25-y) \leq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 0 \leq x+y \leq 15 \\ 15 \leq x+y \leq 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ x+y=15 \end{cases}, \text{其中 } x, y \text{ 為整數.}$$

總運費 $f(x, y) = 150x + 200y + 200(10-x) + 100(25-y) = -50x + 100y + 4500$

故當 $x=10, y=5$ 時 $f(x, y) = 4500$ 元為最低運費。

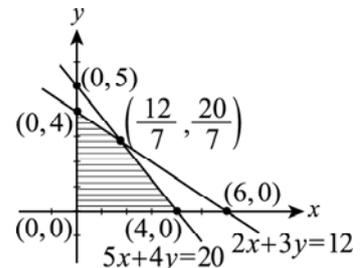
2. 某工廠用兩種不同原料均可生產同一產品，若採用甲種原料每公斤成本 100 元，運費 50 元，可得產品 7 公斤；若採用乙種原料每公斤成本 150 元，運費 40 元，可得產品 14 公斤。今預算要求成本不得超過 600 元，運費不得超過 200 元，則此工廠每日最大生產量為幾公斤？

解答 56 公斤

解析

設每日使用甲原料 x 公斤，乙原料 y 公斤

$$\Rightarrow \begin{cases} 100x + 150y \leq 600 \\ 50x + 40y \leq 200 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ 5x + 4y \leq 20 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}, \text{作圖如右}$$



目標函數 $f(x, y) = 7x + 14y$ 之最大值

(x, y)	$(0,0)$	$(4,0)$	$(\frac{12}{7}, \frac{20}{7})$	$(0,4)$
$7x+14y$	0	28	52	56

故每日最大產量為 $f(0,4) = 56$ 公斤。

3. 在不等式 $3|x| + 2|y| \leq 6$ 的條件下，則(1) $2x - 3y$ 之最大值為何？(2)圖形所圍區域之面積為何？

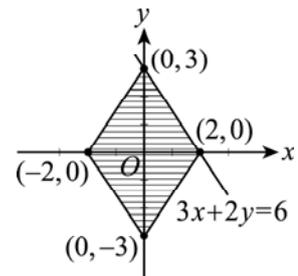
解答 (1)9;(2)12

解析

(1) $3|x| + 2|y| \leq 6 \Rightarrow \frac{|x|}{2} + \frac{|y|}{3} \leq 1$ ，根據對稱原理作圖如右

(x, y)	$(0,3)$	$(0,-3)$	$(2,0)$	$(-2,0)$
$2x-3y$	-9	9	4	-4

\therefore 最大值 9。



(2)面積為 $\frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$ 。

4. 若 x, y 滿足 $x \geq 0, y \geq 0, 3x + 2y - 12 \leq 0, x + y - 2 \geq 0$, 求(1) $2x + y - 1$ 的最小值為何? (2)圖形所圍區域之面積為何?

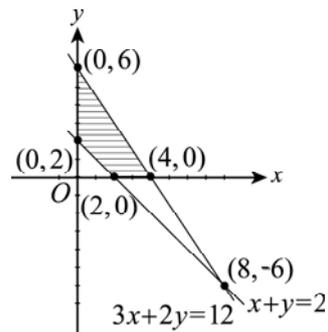
解答 (1)1;(2)10

解析

(1)作圖如右

$$\frac{(x, y)}{2x + y - 1} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} (0, 6) & (4, 0) & (2, 0) & (0, 2) & \\ \hline 5 & 7 & 3 & 1 & \end{array} \right., \text{ 最小值為 } 1.$$

(2)面積為 $\frac{1}{2} \times 4 \times 6 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 12 - 2 = 10$.



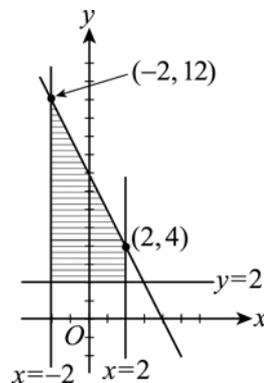
5. 不等式 $-2 \leq x \leq 2 \leq y \leq 8 - 2x$ 之圖形面積為何?

解答 24

解析

$$\text{原式} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ y \geq 2 \\ 2x + y - 8 \leq 0 \end{cases}, \text{ 作圖如右}$$

面積為 $\frac{1}{2}(2+10) \times 4 = 24$.



6. 作不等式組 $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ x - y \geq -4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$ 之圖形, (1)並求 $x + y$ 之最大值. (2)所圍區域之面積.

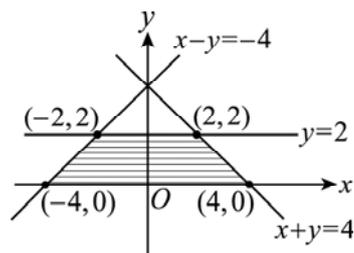
解答 (1)4;(2)12

解析

$$(1) \frac{(x, y)}{x + y} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} (2, 2) & (-2, 2) & (-4, 0) & (4, 0) & \\ \hline 4 & 0 & -4 & 4 & \end{array} \right.$$

$x + y$ 之最大值為 4.

(2)所圍區域為一梯形, 面積為 $\frac{1}{2} \times (4 + 8) \times 2 = 12$.



7. 在坐標平面上作出 $\begin{cases} |x| + |y| \leq 4 \\ |x| + 4|y| \geq 4 \end{cases}$ 的圖形, 求其面積.

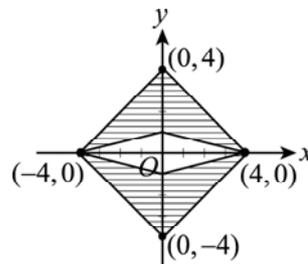
解答 24

解析

二圖形均與 x 軸， y 軸成對稱

先作 $x \geq 0, y \geq 0$ 之圖形 $\begin{cases} x+y \leq 4 \\ x+4y \geq 4 \end{cases}$ ，其餘對稱

面積為 $\frac{1}{2} \times 8 \times 8 - \frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 24$.

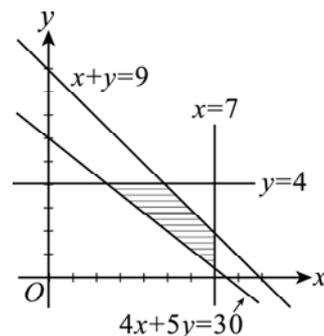


8. 某家運送公司有載重 4 公噸的小貨車 7 輛，載重 5 公噸的大貨車 4 輛，及九名司機，現受託每天最少要運送 30 噸的煤。則這家公司有幾種調度車輛的辦法？假設小貨車開一趟要用 500 元，大貨車一趟要 800 元，如何才能最節省？

解答 小貨車 5 輛，大貨車 2 輛

解析

設小貨車 x 輛，大貨車 y 輛，則 $\begin{cases} 4x+5y \geq 30 \\ x+y \leq 9 \\ 0 \leq x \leq 7 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$ 作圖如右



目標：求 $500x+800y$ 之最小值

$\therefore x, y$ 均為整數

(x, y)	(7,1)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	(3,4)	(4,4)	(5,4)
$500x+800y$	4300	4100	4600	5100	4400	4900	5400	4700	5200	5700

\therefore 小貨車 5 輛，大貨車 2 輛最省。

9. 已知聯立不等式 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 7 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq x+y \leq 9 \\ 4x+5y \geq 30 \end{cases}$ ，若 x, y 均為整數，求：

(1) 滿足此聯立不等式的 (x, y) 共有多少組解？(2) $P = 5x + 8y$ 的極小值為何？

解答 (1) 10 組；(2) 41

解析

(x, y)	(3,4)	(4,3)	(4,4)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(6,2)	(6,3)	(7,1)	(7,2)
$5x+8y$	47	44	52	41	49	57	46	54	43	51

(1) 共有 10 組。(2) 最小值 41。

10. 設 x, y 為正整數，且 $P(x, y)$ 為滿足聯立不等式 $\begin{cases} 3x+y-24 \leq 0 \\ x-y \geq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$ 的格子點，求：如此的 P 點共有多少

個？

解答 24

解析 $\therefore \begin{cases} x-y \geq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$ ， $\therefore x \geq y \geq 1$ 且 $3x+y \leq 24$

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	1, 2	1~3	1~4	1~5	1~6	1~3

共有 $1+2+3+4+5+6+3=24$ 個格子點。

11. 試求出不等式 $6-2y \leq x-2 \leq y \leq 4$ 之圖形其區域面積。

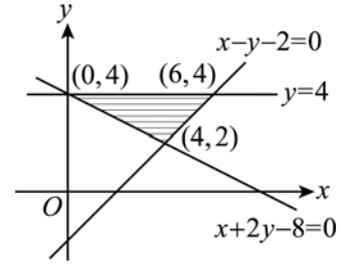
解答 6

解析

原不等式可化成

$$\begin{cases} 6-2y \leq x-2 \\ x-2 \leq y \\ y \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-8 \geq 0 \\ x-y-2 \leq 0 \\ y \leq 4 \end{cases} \text{ 作圖如右}$$

故區域面積為 $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 6$.



12. 試求出不等式組 $\begin{cases} x-2y \geq -6 \\ 7x-2y \leq 18 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$ 之區域面積。

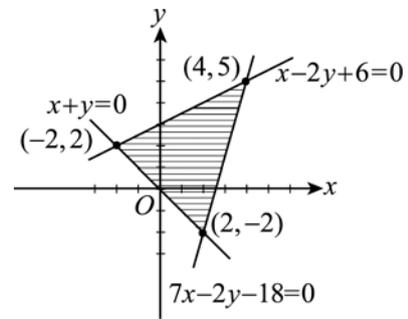
解答 18

解析

作圖如右

區域面積為

$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |10+8+4+8+10-4| = 18$.



13. 設 k 為實數， F 為坐標平面上由下列不等式組所定義之區域： $\begin{cases} x+2y \leq 4 \\ x-y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ ，若 $z = x + ky$ 在 $(2,1)$ 處有

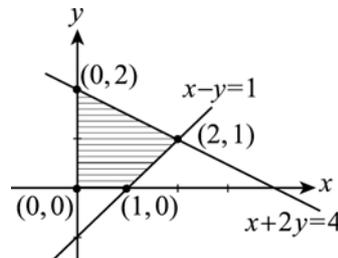
最大值，試求 k 之範圍。

解答 $-1 \leq k \leq 2$

解析 由題意知：

	$x + ky$
$(0,2)$	$2k$
$(0,0)$	0
$(1,0)$	1
$(2,1)$	$2+k \rightarrow$ 最大值

$\Rightarrow \begin{cases} 2+k \geq 1 \\ 2+k \geq 2k \end{cases}, \therefore -1 \leq k \leq 2$



14. 若已知一年甲乙兩班數學科第二次段考至多有 20 位同學不及格，甲班不及格同學的數目不超過乙班不及格同學數目的 3 倍，且甲班最少有 10 位不及格，乙班最少有 5 位不及格，則可能有幾種情形？

解答 21

解析

設甲班有 x 位不及格，乙班有 y 位不及格，依題意得：

$$\begin{cases} x + y \leq 20 \\ x \leq 3y \\ x \geq 10 \\ y \geq 5 \end{cases},$$

$\therefore x, y$ 為整數， $\therefore x, y$ 的可能結果如表所示

x	10~15	10~14	10~13	10~12	10~11	10
y	5	6	7	8	9	10
	6種	5種	4種	3種	2種	1種

\therefore 共 $1+2+\dots+6=21$ 種。

15. 工廠生產 A, B 兩種產品，產品每單位的原料成本，加工成本及利潤如下：

	原料成本 (元)	加工成本 (元)	利潤 (元)
A	1	2	3
B	2	1	4

若要使原料成本不超過 4 元，加工成本不超過 5 元，則應生產 A, B 各多少單位可得最高利潤？列出這線性規劃的數學模式。

解析

設生產 x 單位的 A 產品及 y 單位的 B 產品。

	原料成本 (元)	加工成本 (元)
$A(x)$	x	$2x$
$B(y)$	$2y$	y

則目標函數為 $3x+4y$ ，原料成本為 $x+2y$ ，加工成本為 $2x+y$ ，

得線性規劃的數學模式為：求 $z=3x+4y$ 之最大值，而限制條件

$$\begin{cases} x+2y \leq 4 \\ 2x+y \leq 5 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}.$$

生產 2 單位的 A 產品及 1 單位的 B 產品，利潤 $z=6+4=10$ 最大

16. 一菜圃，需氮肥 5 公斤，磷肥 4 公斤，鉀肥 7 公斤；現有甲乙兩種肥料，甲每公斤 10 元，含氮 20%，磷 10%，鉀 20%；乙每公斤 14 元，含氮 10%，磷 20%，鉀 20%，求(1)應買甲乙各多少才會花費最少？(2)又最少花費為何？

解答

(1)甲 30 公斤，乙 5 公斤；(2)花 370 元

解析

設需甲肥料 x 公斤，需乙肥料 y 公斤

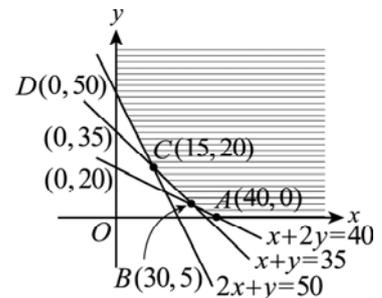
$$\begin{cases} 0.2x+0.1y \geq 5 \\ 0.1x+0.2y \geq 4 \\ 0.2x+0.2y \geq 7 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y \geq 50 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x+2y \geq 40 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ x+y \geq 35 \cdots \cdots \textcircled{3} \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

目標函數： $10x+14y$

(x, y)	$(40, 0)$	$(30, 5)$	$(15, 20)$	$(0, 50)$
$10x+14y$	400	370	430	700

\therefore 在 B 點 $(30, 5)$ 有最小值

\therefore (1)買甲 30 公斤，乙 5 公斤；(2)花 370 元。



17. 某公司擁有 A , B 兩座在不同地區的倉庫, A 倉庫存貨 48 公噸, B 倉庫存貨 60 公噸. 今公司接獲甲地客戶訂貨 36 公噸, 同時接獲乙地客戶訂貨 44 公噸. 而由 A 倉庫運至甲地每公噸運費 400 元, 運至乙地每公噸運費 500 元; 由 B 倉庫運至甲地每公噸運費 600 元, 運至乙地每公噸運費 650 元, 則此公司應如何配送, 才能使運費達到最低?

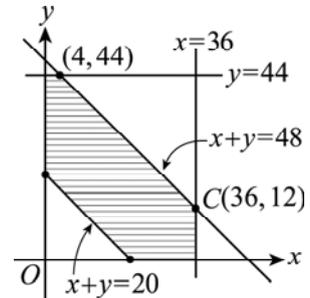
解答 A 運至甲 36 公噸, B 運至甲 0 公噸; A 運至乙 12 公噸, B 運至乙 32 公噸

解析

設由 A 倉庫運至甲 x 公噸, 由 A 倉庫運至乙 y 公噸

由 B 倉庫運至甲 $(36-x)$ 公噸, 由 B 倉庫運至乙 $(44-y)$ 公噸

$$\begin{cases} x+y \leq 48 \\ (36-x)+(44-y) \leq 60 \\ 0 \leq x \leq 36 \\ 0 \leq y \leq 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \leq 48 \\ x+y \geq 20 \\ 0 \leq x \leq 36 \\ 0 \leq y \leq 44 \end{cases}$$



目標函數:

$$400x + 500y + 600(36-x) + 650(44-y) = -200x - 150y + 50200$$

在 $C(36,12)$ 有最小值, 即 A 運至甲 36 公噸, B 運至甲 0 公噸; A 運至乙 12 公噸, B 運至乙 32 公噸; 運費最低為 41200 元.

18. 南北生技農場今年生產一種植物共 1 萬公斤, 該植物每 200 公斤可提煉 1 公斤的中草藥, 每 5 公斤可製成 1 公斤的健康食品. 中草藥每公斤可獲利 5000 元, 健康食品每公斤可獲利 100 元; 根據市場調查每年中草藥最大需求量為 30 公斤, 健康食品最大需求量是 1800 公斤. 如果南北生技農場決定提煉中草藥 x 公斤, 製成健康食品 y 公斤, 設 P 為其可獲利潤.

(1) 試以 x , y 表示 P .

(2) 如果想獲得最大利潤, 則 x , y 的值為何?

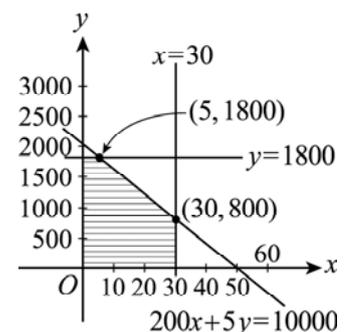
解答 (1) $P = 5000x + 100y$, 其中 $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 1800$; (2) $x = 30$, $y = 800$,

解析

(1) $P = 5000x + 100y$, 其中 $0 \leq x \leq 30$, $0 \leq y \leq 1800$

(2) 由題意 $\Rightarrow \begin{cases} 200x + 5y \leq 10000 \\ 0 \leq x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 1800 \end{cases} \Rightarrow$ 如圖所示:

(x, y)	$(5, 1800)$	$(30, 800)$
$5000x + 100y$	205000	230000



\therefore 中草藥每公斤可獲利 5000 元 \Rightarrow 每 200 公斤植物可獲利 5000 元

但健康食品每公斤可獲利 100 元 \Rightarrow 每 5 公斤植物可獲利 100 元

\Rightarrow 每 200 公斤植物可獲利 4000 元 $<$ 5000 元

\therefore 製成中草藥獲利較高, 取中草藥最大需求量可得最大獲利

\therefore 取 $x = 30$, $y = 800$, 有最大利潤 230000 元.

19. 某公司有甲，乙兩廠生產三種型式彩色電視機，其營業狀況如下表所示：

型式	廠別		每週至少需要量(架)	
	每日生產量(架)	甲廠		乙廠
I		12	3	36
II		4	4	24
III		6	12	48
每日開支(元)		20000	15000	

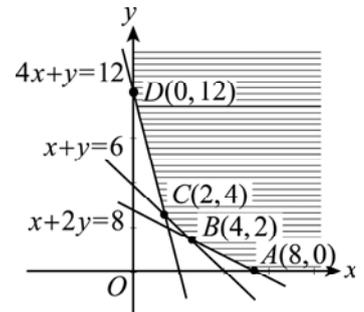
問甲，乙兩廠每週開工幾日就可以最節省的方式供應所需？

解答 甲廠開工 2 日，乙廠開工 4 日

解析

設甲廠每週開工 x 日，乙廠每週開工 y 日

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 12x + 3y \geq 36 \\ 4x + 4y \geq 24 \\ 6x + 12y \geq 48 \end{cases} \text{ 聯立得 } A(8,0), B(4,2), C(2,4), D(0,12)$$



目標函數 $f(x, y) = 20000x + 15000y$

	$20000x + 15000y$
(8,0)	160000
(4,2)	110000
(2,4)	100000 ← 最小
(0,12)	180000

即甲廠開工 2 日，乙廠開工 4 日，可以最節省方式供應所需。