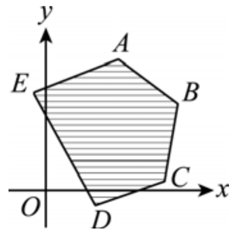
高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：98.02.09					
範圍	選修(Ⅰ) 3-3 線性規劃(A)	班級	三年　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題　(每題 5 分)

(　　) 1. 圖中鋪色部分的點坐標(x,y)代入$x-2y=k$，則使k值最大的是哪一點?



(1) A點　(2) B點　(3) C點　(4) D點　(5) E點 .

解答　4

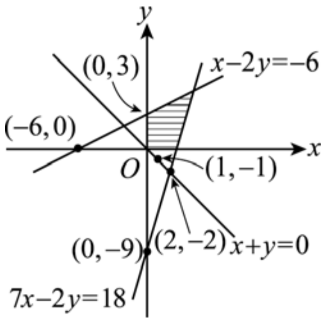
解析　$x-2y=k$表斜率爲$\frac{1}{2}$，x截距k之直線

在斜率爲$\frac{1}{2}$之直線中，過D點之直線的x截距最大

(　　) 2. 在第一象限中滿足$x-2y\geq -6$，$7x-2y\leq 18$，$x+y\geq 0$之所有點(x,y)的區域爲

(1)空集合　(2)半平面　(3)三角形區域　(4)四邊形區域

(5)五邊形區域 .



解答　4

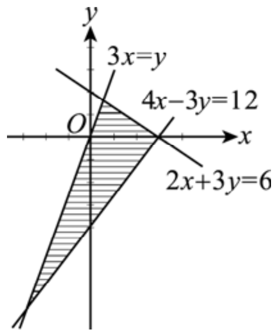
解析　作圖如右

(　　) 3.

試問圖中斜線部分（包含邊界）爲下列哪一個不等式組之解?

(1) $\begin{cases}3x\geq y\\4x-3y\geq 12\\2x+3y\leq 6\end{cases}$　(2) $\begin{cases}3x\geq y\\4x-3y\leq 12\\2x+3y\leq 6\end{cases}$　(3) $\begin{cases}3x\leq y\\4x-3y\geq 12\\2x+3y\geq 6\end{cases}$

(4) $\begin{cases}3x\leq y\\4x-3y\geq 12\\2x+3y\leq 6\end{cases}$　(5) $\begin{cases}3x\leq y\\4x-3y\leq 12\\2x+3y\geq 6\end{cases}$.

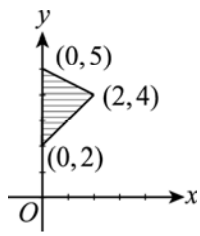


解答　2

(　　) 4.

在坐標平面上，圖中之斜線區域所代表的不等式組爲

(1) $\begin{cases}x+2y-10\leq 0\\x-y+2\geq 0\\y\geq 0\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x+2y-10\leq 0\\x-y+2\leq 0\\y\geq 0\end{cases}$　(3) $\begin{cases}x+2y-10\leq 0\\x-y+2\geq 0\\x\geq 0\end{cases}$　(4) $\begin{cases}x+2y-10\leq 0\\x-y+2\leq 0\\x\geq 0\end{cases}$.



解答　4

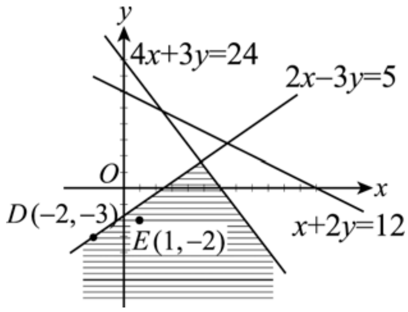
解析　過$(0,5)$，$(2,4)$之直線：$x+2y-10=0$

過$(0,2)$，$(2,4)$之直線：$x-y+2=0$　；由圖可知：$\begin{cases}x+2y-10\leq 0\\x-y+2\leq 0\\x\geq 0\end{cases}$

過$(0,5)$，$(0,2)$之直線：$x=0$

(　　) 5. (複選)下列數對 (x,y) 何者滿足聯立不等式 $\begin{cases} x+2y\le 12 \\ 2x-3y\ge 5 \\ 4x+3y\le 24 \end{cases}$ 的條件?

(1) $(-3,5)$　(2) $(-1,1)$　(3) $(2,5)$　(4) $(-2,-3)$　(5) $(1,-2)$ ．



解答　45

解析　由圖所示(4)(5)在範圍內．

(　　) 6. (複選)在 xy 平面上，不等式 $3|x|+2|y|\le 6$ 所表示的圖形爲 Γ，其面積爲 A，則:

(1) Γ 爲矩形區域　(2) Γ 爲菱形區域　(3) Γ 爲平行四邊形區域

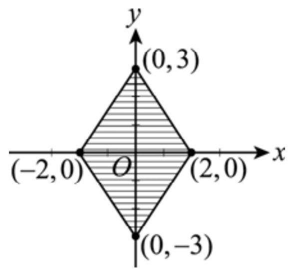
(4) $A=12$　(5) $A=6$ ．

解答　234

解析

$\frac{|x|}{2}+\frac{|y|}{3}\le 1$ 之圖形對稱於 x 軸、 y 軸(因爲 $(-x,y);(x,-y)$ 代入 $\frac{|x|}{2}+\frac{|y|}{3}\le 1$ ，原式滿足)

先考慮 $x\ge 0$， $y\ge 0 \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{3}\le 1$



∴經由對稱性質，其圖形如圖所示

∴ Γ 爲菱形，亦爲平行四邊形 $A=\frac{2\times 3}{2}\times 4=12$ ．

(　　) 7. (複選)在一個牽涉到兩個未知量 x， y 的線性規劃作業中，有三個限制條件．坐標平面上符合這三個限制條件的區域是一個三角形區域．假設目標函數 $ax+by$ （ a ， b 是常數）在此三角形的一個頂點 $(19,12)$ 上取得最大值 31，而在另一個頂點 $(13,10)$ 取得最小值 23．現因業務需要，加入第四個限制條件，結果符合所有限制條件的區域變成一個四邊形區域，頂點少了 $(19,12)$，新增了 $(17,13)$ 和 $(16,11)$ ．在這四個限制條件下，請選出正確的選項:

(1) $ax+by$ 的最大值發生在 $(17,13)$　　(2) $ax+by$ 的最小值發生在 $(16,11)$

(3) $ax+by$ 的最大值是 30　　(4) $ax+by$ 的最小值是 27 ．

解答　13

解析

由題意 $\Rightarrow \begin{cases} 19a+12b=31 \\ 13a+10b=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow$ 目標函數 $x+y$

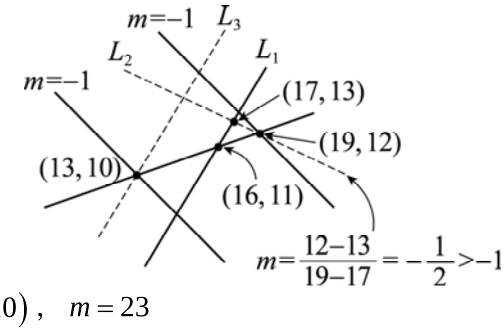
如圖，加入第四個限制條件增加 $(17,13)$， $(16,11)$

$\Rightarrow L_1$ 爲第四個限制條件

過 $(19,12)$ 之條件爲 L_2（亦過 $(17,13)$），過 $(13,10)$ 之條件爲 L_3

又新區域爲四邊形 $\Rightarrow L_2$， L_3 交點必在 L_1 之左側，見圖

∴ $x+y$ 最大值發生在 $(17,13)$， $M=30$，最小值發生在 $(13,10)$， $m=23$



三、填充題　(每格 10 分)

1. 王先生採收酪梨共獲 1080 粒，要打包裝箱上市．已知大箱一箱可裝 25 粒，小箱一箱可裝 8 粒；每個大箱子成本 60 元，每個小箱子成本 20 元．試問能將這 1080 粒的酪梨剛好裝完，所用的箱子成本最少爲____________元．

$\boxed{\text{解答}}$　2600

$\boxed{\text{解析}}$　令大箱 x，小箱 $y \Rightarrow 25x+8y=1080$

x	0	8	16	24	32	40
y	135	110	85	60	35	10

求目標函數 $P=60x+20y$ 之最小值

(x,y)	$(0,135)$	$(8,110)$	$(16,85)$	$(24,60)$	$(32,35)$	$(40,10)$
$60x+20y$	2700	2680	2660	2640	2620	2600

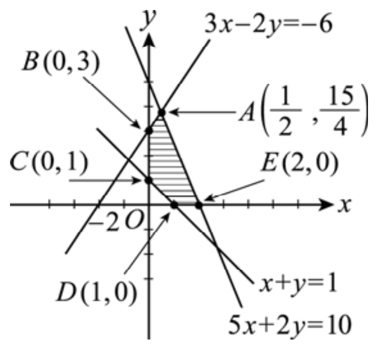
成本最少爲 2600 元．

2. 在條件 $\begin{cases} 3x-2y \ge -6 \\ x+y \ge 1 \\ 5x+2y \le 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ 的限制下，設 $2x+4y$ 之極大值爲 M，極小值爲 m，則 $M+m=$____________．

$\boxed{\text{解答}}$　18

$\boxed{\text{解析}}$

作圖如右

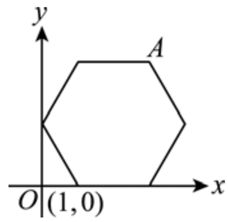


(x,y)	$(0,3)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(2,0)$	$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{15}{4}\right)$
$2x+4y$	12	4	2	4	16

最大值 $M=16$，最小值 $m=2$

$\therefore M+m=18$．

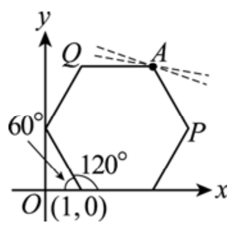
3. 設一線性規劃的可行解區域爲如圖所示之正六邊形內部（含邊界），而目標函數爲 $y-ax$．若已知 A 點爲此目標函數取得最大值之唯一的點，則 a 值的範圍要有限制．若以不等式表示，則 a 之範圍爲____________．



$\boxed{\text{解答}}$　$-\sqrt{3}<a<0$

$\boxed{\text{解析}}$　設正六邊形邊長 2

目標函數 $P(x,y)=-ax+y$ 的斜率 a 介於 $\overleftrightarrow{AP}$ 與 $\overleftrightarrow{AQ}$ 的斜率之間



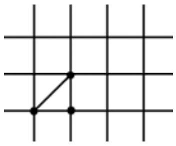
因 $\overleftrightarrow{AQ}$ 的斜率 $m_1=0$；　$\overleftrightarrow{AP}$ 的斜率 $m_2=\tan 120°=-\sqrt{3}$

$\therefore -\sqrt{3}<a<0$．

4. 當平面上的點 (x,y) 之坐標 x 與 y 都是整數時，稱點 (x,y) 爲格子點．數學家知道：坐標平面上三個點皆爲格子點的三角形之面積可以用公式 $aS+bI+c$ 來表示，其中 S 代表三角形三邊邊上的格子點數，I 是落在三角形內部（不含邊上）的格子點數，a，b，c 是固定的常數．則 $(a,b,c)=$____________．

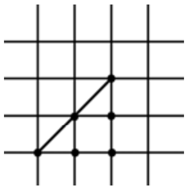
$\boxed{\text{解答}}$　$(0.5,1,-1)$

解析



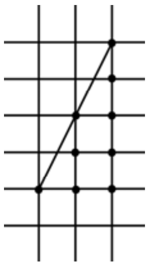
由圖 $\Rightarrow S=3$， $I=0$，面積 $=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}=3a+c\cdots\cdots①$



由圖 $\Rightarrow S=6$， $I=0$，面積 $=2$

$\Rightarrow 2=6a+c\cdots\cdots②$



由圖 $\Rightarrow S=8$， $I=1$，面積 $=4$

$\Rightarrow 4=8a+b+c\cdots\cdots③$

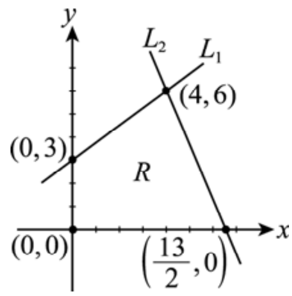
由①②$\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$， $c=-1$代入③

$\therefore 4=4+b-1\Rightarrow b=1$， $\therefore (a,b,c)=(0.5,1,-1)$.

5.

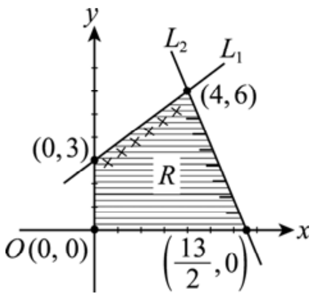
如右圖，令 R 表示由 x 軸， y 軸及 L_1 、 L_2 兩直線所圍成之四邊形區域（含邊界及內部）. 若點 P 屬於 R ，令 d_1， d_2， d_3 及 d_4 分別表示 P 至 x 軸，y 軸，L_1 及 L_2 之距離，則 $d_1+d_2+d_3+d_4$ 之

(1)最大值爲____________，(2)最小值爲____________ .



解答 (1)$\dfrac{64}{5}$;(2)$\dfrac{102}{13}$

解析



(1)$\because P(x,y)$ 在 R 區域內 $\Rightarrow P$ 在 $\begin{cases} L_1: 3x-4y=-12 \text{ 之正區域} \\ L_2: 12x+5y=78 \text{ 之負區域} \end{cases}$

(2)作 P 至 x 軸，y 軸，L_1，L_2 距離和

$$d_1+d_2+d_3+d_4=|y|+|x|+\left|\frac{3x-4y+12}{5}\right|+\left|\frac{12x+5y-78}{13}\right|$$

$$=y+x+\frac{3x-4y+12}{5}+\frac{-(12x+5y-78)}{13}=\frac{44}{65}x-\frac{12}{65}y+\frac{42}{5}$$

(x,y)	$(0,0)$	$\left(\frac{13}{2},0\right)$	$(4,6)$	$(0,3)$
$\frac{44}{65}x-\frac{12}{65}y+\frac{42}{5}$	$\frac{42}{5}$	$\frac{64}{5}$	10	$\frac{102}{13}$

；最大值爲 $\frac{64}{5}$，最小値 $\frac{102}{13}$ ．

6．考慮滿足下列兩條件的二位數

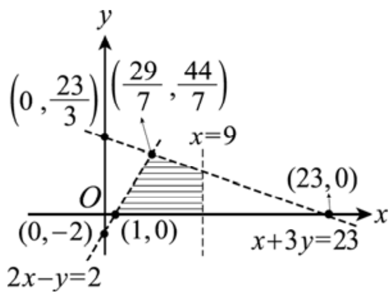
(1)個位數的二倍減去十位數字的差大於 2．(2)十位數字的三倍與個位數字的和小於 23．

則其中最大的一個二位數爲____________．

解答 57

解析

設個位數字 x，十位數字 $y \Rightarrow \begin{cases} 2x-y>2 \\ 3y+x<23 \\ x,y \text{ 爲 } 0\sim 9 \text{ 的整數} \end{cases}$

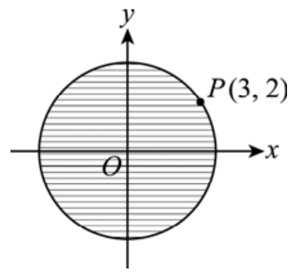


作圖如右

區域內最大的二位數爲 57．

7.

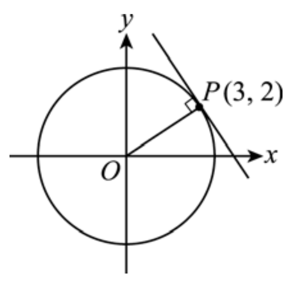
右圖爲一圓（以原點爲圓心），以此圓的邊界及其內部爲可行解區域，點 $P(3,2)$ 爲邊界上的一點，設目標函數爲 $f(x,y)=x-my+3$，若 P 點爲使目標函數產生最大值 M 的唯一點，則 $M+m=$____________．



解答 $\frac{20}{3}$

解析

$\overleftrightarrow{OP}$ 的斜率 $\frac{2}{3}$，則 $x-my+3=M$ 即爲過 P 的切線，斜率爲 $\frac{-3}{2}$



故 $\frac{1}{m}=\frac{-3}{2}$，$\therefore m=\frac{-2}{3}$，$M=3+\frac{2}{3}\times 2+3=\frac{22}{3}$

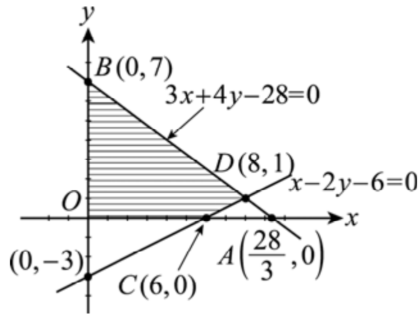
$\therefore M+m=\frac{20}{3}$ ．

8. 在 xy 平面上，不等式 $x\geq 0$，$y\geq 0$，$x-2y-6\leq 0$，$3x+4y-28\leq 0$ 所成區域的面積爲____________．

解答　31

解析

作圖如右



斜線區域面積 $=\triangle OAB-\triangle ACD$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{28}{3}\times 7-\frac{1}{2}\left(\frac{28}{3}-6\right)\times 1$$

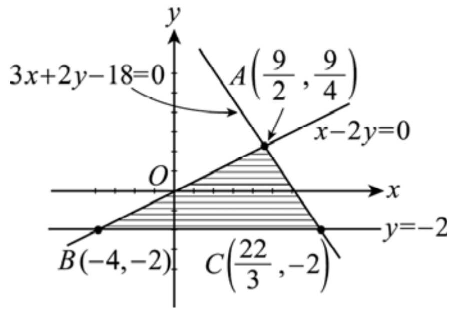
$$=\frac{98}{3}-\frac{5}{3}=31\ .$$

9. 設 x，y 爲整數，且 $P(x,y)$ 爲滿足聯立不等式 $\begin{cases}3x+2y-18\le 0\\ x-2y\ge 0\\ y+2\ge 0\end{cases}$ 的格子點，則如此的 P 點共有____個．

解答　33

解析

作圖如右，$\therefore -2\le y\le 2$，$2y\le x\le \dfrac{18-2y}{3}$



$y=2$，$4\le x\le \dfrac{14}{3}$，$\therefore x=4\Rightarrow 1$個

$y=1$，$2\le x\le \dfrac{16}{3}$，$\therefore x=2$，3，4，$5\Rightarrow 4$個

$y=0$，$0\le x\le 6\Rightarrow 7$個

$y=-1$，$-2\le x\le \dfrac{20}{3}\Rightarrow 9$個

$y=-2$，$-4\le x\le \dfrac{22}{3}\Rightarrow 12$個

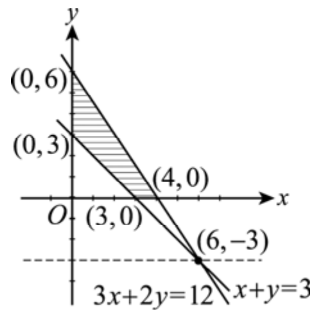
共有 $1+4+7+9+12=33$．

10. 設點 (x,y) 滿足 $3x+2y-12\le 0$，$x+y-3\ge 0$，$x\ge 0$，$y\ge 0$ 四個不等式，則
(1)點 (x,y) 在 xy 平面所成圖形之面積爲____________．
(2)若 $m\le x+2y\le M$，則數對 $(m,M)=$____________．

解答　(1) $\dfrac{15}{2}$;(2) $(3,12)$

解析

作圖如右



(1)面積 $=\frac{1}{2}(4\times6)-\frac{1}{2}(3\times3)=\frac{15}{2}$.

(2)

	$x+2y$
$(0,6)$	$12(M)$
$(0,3)$	6
$(3,0)$	$3(m)$
$(4,0)$	4

$\therefore (m,M)=(3,12)$.

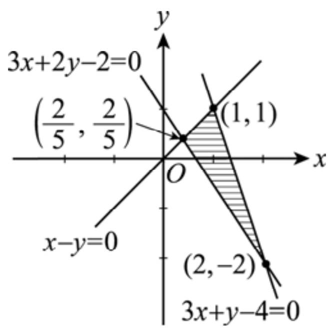
11. 設 $x\geq y\geq z\geq -2$ 且 $3x+2y-z=4$，試求(1) $x+2y+z$ 之最大值爲________．(2)此時 $(x,y,z)=$ _________ .

解答 (1)4;(2) $(1,1,1)$

解析

$3x+2y-z=4\Rightarrow z=3x+2y-4$ 代入 $x\geq y\geq z\geq -2$

$\Rightarrow x\geq y\geq 3x+2y-4\geq -2\Rightarrow\begin{cases}x-y\geq0\\3x+y-4\leq0\\3x+2y-2\geq0\end{cases}$



此時 $x+2y+z=x+2y+(3x+2y-4)=4x+4y-4$

(x,y)	$4x+4y-4$
$(2,-2)$	-4
$(1,1)$	4
$\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$	$-\frac{4}{5}$

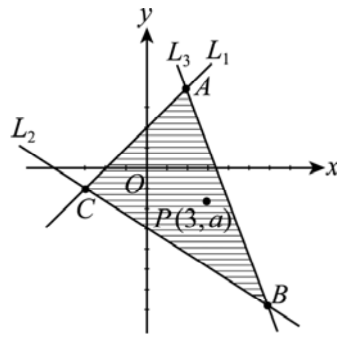
(1)在點 $(1,1)$ 得最大值爲 4，(2)此時 $(x,y,z)=(1,1,1)$.

12. 三直線 $L_1:x-y+2=0$，$L_2:2x+3y+9=0$，$L_3:8x+3y-27=0$ 圍成△ ABC ．若 $P(3,a)$ 在所圍三角形 ABC 之內部，試求 a 的範圍爲____________ .

解答 $-5<a<1$

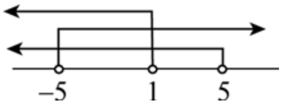
解析

由 L_1、L_2、L_3 所圍△ ABC，如圖所示：



因 $P(3,a)$ 位於△ ABC 之內部得

$$\begin{cases} x-y+2>0 \\ 2x+3y+9>0 \\ 8x+3y-27<0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} 3-a+2>0 \\ 6+3a+9>0 \\ 24+3a-27<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<5 \\ a>-5 \\ a<1 \end{cases}$$



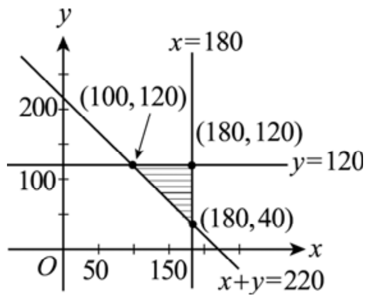
故得 $-5<a<1$．

13. 某肥料公司有兩家工廠生產同一產品，甲工廠每月最多可生產 180 公噸，乙工廠每月最多可生產 120 公噸，該公司希望每月總共最少要生產 220 公噸．依據經驗，甲工廠每生產 1 公噸的產品，則產生 15 公斤的一氧化氮飄入空間中汙染空氣，而乙工廠每生產 1 公噸的產品，則產生 30 公斤的一氧化氮飄入空間中汙染空氣．則甲、乙兩工廠各生產________公噸的產品才能符合需求，且對空氣的汙染減至最低．

$\boxed{\text{解答}}$ 甲廠生產 180 公噸，乙廠生產 40 公噸

$\boxed{\text{解析}}$

設甲生產 x 公噸，乙生產 y 公噸



則 $\begin{cases} 0\le x\le 180 \\ 0\le y\le 120 \\ x+y\ge 220 \end{cases}$ 作圖如右

目標函數使 $f(x,y)=15x+30y$ 為最小

(x,y)	$15x+30y=15(x+2y)$
$(180,40)$	$15\times 260\leftarrow$ 最小
$(180,120)$	15×420
$(100,120)$	15×340

即甲廠生產 180 公噸，乙廠生產 40 公噸，才能符合需求，且對空氣的汙染減至最低．

14. 某公司所生產的產品，存放在甲、乙兩倉庫分別有 50 單位，40 單位，現在市場 A、市場 B 分別的需求量是 20 單位、30 單位，下表是各倉庫運輸到各市場的每單位運輸成本：

	市場 A	市場 B
倉庫甲	500 元	450 元
倉庫乙	400 元	300 元

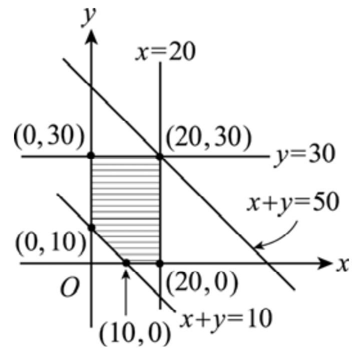
在滿足 A，B 市場的需求下，最節省的運輸成本為________元．

$\boxed{\text{解答}}$ 18000

$\boxed{\text{解析}}$

設甲倉庫運到 A 市場 x 單位 $\Rightarrow$ 乙倉庫運到 A 市場 $(20-x)$ 單位

甲倉庫運到 B 市場 y 單位 $\Rightarrow$ 乙倉庫運到 B 市場 $(30-y)$ 單位



$$\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 20\\0\le y\le 30\\x+y\le 50\\(20-x)+(30-y)\le 40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 20\\0\le y\le 30\\x+y\le 50\\x+y\ge 10\end{cases}$$

目標函數 $=500x+400(20-x)+450y+300(30-y)$

$=100x+150y+17000$

$\therefore$取 $x=10$， $y=0$ 有最少運輸成本 18000 元．

15. 一玩具工廠生產 A， B 兩種玩具，玩具 A 每個可獲淨利 300 元，玩具 B 每個可獲淨利 360 元．假設製造玩具的成本共分 3 部分：設計費，材料費與工資，而 A， B 兩種玩具每個的成本分別如下：

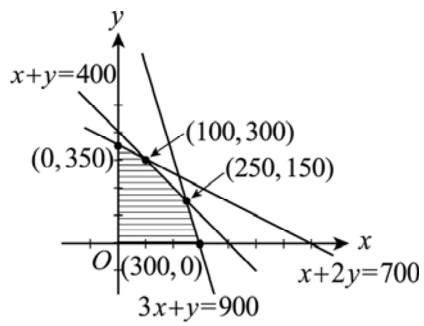
	設計費	材料費	工資
A	30	10	10
B	10	10	20

在設計費不超過 9000 元，材料費不超過 4000 元，工資不超過 7000 元的原則下，生產的總淨利最高爲______元．

解答　138000

解析

設生產 A 玩具 x 個、 B 玩具 y 個



$$\begin{cases}x\ge 0\\y\ge 0\\30x+10y\le 9000\\10x+10y\le 4000\\10x+20y\le 7000\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\y\ge 0\\3x+y\le 900\\x+y\le 400\\x+2y\le 700\end{cases}$$

	$300x+360y$
$(0,350)$	126000
$(100,300)$	138000 $\rightarrow$ 最大值
$(250,150)$	129000
$(300,0)$	90000

$\therefore$最高淨利爲 138000 元．

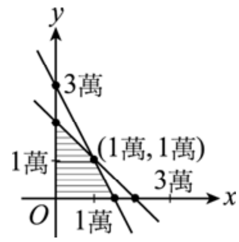
16. 某工廠生產 A 與 B 兩種產品，其總產能爲每年 2 萬公斤．假設生產 A 的成本爲每公斤 10 美元，生產 B 的成本爲每公斤 5 美元，而今年工廠可用資金爲 15 萬美元．若 A 的淨利爲每公斤 30 美元，B 的淨利爲每公斤 20 美元，試問最大利潤爲____________萬美元．

解答　35

解析

設 A 今年生產 x 公斤， B 生產 y 公斤

$\begin{cases} x+y\le 20000 \\ 10x+5y\le 150000 \\ x\ge 0,\ \ y\ge 0 \end{cases}$ 作圖如右



求 $30x+20y-(10x+5y)=20x+15y$ 的最大值

(x,y)	$(0,2)$	$(1,1)$	$(1.5,0)$
$20x+15y$	30	35	30

，∴最大利潤爲 35 萬美元．