<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：98.03.11</td></tr>
<tr><td>範
圍</td><td>選修(Ⅰ)
矩陣(B)</td><td>班級
座號</td><td>三年　　班</td><td>姓
名</td><td></td></tr>
</table>

一、選擇題 (每題 5 分)

1、(E)　在矩陣$[a_{ij}]_{3\times 4}$中，設$a_{ij}=i+3j-3$，$i=1$，2，3，$j=1$，2，3，4，求$a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}=$

(A)2　(B)5　(C)8　(D)11　(E)26

$\boxed{解析}$：$a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}$

$=(2+3\times1-3)+(2+3\times2-3)+(2+3\times3-3)+(2+3\times4-3)=2+5+8+11=26$

2、(C)　設方陣$A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}$，若$A^3-6A=k\ I_2$，則$k=$

(A)-2　(B)-5　(C)-9　(D)1　(E)9

$\boxed{解析}$：$A^3-6A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&6\\-6&3\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9&0\\0&-9\end{bmatrix}=-9\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

3、(B)　設$A=[a_{ij}]_{3\times3}$，$a_{ij}\in\{-2,-1,0,1,2\}$，且$A^t=A$，如此的方陣A有多少個？

(A)5^9　(B)5^6　(C)5^3　(D)9^5　(E)6^5

$\boxed{解析}$：$A^t=A\Rightarrow$對稱矩陣A中的元素以主對角線對稱相等，$\begin{bmatrix}a&x&y\\ *&b&z\\ *&*&c\end{bmatrix}$，所以一共有 6 個位置須確定，每個位置有$-2,-1,0,1,2$等 5 個選擇，故共有$5^6$個

4、(A)　設方陣$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\-2&1&3\end{bmatrix}$，若反方陣$A^{-1}=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$，則$e=$

(A)$\frac{5}{11}$　(B)$\frac{1}{11}$　(C)$\frac{-1}{11}$　(D)$\frac{7}{11}$　(E)$\frac{2}{11}$

$\boxed{解析}$：$\det A=6+0+0+4-0+1=11$，$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}7&1&-2\\2&5&1\\4&-1&2\end{bmatrix}$，$\therefore e=\frac{5}{11}$

5、($\begin{matrix}BC\\DE\end{matrix}$)　(複選)設$A=\begin{bmatrix}1&3&1\\0&-2&1\\1&0&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-4&x&5\\1&1&-1\\2&3&-2\end{bmatrix}$，若$AB=I$，則下列何者為真？

(A)$x=8$　(B)$x=-6$　(C)$AB=BA$　(D)$BA=I$　(E)$A^2B^2=I$

$\boxed{解析}$：$\det A=1$，$B=A^{-1}=\begin{bmatrix}-4&-6&5\\1&1&-1\\2&3&-2\end{bmatrix}$，$\therefore x=-6$，$AB=BA=I$，$A^2B^2=I$

6、($\begin{matrix}BC\\DE\end{matrix}$)　(複選)對方陣的反方陣，下列性質何者恒成立？

(A)$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$　(B)$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$　(C)$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

(D)$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$　(E)若$\det A\neq0$，則A^{-1}存在

$\boxed{解析}$：(B)$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AA^{-1}=I$

(D)$(P^{-1}AP)^n=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)$

$=P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots(PP^{-1})AP$

$=P^{-1}AA\cdots AP=P^{-1}A^n P$

7、(BE)(複選)若$A=\begin{bmatrix} k & 2 \\ 3 & k-1 \end{bmatrix}$沒有反方陣，則$k$之值可能爲

(A)–1　(B)–2　(C)1　(D)2　(E)3

解析：$\det\begin{bmatrix} k & 2 \\ 3 & k-1 \end{bmatrix}=k(k-1)-6=k^2-k-6=0$　$\therefore k=3$ 或-2

8、(ADE)(複選)設$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$，若$A^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則下列何者成立？

(A)$a=9$　(B)$b=4$　(C)$c=2$　(D)$d=1$　(E)$a+b+c+d=4$

解析：$\det A=1\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$　$\therefore a=9$，$b=-2$，$c=-4$，$d=1$

9、(ABCD)(複選)設$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$，若$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則下列何者爲真？

(A)$a=6$　(B)$b=-3$　(C)$a+c=7$　(D)$c+d=2$　(E)$abcd=18$

解析：$\det A=9$，$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$　$\therefore a=6$，$b=-3$，$c=1$，$d=1$

10、(BCD)(複選)方陣$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & x-2 \\ x & 4 & 0 \\ 2 & x & -3 \end{bmatrix}$沒有反方陣，則$x$之值可能爲

(A)–2　(B)2　(C)$\sqrt{2}$　(D)$-\sqrt{2}$　(E)3

解析：$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-2 \\ x & 4 & 0 \\ 2 & x & -3 \end{vmatrix}=0$，$\therefore x^3-2x^2-2x+4=0$，$x=2$，$\pm\sqrt{2}$

二、填充題 (每題 10 分)

1、設$A=\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$，若$A^n=I_2$，求最小自然數$n=$______。

答案：24

解析：旋轉矩陣

$$A=\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{12} & -\sin\frac{\pi}{12} \\ \sin\frac{\pi}{12} & \cos\frac{\pi}{12} \end{bmatrix}$$

$$A^n=I_2\Rightarrow\begin{bmatrix} \cos(\frac{n\pi}{12}) & -\sin(\frac{n\pi}{12}) \\ \sin(\frac{n\pi}{12}) & \cos(\frac{n\pi}{12}) \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} \cos\frac{n\pi}{12}=1 \\ \sin\frac{n\pi}{12}=0 \end{cases}\Rightarrow\frac{n\pi}{12}=2k\pi,\ n=24k\text{，}n\text{ 最小 }24$$

2、設方陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，求反方陣 $A^{-1}=$______。

答案：$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

解析：$\det A=-1$，$A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

3、設 $A=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$，求 $\sum\limits_{n=1}^{2006} \mathrm{A}^n=$______。

答案：$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$

解析：$A=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & \sin\dfrac{\pi}{3} \\ -\sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{bmatrix}$，因 $A^6=\begin{bmatrix} \cos\dfrac{6\pi}{3} & \sin\dfrac{6\pi}{3} \\ -\sin\dfrac{6\pi}{3} & \cos\dfrac{6\pi}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I_2$，

故 $A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=\dfrac{A(I-A^6)}{I-A}=0$，$2006=6\times 334+2$，

$$\sum_{n=1}^{2006} \mathrm{A}^n=A+A^2=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{3} & \sin\dfrac{2\pi}{3} \\ -\sin\dfrac{2\pi}{3} & \cos\dfrac{2\pi}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

4、設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，若 $AX=B$，則 $X=$______。

答案：$\begin{bmatrix} \dfrac{15}{7} & 1 & \dfrac{8}{7} \\ \dfrac{-3}{7} & 0 & \dfrac{-3}{7} \\ \dfrac{-23}{7} & -1 & \dfrac{-9}{7} \end{bmatrix}$

解析：因 $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-3}{7}\\ \frac{-1}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{2}{7}\\ \frac{-3}{7} & \frac{-10}{7} & \frac{6}{7}\end{bmatrix}$，所以 $X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{15}{7} & 1 & \frac{8}{7}\\ \frac{-3}{7} & 0 & \frac{-3}{7}\\ \frac{-23}{7} & -1 & \frac{-9}{7}\end{bmatrix}$

5、設 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，求 $A^5=$______，$A^4-3A^3+2A^2+A-6I_2=$______。

答案：$\begin{bmatrix}987 & 610\\ 610 & 377\end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix}91 & 60\\ 60 & 31\end{bmatrix}$

解析：(1)因 $\begin{vmatrix}3-x & 2\\ 2 & 1-x\end{vmatrix}=x^2-4x-1$，故 $A^2-4A-I_2=0$

$$A^5=(A^2-4A-I_2)(A^3+4A^2+17A+72I_2)+(305A+72I_2)$$

$$=305A+72I_2=305\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}+72\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}987 & 610\\ 610 & 377\end{bmatrix}$$

(2) $A^4-3A^3+2A^2+A-6I_2=(A^2-4A-I_2)(A^2+A+7I_2)+(30A+I_2)$

$$=30A+I_2=30\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}91 & 60\\ 60 & 31\end{bmatrix}$$

6、設方陣 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin 2\theta & 1+\cos 2\theta\end{bmatrix}$，$0\le\theta\le 2\pi$，若反方陣 A^{-1} 不存在，則 θ 有 n 個，令其爲 θ_1，θ_2，⋯，θ_n，求 $n=$______，$\sum_{k=1}^{n}\theta_k=$______。

答案：6；6π

解析：$\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin 2\theta & 1+\cos 2\theta\end{vmatrix}=0$，$\cos\theta(1+\cos 2\theta)-\sin\theta\sin 2\theta=0$

$\cos\theta(1+\cos 2\theta)-\sin\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta=0$

$\cos\theta(1+\cos 2\theta-2\sin^2\theta)=0$，$2\cos\theta(1-2\sin^2\theta)=0$

$\cos\theta=0$ 或 $\sin\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{4}$，$\frac{7\pi}{4}$

$\sum_{k=1}^{n}\theta_k=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}=\frac{24\pi}{4}=6\pi$

7、若方陣 $A=\begin{bmatrix}5-a & -6 & -6\\ -1 & 4-a & 2\\ 3 & -6 & -4-a\end{bmatrix}$ 沒有反方陣，則 $a=$______。

答案：1，2，2

解析：$\det A=\begin{vmatrix}5-a & -6 & -6\\ -1 & 4-a & 2\\ 3 & -6 & -4-a\end{vmatrix}=0$，$a^3-5a^2+8a-4=0$，$a=1$，2，2

8、設方陣 $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & -2\end{bmatrix}$，若 $A^{-1}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ p & q & r\\ x & y & z\end{bmatrix}$，則 $a+q+z=$______。

答案：$\dfrac{4}{3}$

解析：$A^{-1}=\dfrac{1}{-6}\begin{bmatrix}-4&4&2\\2&-5&-1\\4&-7&1\end{bmatrix}$ $\therefore a+q+z=\dfrac{-8}{-6}=\dfrac{4}{3}$

9、設方陣 $A=\begin{bmatrix}2&1\\4&3\end{bmatrix}$，則 A^{-1} 爲________________。若方陣 $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 滿足 $AB=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$，則 $a-b-c+d=$_____。

答案：$\begin{bmatrix}\dfrac{3}{2}&-\dfrac{1}{2}\\-2&1\end{bmatrix}$；20

解析：$\det A=2$，$A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}3&-1\\-4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{3}{2}&-\dfrac{1}{2}\\-2&1\end{bmatrix}$

因 $AB=4I\Rightarrow B=4A^{-1}I=4A^{-1}=\begin{bmatrix}6&-2\\-8&4\end{bmatrix}$，$\therefore a-b-c+d=6+2+8+4=20$

10、設 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}x&y\\z&u\end{bmatrix}$，若 $A^{50}=B$，則 $x+y+z+u=$______。

答案：0

解析：$A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix}\cos\dfrac{\pi}{4}&-\sin\dfrac{\pi}{4}\\\sin\dfrac{\pi}{4}&\cos\dfrac{\pi}{4}\end{bmatrix}$

$A^{50}=(\sqrt{2})^{50}\begin{bmatrix}\cos\dfrac{50\pi}{4}&-\sin\dfrac{50\pi}{4}\\\sin\dfrac{50\pi}{4}&\cos\dfrac{50\pi}{4}\end{bmatrix}=2^{25}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

$\therefore x=0$，$y=-2^{25}$，$z=2^{25}$，$u=0$，$x+y+z+u=0$

11、設 $A=\begin{bmatrix}3&8\\-2&-5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix}$，若 $AX=B$，求 $X=$______。

答案：$\begin{bmatrix}-2&-29\\1&11\end{bmatrix}$

解析：$A^{-1}=\begin{bmatrix}-5&-8\\2&3\end{bmatrix}$，$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-5&-8\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-29\\1&11\end{bmatrix}$

12、設 ω 爲 1 的立方虛根，$A=\begin{bmatrix}0&\omega^2&0\\0&0&\omega^2\\\omega^2&0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&0&\omega\\\omega&0&0\\0&\omega&0\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\omega A+\omega^2B+C=$？

答案：$\omega A+\omega^2B+C=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$