| 高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：98.02.19 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 選修(Ⅰ) 2-1.2.3 矩陣(A) | 班級 | 三年　　班 | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

一、選擇題 (每題 10 分)

1、( BC ) (複選)對矩陣的乘法，下列性質何者恒成立？（各小題的乘法都是可乘的）

(A)$AB=BA$　(B)$A(B+C)=AB+AC$　(C)$(AB)C=A(BC)$

(D)若$X^2=0$，則$X=0$　(E)$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

解析：(D)設 $X=\begin{bmatrix}0&0\\3&0\end{bmatrix}\neq 0$，但 $X^2=\begin{bmatrix}0&0\\3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

(E)$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$，但 $AB\neq BA$

2、( B ) 關於矩陣的乘法運算請選出正確的選項：

(A)若 $AB=AC$ 且 $A$ 爲方陣，$A\neq 0$，則 $B=C$

(B)$I(B+C)=(B+C)I$，其中 $I$ 爲單位矩陣　(C)$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

(D)$A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$　(E)$A^{-1}B^{-1}=(AB)^{-1}$

解析：(A)反例：$\begin{bmatrix}4&-2\\10&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10&-2\\-25&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2\\10&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&-1\\-3&-1\end{bmatrix}$，但$\begin{bmatrix}-1&0\\3&1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}-4&-1\\-3&-1\end{bmatrix}$

(C) $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$(矩陣乘法不具交換性)

(D) $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$(同上)

(E) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

3、( A ) 設二階方陣 $X$ 滿足 $2A+3B+X=3A-B+2X$，設 $X=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$，則

$a+b+c+d=$ (A)94 (B)85 (C)70 (D)60 (E)28

解析：$X=-A+4B=-\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&22\\25&28\end{bmatrix}$，$a+b+c+d=94$

4、( D ) 設 $A$，$B$ 爲二階方陣，若 $3A+B=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，$A-B=\begin{bmatrix}3&6\\13&-4\end{bmatrix}$，且 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，

則$a+b+c+d=$ (A)1 (B)3 (C)5 (D)7 (E)9

解析：二式相加 $4A=\begin{bmatrix}4&8\\16&0\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}1&2\\4&0\end{bmatrix}$ $\therefore a+b+c+d=7$

5、( C ) 若方陣 $A=\begin{bmatrix}1&-2\\3&6\end{bmatrix}$，則 $A^2-7A+12I_2=$

(A)$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}-1&0\\1&4\end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}0&2\\1&1\end{bmatrix}$ (E)$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

解析：$A^2-7A+12I_2=\begin{bmatrix}1&-2\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\3&6\end{bmatrix}-7\begin{bmatrix}1&-2\\3&6\end{bmatrix}+12\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

6、( E ) 在矩陣$[a_{ij}]_{3\times 4}$中，設$a_{ij}=i+3j-3$，$i=1$，2，3，$j=1$，2，3，4，求$a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}=$

(A)2　(B)5　(C)8　(D)11　(E)26

解析：$a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}=2+5+8+11=26$

7、( C ) 若$\begin{bmatrix}a+b&c+d\\c+2d&a-2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\5&6\end{bmatrix}$，則$a^2+b^2+c^2+d^2=$ (A)9 (B)18 (C)27 (D)36 (E)45

解析：$\begin{cases}a+b=3\\a-2b=6\end{cases}\Rightarrow a=4$，$b=-1$，$\begin{cases}c+d=4\\c+2d=5\end{cases}\Rightarrow c=3$，$d=1$

$a^2+b^2+c^2+d^2=16+1+9+1=27$

8、( C ) 某國政府長期追蹤全國國民的經濟狀況，依訂定的標準將國民分爲高收入和低收入兩類。統計發現高收入的人口一直是低收入人口的兩倍，且知在高收入的人口中，每年有四成會轉變爲低收入。請問在低收入的人口中，每年有幾成會轉變爲高收入？

(A)6 成 (B)7 成 (C)8 成 (D)9 成

解析：設低收入的人口中每年有 $P$ 成會轉變爲高收入，

| $k$ 年 \ $k+1$年 | 高收入 | 低收入 |
|---|---|---|
| 高收入 | 0.6 | $P$ |
| 低收入 | 0.4 | $1-P$ |

轉移矩陣$\begin{bmatrix}0.6 & P\\0.4 & 1-P\end{bmatrix}$，因爲每年高收入人口數維持在低收入人口數的 2 倍，

故$\begin{bmatrix}0.6 & P\\0.4 & 1-P\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{6}{10}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}P=\frac{2}{3}\Rightarrow P=\frac{8}{10}$，故每年有八成會轉變爲高收入。

9、( 全 ) (複選)下列何者恆成立？ (A) $(A^t)^t=A$ (B) $(A+B)^t=A^t+B^t$ (C) $(A-B)^t=A^t-B^t$

(D) $r(A+B)=rA+rB$ (E) $(rs)A=r(sA)$

10、( BCD ) (複選)若$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\\1&-1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，則下列何者成立？

(A) $a=2$ (B) $b=3$ (C) $c+d=4$ (D) $a+b=1$ (E) $abcd<0$

解析：$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\\1&-1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&3\\-5&9\end{bmatrix}$ $\therefore a=-2$，$b=3$，$c=-5$，$d=9$

## 二、填充題 (每題 10 分)

1、設$\begin{bmatrix}x-y&2&-3\\4&-5&6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}z&-y&1\\-5&4&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y+z&x-z&-1\\-6&x+y&-6\end{bmatrix}$，求 $x=$_____，$y=$_____，$z=$_____。

答案：1；2；3

解析：$x-y+2z=y+z$，$2-2y=x-z$，$-5+8=x+y$，解之得 $x=1$，$y=2$，$z=3$

2、設$\begin{bmatrix}x-2y&a-b\\a+b&3x-4y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\3&2\end{bmatrix}$，則 $ax-by=$______。

答案：3

解析：$x-2y=0$，$3x-4y=2\Rightarrow x=2$，$y=1$

$a-b=1$，$a+b=3\Rightarrow a=2$，$b=1$，故 $ax-by=4-1=3$

3、 若 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}$，求 $AB=$______。

答案：$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

4、 若方陣 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，求 $A^2=$______，若 $A^4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，且 $0<\theta<\pi$，求 $\theta=$______。

答案：$\begin{bmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}$；$\frac{\pi}{2}$

解析：旋轉矩陣 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$

(1)$A^2=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}$

(2)$A^4=\begin{bmatrix}\cos 4\theta & -\sin 4\theta\\ \sin 4\theta & \cos 4\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，則 $\cos 4\theta=1$，$\sin 4\theta=0\Rightarrow 4\theta=2\pi\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$

5、 設 $A=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4}\\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}$，若 $A^n=I_2$，求最小自然數 $n=$______。

答案：24

解析：旋轉矩陣

$$A=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4})\\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})\\ \sin(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}) & \cos(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{12} & -\sin\frac{\pi}{12}\\ \sin\frac{\pi}{12} & \cos\frac{\pi}{12}\end{bmatrix}$$

$A^n=\begin{bmatrix}\cos(\frac{n\pi}{12}) & -\sin(\frac{n\pi}{12})\\ \sin(\frac{n\pi}{12}) & \cos(\frac{n\pi}{12})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$\cos\frac{n\pi}{12}=1$，$\sin\frac{n\pi}{12}=0\Rightarrow\frac{n\pi}{12}=2k\pi$，$n=24k$，$n$ 最小 24

6、設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 8 & 5\end{bmatrix}$，若 $X+Y=A$，$X-Y=B$，求 $X=$______，$Y=$______。

答案：$\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -3 & -3\end{bmatrix}$

解析：解聯立 $\begin{cases}X+Y=A\\ X-Y=B\end{cases}\Rightarrow X=\frac{1}{2}(A+B)=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}$，$Y=\frac{1}{2}(A-B)=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -3 & -3\end{bmatrix}$

7、設 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}3 & 4 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$，若 $3X-2A+3B=2X+5C$，求 $X=$______。

答案：$\begin{bmatrix}14 & 20 & -29\\ 29 & 8 & 2\end{bmatrix}$

解析：移項，$X=2A-3B+5C=\begin{bmatrix}14 & 20 & -29\\ 29 & 8 & 2\end{bmatrix}$

8、設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$，若 $AB=\begin{bmatrix}a & b & c\\ x & y & z\end{bmatrix}$，則 $a+y+c=$______。

答案：10

解析：$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 7\\ -5 & 3 & 3\end{bmatrix}$ ，$\therefore a+y+c=0+3+7=10$

9、設方陣 $A=\begin{bmatrix}5 & 5 & 5\\ -3 & -3 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，

(1)若 $A^2=kA$，則 $k=$？

(2)若 $A+A^2+\cdots+A^8=nA$，則 $n=$？

(3)若 $(I+A)^8=I+mA$，則 $m=$？

答案：(1)$A^2=\begin{bmatrix}5 & 5 & 5\\ -3 & -3 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 5 & 5\\ -3 & -3 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 15 & 15\\ -9 & -9 & -9\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}=3A$，$\therefore k=3$

(2)因 $A^2=3A$，$\therefore A^3=3A^2=9A=3^2A$，$A^4=3^2A^2=3^3A$，$A^5=3^4A$，$A^6=3^5A$，……

$\therefore\ A+A^2+\cdots+A^8=(1+3+3^2+\cdots+3^7)A=[\dfrac{1\cdot(1-3^8)}{1-3}]A=3280A$

(3)$(I+A)^2=I+2A+A^2=I+2A+3A=I+5A$

$(I+A)^4=(I+5A)^2=I+10A+25A^2=I+85A$

$(I+A)^8=(I+85A)^2=I+170A+7225A^2=I+21845A$ $\therefore m=21845$

10、設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}5 & 8 & 4\\ 7 & 3 & 0\end{bmatrix}$，求(1)$(A+B)^t=$？ (2)$A^t+B^t=$？

答案：(1)$(A+B)^t=\begin{bmatrix}6 & 10 & 7\\ 11 & 8 & 6\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}6 & 11\\ 10 & 8\\ 7 & 6\end{bmatrix}$，(2)$A^t+B^t=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 7\\ 8 & 3\\ 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 11\\ 10 & 8\\ 7 & 6\end{bmatrix}$

11、設 $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，(1)若 $A^n=I_2$，則最小自然數 $n=$？ (2)求 $\sum_{n=1}^{100}A^n=$？

答案：(1)4 (2)0

解析：(1) $A=\begin{bmatrix}\cos\frac{3\pi}{2} & \sin\frac{3\pi}{2}\\ -\sin\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}\cos\frac{3n\pi}{2} & \sin\frac{3n\pi}{2}\\ -\sin\frac{3n\pi}{2} & \cos\frac{3n\pi}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}\cos\frac{3n\pi}{2}=1\\ \sin\frac{3n\pi}{2}=0\end{cases}$，$n$ 至少要 4

(2)因 $A+A^2+A^3+A^4=0$，故 $\sum_{n=1}^{100}A^n=(A+A^2+A^3+A^4)+\ldots+(A^{97}+A^{98}+A^{99}+A^{100})=0$

12、使用圓球和球袋作機率實驗。球只有黑白兩色，袋中裝有兩顆球，因此只有三種可能情況：雙白球稱爲狀態 1，一白球一黑球稱爲狀態 2，雙黑球稱爲狀態 3。對這袋球做如下操作：自袋中隨機移走一球後，再隨機移入一顆白球或黑球（移入白球或黑球的機率相等）。每次操作可能會改變袋中球的狀態。

(1) (　) 如果現在袋子內的球是一白一黑（即狀態 2），請問經過一次操作後，袋 中會變成兩顆黑球（狀態 3）的機率是多少？(1) $\frac{1}{4}$　(2) $\frac{1}{3}$　(3) $\frac{1}{2}$　(4) $\frac{2}{3}$

(2) (　) 把從狀態 $j$ 經過一次操作後會變成狀態 $i$ 的機率記爲 $p_{ij}$（例如上題的機率就是 $p_{32}$），由此構成一 $3\times3$ 矩陣 $P$。針對矩陣 $P$，下列選項有哪些是正確的？

(1) 矩陣 $P$ 滿足 $p_{ij}=p_{ji}$　(2) $P$ 是轉移矩陣（即每行之和皆爲 1）

(3) $P$ 的行列式值爲正　(4) $p_{11}=p_{33}$

(3) (　) 把矩陣 $P$ 連續自乘 $k$ 次後的矩陣記爲 $P^k$。已知矩陣 $P^k$ 中 $(i, j)$ 位置的值，等於從狀態 $j$ 經過 $k$ 次操作後，變成狀態 $i$ 的機率。針對多次操作，下列選項有哪些是正確的？

(1) 從一白一黑（狀態 2）開始，經過 $k$ 次操作後，變成雙白（狀態 1）的機率與變成雙黑（狀態 3）的機率相等。

(2) 從雙白（狀態 1）開始，經過 $k$ 次操作後，回到雙白（狀態 1）的機率，比變成雙黑（狀態 3）的機率大。

(3) 從雙白（狀態 1）開始，經過 $k$ 次操作後，回到雙白（狀態 1）的機率，會隨著次數 $k$ 的增加而遞減。

(4) 不論從哪種狀態開始，經過 $k$ 次操作後，變成任何一種狀態的機率，會隨著 $k$ 趨近於無窮大而趨近於 $\frac{1}{3}$。

答案：(1) (1)　(2) (2)(4)　(3) (1)(2)(3)

解析：(1) 將第 $k$ 次狀態到第 $k+1$ 次狀態的機率列表如下：

| $k$ 次 \ $k+1$ 次 | 狀態 1（2W） | 狀態 2（1W1B） | 狀態 3（2B） |
|---|---|---|---|
| 狀態 1（2W） | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 |
| 狀態 2（1W1B） | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 狀態 3（2B） | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |

由上表知：一白球一黑球經過一次操作後變成兩顆黑球的機率爲 $\frac{1}{4}$。

(2) 承上題，轉移矩陣 $P$ 爲 $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(1)因為 $p_{32}=\frac{1}{4}\neq p_{23}=\frac{1}{2}$，所以矩陣 $P$ 不滿足 $p_{ij}=p_{ji}$ 。

(2)因為矩陣 $P$ 各行和為 1 且 $0\le p_{ij}\le 1$，所以 $P$ 是轉移矩陣。

(3)$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{8}+0+0-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=0$

(4)因為 $p_{11}=\frac{1}{2}$，而 $p_{33}=\frac{1}{2}$，所以 $p_{11}=p_{33}$

(3)(1)設原始狀態矩陣為 $A_0=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，則

$$A_1=PA_0=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$A_2=PA_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$A_3=PA_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A_k=PA_{(k-1)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

由一白一黑開始，經過 $k$ 次操作得雙白與雙黑的機率相等。

(2)設原始狀態矩陣為 $B_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，則

$$B_1=PB_0=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2=PB_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$B_3=PB_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{16} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

$$B_4 = PB_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{16} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{32} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{7}{32} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

從雙白狀態開始經過 $k$ 次操作後回到雙白狀態比回到雙黑狀態的機率大。

(3)由(2)知：$\frac{1}{2} > \frac{3}{8} > \frac{5}{16} > \frac{9}{32} > \cdots$，故從雙白狀態經過 $k$ 次操作回到雙白狀態的機率會隨著次數 $k$ 的增加而遞減。

(4)當 $k \to \infty$ 時，馬可夫矩陣滿足 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

因此，可得一次方程組 $\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b = a \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = b \\ \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c = c \\ a + b + c = 1 \end{cases}$

解之，得 $a = \frac{1}{4},\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{4}$。故操作 $k$ 次，當 $k \to \infty$ 時，不管哪一種狀態，變成雙白的機率恆爲 $\frac{1}{4}$，雙黑的機率恆爲 $\frac{1}{4}$，而一白一黑的機率恆爲 $\frac{1}{2}$。