<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高三平時測驗　　日期：98.03.25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">轉移矩陣</td><td>班級</td><td>普三　　班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、填充題(每題 10 分)

1. 設$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，若$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=O$，求$A^3-2A^2-17A-2I=$______。

答案：$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

解析：若$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=O$ (特徵方程式)

$\because A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2-(1+4)A+(1\times4-2\times3)I=A^2-5A-2I=O$

利用除法原理　$A^3-2A^2-17A-2I=(A^2-5A-2I)(A+3I)+4I=O+4I=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

2. 若$A=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$，求$A^4=$______。

答案：$\begin{bmatrix} 24 & 24 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$

解析：$A^2=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=2A$

$A^3=A^2\cdot A=2AA=2A^2=2\cdot 2A=2^2A$，$A^4=2^3A=\begin{bmatrix} 24 & 24 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$

3. 有A、B兩家有線電視，每隔一年，A台有 0.3 收視戶改訂B台，0.7 不變。B台有 0.6 改訂A台，0.4 不變。且目前兩台客戶各占一半，則二年後A客戶占______。

答案：0.665

解析：

	A	B
A	0.7	0.6
B	0.3	0.4

$A=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \Rightarrow P_2=A^2P_0=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.67 & 0.66 \\ 0.33 & 0.34 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.665 \\ 0.335 \end{bmatrix}\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$

4. 設有甲報，乙報兩種報紙，根據統計當第一次訂閱甲報經一年後仍訂甲報者爲 60%，改訂乙報者爲 40%，第一次訂閱乙報經一年後仍訂乙報者爲 50%，而改訂甲報者爲 50%。(如果總訂戶不變)

(1) 轉移矩陣爲____。(2) 若訂甲報有 40%，訂乙報有 60%，則經一年後訂閱甲報的有____%。

答案：(1)$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$；(2)54

解析：

	甲	乙
甲	0.6	0.5
乙	0.4	0.5

(1) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$　　(2) $P_0=\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$，一年後 $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.54 \\ 0.46 \end{bmatrix}$

5. 設$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$J=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(1) 若$J^5=k\cdot J^2$，則常數$k=$_______。 (2) 若 $(I+\frac{1}{2}J)^4=aI+bJ$，則$a-2b=$______。

答案： (1) 8；(2) -14

解析： $J=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$　$J^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=2J$

$\Rightarrow J^3=J^2\cdot J=2J^2=2\cdot 2J=4J=2^2J$

$\Rightarrow J^4=J^3\cdot J=2^2JJ=2^3J\ldots$得$J^n=2^{n-1}J\ (n\in N)$

(1) $J^5=2^4J$，$J^2=2J$，　$\therefore J^5=8J^2=kJ^2$，故$k=8$

(2) $(I+\frac{1}{2}J)^4=I^4+4I^3(\frac{1}{2}J)+6I^2(\frac{1}{2}J)^2+4I(\frac{1}{2}J)^3+(\frac{1}{2}J)^4$

$=I+4\cdot\frac{J}{2}+6\cdot\frac{J^2}{2^2}+4\cdot\frac{J^3}{2^3}+\frac{J^4}{2^4}$

$=I+4\cdot\frac{1}{2}J+6\cdot\frac{2J}{2^2}+4\cdot\frac{2^2J}{2^3}+\frac{2^3J}{2^4}$

$=I+\frac{1}{2}(4+6+4+1)J=I+\frac{15}{2}J=aI+bJ$

得$a=1$，$b=\frac{15}{2}$，故$a-2b=1-2\cdot\frac{15}{2}=-14$

6. 一實驗室培養兩種菌，令$\langle a_n\rangle$和$\langle b_n\rangle$分別代表兩種培養菌在時間點n的數量，彼此有如下的關係：$a_{n+1}=2(a_n+b_n)$，$b_{n+1}=2b_n$（$n=0,1,2,\ldots$），

若二階方陣$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足$\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，（其中$n=0,1,2,\ldots$），

則$a=$________，$b=$________，$c=$________，$d=$________。

答案： 8，24，0，8

解析： 因$a_{n+1}=2(a_n+b_n)$，$b_{n+1}=2b_n$

$\therefore\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a_n+2b_n \\ 2b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$,

$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

7. 由統計資料知，某市在晴天之後隔天爲雨天的機率爲$\frac{1}{3}$，而在雨天之後也是雨天的機率爲$\frac{1}{2}$，

若開始觀察當天爲晴天，即$X_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，試求$X_1$=______，$X_2$=______。

答案：$\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0.61\\0.39\end{bmatrix}$

解析：

	晴	雨
晴	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
雨	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

，$P=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$X_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

(1) $X_1=PX_0=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

(2) $X_2=PX_1=P^2X_0$

$$P^2=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{18}&\frac{7}{12}\\\frac{7}{18}&\frac{5}{12}\end{bmatrix},$$

$$X_2=PX_1=P^2X_0=\begin{bmatrix}\frac{11}{18}&\frac{7}{12}\\\frac{7}{18}&\frac{5}{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{18}\\\frac{7}{18}\end{bmatrix}\doteqdot\begin{bmatrix}0.61\\0.39\end{bmatrix}$$

8. 設$A=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$，即$A^2+pA+qI_2=O$，$p$、$q\in R$，則

(1) 數對 (p,q)=______；(2) $A^4-5A^3-A^2-4A$=______。

答案： (1) $(-5,-2)$；(2) $\begin{bmatrix}3&3\\2&6\end{bmatrix}$

解析：

(1) $\det(A-xI)=\begin{vmatrix}1-x&3\\2&4-x\end{vmatrix}=(1-x)(4-x)-6=x^2-5x-2\Rightarrow A^2-5A-2I=O$； $(p,q)=(-5,-2)$

(2) $A^2-5A-2I=O$，根據除法原理

$\therefore A^4-5A^3-A^2-4A=(A^2+I)(A^2-5A-2I)+A+2I_2=O+\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3\\2&6\end{bmatrix}$

9. 設α，β爲二角，並令$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$，則$a$=______，$b$=______。

答案： $\cos(\alpha-\beta)$，$\sin(\beta-\alpha)$

解析：旋轉矩陣： $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(-\beta) & -\sin(-\beta)\\ \sin(-\beta) & \cos(-\beta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\beta-\alpha) & \sin(\beta-\alpha)\\ -\sin(\beta-\alpha) & \cos(\beta-\alpha)\end{bmatrix}$$

$a=\cos(\alpha-\beta)$ ；$b=\sin(\beta-\alpha)$

10. 某牧場採一貫化作業系統自產自銷，每日生產羊肉 1000 斤，牛肉 800 斤，豬肉 1200 斤，已知 A、B、C、D 四個市場每斤之批發價如右：假設由牧場運往 A、B、C、D 四個市場的運費相同，則應將這些肉品運到那一市場，可使獲利最多？最多多少元？______。

肉類 元/斤 市場	羊肉	牛肉	豬肉
A	70	100	35
B	80	80	40
C	70	110	30
D	60	90	60

答案： 運到 D 市場獲利 204000 元

解析：$\begin{bmatrix}70 & 100 & 35\\ 80 & 80 & 40\\ 70 & 110 & 30\\ 60 & 90 & 60\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1000\\ 800\\ 1200\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}192000\\ 192000\\ 194000\\ 204000\end{bmatrix}\begin{matrix}\to A\text{獲利}\\ \to B\text{獲利}\\ \to C\text{獲利}\\ \to D\text{獲利}\end{matrix}$

11. $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma\\ -\sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}$，若$\alpha+\beta+\gamma=\pi$，則$ABC=$______。

答案： $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

解析： $ABC=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta+\gamma) & \sin(\alpha+\beta+\gamma)\\ -\sin(\alpha+\beta+\gamma) & \cos(\alpha+\beta+\gamma)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\pi & \sin\pi\\ -\sin\pi & \cos\pi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

12. 設$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$，$A^2-3A=$______，又$A^3-5A^2+12A=$______。

答案： $\begin{bmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}12 & 0\\ 0 & 12\end{bmatrix}$

解析：設$A-xI=O\Rightarrow\begin{bmatrix}1-x & 2\\ -2 & 2-x\end{bmatrix}=O$，特徵方程式爲$x^2-3x+6=0\Rightarrow A^2-3A=-6I=\begin{bmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}$

$\because A^2-3A+6I=O\Rightarrow A(A^2-3A+6I)=O \Rightarrow A^3-3A^2+6A=O$

由除法原理$A^3-5A^2+12A=(A-I)(A^2-3A+6I)+12I=12I$，故$A^3-3A^2+6A=\begin{bmatrix}12 & 0\\ 0 & 12\end{bmatrix}$

13. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，則(1) $A^3=$______ (2) $n\in N$，$A^n=$______。

答案：(1)$\begin{bmatrix}1 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$；(2)$\begin{bmatrix}1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

解析：$A^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&(1+1+1)\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&(1+2+3)\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}1&3&(1+2+3)\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&(1+2+3+4)\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&10\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………..

$$A^{\mathrm{n}}=\begin{bmatrix}1&(n-1)&[1+2+3+.....+(n-1)]\\0&1&(n-1)\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&n&(1+2+3+......+n)\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&n&\dfrac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$$

14. 若矩陣$A=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$，則$A^2=$______。若$A^4=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，且 $0<\theta<\pi$，則$\theta=$______。

答案： $\begin{bmatrix}\cos2\theta&-\sin2\theta\\\sin2\theta&\cos2\theta\end{bmatrix}$, $\dfrac{\pi}{2}$

解析：旋轉矩陣$A=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$, $A^2=\begin{bmatrix}\cos2\theta&-\sin2\theta\\\sin2\theta&\cos2\theta\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^4=\begin{bmatrix}\cos4\theta&-\sin4\theta\\\sin4\theta&\cos4\theta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\cos 4\theta=1\\\sin 4\theta=0\end{cases}\Rightarrow\Rightarrow 4\theta=2\pi,\ \theta=\frac{\pi}{2}$$

15. 甲箱內有 2 白球，乙箱內有三紅球，現在每次自各箱中隨機取一個球交換，令 k_i 表有 i 個紅球在甲箱內之事件

(1) 求轉移矩陣 A=______。(2) 在交換二次後，有二紅球在甲箱內之機率為______。

答案： (1)$\begin{bmatrix}0&\frac{1}{6}&0\\1&\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$；　(2)$\dfrac{1}{6}$

解析：k_0：甲箱內有 2 白，乙箱內有 3 紅；

k_1：甲箱內有一白一紅，乙箱內有 1 白 2 紅

k_2：甲箱內有 2 紅，乙箱內有 2 白一紅

k_0：變成k_0，k_1，k_2之機率依次爲 0，1，0。

k_1：變成k_0，k_1，k_2之機率依次爲$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$。

k_2：變成k_0，k_1，k_2之機率依次爲 0，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$，

後＼前	k_0	k_1	k_2
k_0	0	$\frac{1}{6}$	0
k_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
k_2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(1) $A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

(2) 已知$P_{(0)}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，則$P_{(1)}=AP_{(0)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$P_{(2)}=AP_{(1)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

16. $A=\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$且$A^3=m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，則$m=$______。

答案： -8

解析：$A^2=\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix}$，

$A^3=A\cdot A^2=\begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}=-8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow m=-8$

17. $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，則$A^n=$______。(n爲自然數)

答案：$\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$

解析：$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

……………………………………..

$$A^{n}=\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

18. 假設有一個學生，他的讀書習慣是：如果他在今晚讀書，則他在明晚有 70 % 的機會不讀書；如果他在今晚不讀書，則他在明晚有 60 % 的機會不讀書。
(1) 試求其轉移矩陣為_____。(2) 若已知他在星期一讀書，則他在星期三讀書的機會為_____。

答案： (1)$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$；(2) 0.37

解析：

	讀	不讀
讀	0.3	0.4
不讀	0.7	0.6

(1) $A=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$，$P_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(2) $P_2=AP_1=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}$,

$P_3=AP_2=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.37 \\ 0.63 \end{bmatrix}\ \Rightarrow 0.37$

19. 設$A=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$，$i=\sqrt{-1}$，$A^{87}=$______。

答案： $\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

解析：$A=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

$A^2=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

$A^3=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

$A^4=\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$……….. ,

$\Rightarrow\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，…….四個矩陣一週期

$A^{87}=A^{84}\cdot A^3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$