高雄市明誠中學 高三平時測驗 日期：98.03.16					
範圍	2-4、5 行列式	班級	普三　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選)設 a，b，c 表△ABC 三邊長，若 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=0$，則△$ABC$ 爲

(A)等腰三角形　(B)銳角三角形　(C)直角三角形　(D)正三角形　(E)鈍角三角形

【解答】(A)(B)(D)

【詳解】公式：(1)$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0 \Rightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$$

$\because$ a，b，c 表△ABC 的三邊長　$\therefore$ $a+b+c>0$

$\therefore$ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Rightarrow a=b=c \Rightarrow$△$ABC$ 爲正三角形

2. (複選)試問下列行列式，其值何者爲 0？

(A) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$　(C) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$　(D) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$

(E) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$，$a\neq b\neq c\neq a$

【解答】(B)(D)

【詳解】

(A) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=12$

(B) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \times 1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}=0$

（第一，三列成比例）

(C) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$

(D) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times 1 \\ \times 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$

(E) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$（$\because$ $a \neq b \neq c \neq a$）(凡德孟公式)

二、填充題(每題 10 分)

1. 試求 $\begin{vmatrix} 12 & 108 & 72 \\ 16 & 64 & 0 \\ 52 & 0 & 13 \end{vmatrix}$ 之值為__________。

【解答】-252096

【詳解】原式 $= 12 \times 16 \times 13 \times \begin{vmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 \times 16 \times 13 \times (-101) = -252096$

2. 設三平面分別為E_1：$3x+5y-z=-1$，E_2：$x-y+4z=11$，E_3：$x+7y-9z=-23$，求三平面共同的交點________________________。

【解答】$\begin{cases} x = \dfrac{-19t+7}{13} \\ y = t \\ z = \dfrac{8t+34}{13} \end{cases}$，$t \in R$

【詳解】$\begin{cases} E_1: 3x+5y-z=-1 & \cdots\cdots① \\ E_2: x-y+4z=11 & \cdots\cdots② \\ E_3: x+7y-9z=-23 & \cdots\cdots③ \end{cases}$

由① − ② × 3 得 $8y-13z=-34$……④，由③ − ②得 $8y-13z=-34$……⑤

由④，⑤知有無限多組解，其解為$\begin{cases} x = 2+19t \\ y = -1-13t \\ z = 2-8t \end{cases}$ $, t \in R$

3. 已知$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$，行列式$\begin{vmatrix} 2a-3b & 3b-4c & 5c \\ 2d-3e & 3e-4f & 5f \\ 2g-3h & 3h-4i & 5i \end{vmatrix}$的值 $=$ __________。

【解答】90

【詳解】

$$\text{原式}=5\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} & \times 4 & \end{array}\\ \begin{vmatrix}2a-3b & 3b-4c & c\\ 2d-3e & 3e-4f & f\\ 2g-3h & 3h-4i & i\end{vmatrix}\end{array}=5\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} & \times 1 & \end{array}\\ \begin{vmatrix}2a-3b & 3b & c\\ 2d-3e & 3e & f\\ 2g-3h & 3h & i\end{vmatrix}\end{array}$$

$$=5\begin{vmatrix}2a & 3b & c\\ 2d & 3e & f\\ 2g & 3h & i\end{vmatrix}=5\times 2\times 3\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=(5\times 2\times 3)\times 3=90$$

4. 解方程組$\begin{cases}21x+22y+27z=50\\ 22x+23y+28z=51\\ 23x+24y+25z=52\end{cases}$，則(x，y，z) = ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(– 28，29，0)

【詳解】克拉瑪公式

$$\triangle=\begin{vmatrix}21 & 22 & 27\\ 22 & 23 & 28\\ 23 & 24 & 25\end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{array}=\begin{vmatrix}21 & 22 & 27\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}=4$$

$$\triangle_x=\begin{vmatrix}50 & 22 & 27\\ 51 & 23 & 28\\ 52 & 24 & 25\end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{array}=\begin{vmatrix}50 & 22 & 27\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}=-112$$

$$\triangle_y=\begin{vmatrix}21 & 50 & 27\\ 22 & 51 & 28\\ 23 & 52 & 25\end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{array}=\begin{vmatrix}21 & 50 & 27\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}21 & 29 & 6\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{vmatrix}=116$$

$$\triangle_z=\begin{vmatrix}21 & 22 & 50\\ 22 & 23 & 51\\ 23 & 24 & 52\end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{array}=\begin{vmatrix}21 & 22 & 50\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{\triangle_x}{\triangle}=\dfrac{-112}{4}=-28\\ y=\dfrac{\triangle_y}{\triangle}=\dfrac{116}{4}=29\\ z=\dfrac{\triangle_z}{\triangle}=\dfrac{0}{4}=0\end{cases}\qquad \therefore\quad (x，y，z)=(-28，29，0)$$

5. 設方程組$\begin{cases}3x+4y+5z=kx\\ 3x+4y+5z=ky\\ 3x+4y+5z=kz\end{cases}$恰有一解，則$k$值有何限制？＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$k\neq 0$，12

【詳解】原式 $\Rightarrow$ $\begin{cases}(3-k)x+4y+5z=0\\ 3x+(4-k)y+5z=0\\ 3x+4y+(5-k)z=0\end{cases}$ 爲齊次方程組恰有一解$\Rightarrow$ $\triangle\neq 0$

$$\triangle = \begin{vmatrix} 3-k & 4 & 5 \\ 3 & 4-k & 5 \\ 3 & 4 & 5-k \end{vmatrix} = (12-k)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 4-k & 5 \\ 1 & 4 & 5-k \end{vmatrix} = (12-k)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{vmatrix}$$

$(\times 1)$ $(\times 1)$

$$= (12-k)\begin{vmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{vmatrix} = (12-k)\cdot k^2 \neq 0\text{，即 } k \neq 0\text{，}12$$

6. 設方程組$\begin{cases} 2x+2ay+2a^2z=0 \\ 2x+8y+32z=0 \\ 2x+34y+578z=0 \end{cases}$ 有無限多解，則$a=$__________。

【解答】4，17

【詳解】齊次方程組有無限多解，則$\triangle=0$

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 2a & 2a^2 \\ 2 & 8 & 32 \\ 2 & 34 & 578 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \\ 1 & 17 & 17^2 \end{vmatrix} = 8(a-4)(4-17)(17-a)=0 \quad \Rightarrow \quad a=4\text{，}17$$

7. 求$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 7^2 & 8^2 & 9^2 \end{vmatrix}$之值為__________。

【解答】-216

【詳解】

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 7^2 & 8^2 & 9^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 5 \\ 4^2 & 5^2 & 11 \\ 7^2 & 8^2 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 16 & 9 & 11 \\ 49 & 15 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 16 & 9 & 2 \\ 49 & 15 & 2 \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$ $\times(-1)$ $\times(-1)$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 15 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 49 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 16 & 9 \\ 49 & 15 \end{vmatrix} = (18-30)-3(32-98)+2(240-441) = -216$$

8. 行列式$\begin{vmatrix} 42 & 42 & 84 \\ 35 & 36 & 37 \\ 42 & 44 & 48 \end{vmatrix} =$__________。

【解答】1260

【詳解】

$$\begin{vmatrix} 42 & 42 & 84 \\ 35 & 36 & 37 \\ 42 & 44 & 48 \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 36 \\ 35 & 36 & 37 \\ 42 & 44 & 48 \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 36 \\ 35 & 36 & 37 \\ 7 & 8 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 36 \\ 35 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1260$$

$\times(-1)$ $\times(-1)$

9. 已知空間中四平面E_1：$x-2y+3z=5$，E_2：$2x+y-3z=-3$，E_3：$3x+y+2z=8$，E_4：$x+3y+4z=k$恰有一交點，則$k=$__________。

【解答】12

【詳解】三平面$\begin{cases} E_1：x-2y+3z=5 \\ E_2：2x+y-3z=-3 \\ E_3：3x+y+2z=8 \end{cases}$解之，交點(1，1，2)

又四平面交於一點　∴　(1，1，2) $\in E_4$　代入$\Rightarrow$　$1+3+8=k$　$\Rightarrow$　$k=12$

10.空間中四點$A(1，1，1)$，$B(1，2，-7)$，$C(3，4，5)$，$D(4，5，-7)$，則四面體$ABCD$之體積爲＿＿＿＿＿。

【解答】6

【詳解】$\overrightarrow{AB}=(0，1，-8)$，$\overrightarrow{AC}=(2，3，4)$，$\overrightarrow{AD}=(3，4，-8)$

$$\text{四面體 } ABCD \text{ 之體積 } =\frac{1}{6}\text{平行六面體體積 } =\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & 1 & -8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -8 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}|36|=6$$

11.若$a\in R$且方程組$\begin{cases} (1-a)x+3y+3=0 \\ x+(3-a)y+3=0 \\ x+3y+(3-a)=0 \end{cases}$恰有一解，則$a$之値=＿＿＿＿＿。

【解答】7

【詳解】方程組恰有一解　$\Rightarrow$　平面上三直線共點

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-a & 3 & 3 \\ 1 & 3-a & 3 \\ 1 & 3 & 3-a \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad a^2(7-a)=0 \quad\Rightarrow\quad a=0，7$$

但當 $a=0$ 時　$\Rightarrow$　三直線重合　$\Rightarrow$　無限多解，不合

12.設k爲一正數，若$A(3，2，2)$，$B(5，k-1，1)$，$C(1，1，0)$，$D(-1，k^2+2，1)$四點共平面，則k爲＿＿＿＿＿。

【解答】1

【詳解】A，B，C，D 四點共平面，則$\overrightarrow{AB}=(2，k-3，-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2，-1，-2)$，$\overrightarrow{AD}=(-4，k^2，-1)$；三向量所張之平行六面體體積爲 0

即$\begin{vmatrix} 2 & k-3 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & k^2 & -1 \end{vmatrix}=0$　$\Rightarrow$　$k^2+k-2=0$　$\Rightarrow$　$k=1，-2$（不合，因 $k>0$）

13.設 $0\le x\le 2\pi$，解$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \sin x & \sin^2 x \end{vmatrix}=0$，則$x=$＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，$\frac{3\pi}{2}$

【詳解】$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \sin x & \sin^2 x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & (-1) & (-1)^2 \\ 1 & \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 \\ 1 & \sin x & \sin^2 x \end{vmatrix}=[(-1)-\frac{1}{2}](\frac{1}{2}-\sin x)[\sin x-(-1)]=0$

$$\Rightarrow \quad \sin x=\frac{1}{2} \text{ 或 } \sin x=-1 \text{ 且 } 0\le x\le 2\pi\text{，則 } x=\frac{\pi}{6} \text{ 或 } \frac{5\pi}{6} \text{ 或 } \frac{3\pi}{2}$$

14.若三平面$kx+5y+z=0$，$x-ky-z=-2k$，$2x+ky-z=-3$ 相交於一直線，則$k=$ ________。

【解答】1

【詳解】

$$\triangle=\begin{vmatrix} k & 5 & 1 \\ 1 & -k & -1 \\ 2 & k & -1 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad 2k^2+3k-5=0 \quad\Rightarrow\quad k=1，\frac{-5}{2}$$

$$\triangle_x=\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -2k & -k & -1 \\ -3 & k & -1 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad 2k^2+13k-15=0 \quad\Rightarrow\quad k=1，\frac{-15}{2}$$

三平面相交於一直線即無限多解 $\Rightarrow$ $\triangle=\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$，故 $k=1$

15.不等式$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 5 & 25 & 1 \\ -3 & 9 & 1 \end{vmatrix}<0$ 的解爲__________。

【解答】$x>5$ 或 $x<-3$

【詳解】令 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 5 & 25 & 1 \\ -3 & 9 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \\ 1 & -3 & 3^2 \end{vmatrix}=(x-5)\,(5+3)\,(-3-x)$

$\therefore$ $f(x)<0$ $\Leftrightarrow$ $-8(x-5)(x+3)<0$ $\Leftrightarrow$ $(x-5)(x+3)>0$ $\Leftrightarrow$ $x>5$ 或 $x<-3$

16.設方程式$x^3+2x-1=0$ 之三根爲a，b，c，則$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ba & (c+a)^2 & bc \\ ca & cb & (a+b)^2 \end{vmatrix}=$ __________。

【解答】0

【詳解】a，b，c 爲 $x^3+2x-1=0$ 之三根，則 $a+b+c=0$，$abc=-1$，

且 $a+b=-c,\quad b+c=-a,\quad c+a=-b$

原行列式$=\begin{vmatrix} (-a)^2 & ab & ca \\ ab & (-b)^2 & bc \\ ca & bc & (-c)^2 \end{vmatrix}$（第一、二、三行分別提出 a，b，c）

$=abc\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}$（第一、二、三列分別再提出 a，b，c）

$=$ 0（ 第一、二、三列成比例 ）

17.平面上三相異直線L_1：$3x-8y=t-4$，L_2：$-2x+(t+3)y=4$，L_3：$x+(1-t)y=-2$ 相交於一點，求t值 $=$ __________。

【解答】-2

【詳解】

三直線共點 $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 3 & -8 & t-4 \\ -2 & t+3 & 4 \\ 1 & 1-t & -2 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow\quad -6(t+3)-32-2(t-4)(1-t)-(t-4)(t+3)+32-12(1-t)=0$

$\Rightarrow\quad t^2-3t-10=0 \quad\Rightarrow\quad (t+2)(t-5)=0 \quad\Rightarrow\quad t=5$ 或 $t=-2$

①當 $t=5$ 時，三直線為$\begin{cases} L_1: 3x-8y=1 \\ L_2: -2x+8y=4 \\ L_3: x-4y=-2 \end{cases}$，但 L_2 與 L_3 重合，故不合

②當 $t=-2$ 時，三直線為$\begin{cases} L_1: 3x-8y=-6 \\ L_2: -2x+y=4 \\ L_3: x+3y=-2 \end{cases}$ 均相異，故 $t=-2$

18.若方程組$\begin{cases} 2kx+y+z=k-\dfrac{3}{2} \\ x+2ky+z=-1 \\ x+y+2kz=-1 \end{cases}$（$k$為常數），

(1)無解時，$k=$__________。　(2)無限多組解時，$k=$__________。

【解答】(1) $k=-1$　(2) $k=\dfrac{1}{2}$

【詳解】$\begin{cases} 2kx+y+z=k-\dfrac{3}{2} \\ x+2ky+z=-1 \\ x+y+2kz=-1 \end{cases}$ 無解或無限多解時，必$\triangle=\begin{vmatrix} 2k & 1 & 1 \\ 1 & 2k & 1 \\ 1 & 1 & 2k \end{vmatrix}=0$

$\therefore\quad 8k^3+1+1-2k-2k-2k=0 \quad\Rightarrow\quad 4k^3-3k+1=0$

$\Rightarrow\quad (k+1)(2k-1)^2=0 \quad\Rightarrow\quad k=-1，\dfrac{1}{2}$

(1) $k=-1$ 時，原式$\begin{cases} -2x+y+z=-\dfrac{5}{2} & \cdots\cdots ① \\ x-2y+z=-1 & \cdots\cdots ② \\ x+y-2z=-1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

② − ①得 $3x-3y=\dfrac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad x-y=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots$④

② × 2 + ③得 $3x-3y=-3 \quad\Rightarrow\quad x-y=-1\cdots\cdots$⑤

④、⑤矛盾，無解，即原方程組無解

(2) $k=\dfrac{1}{2}$ 時，原式為$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ x+y+z=-1 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$，即 $x+y+z=-1$，有無限多解

19.設 k 為一正數，且方程組$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 3x-ky+5z=0 \\ kx+3y+2z=0 \end{cases}$ 有異於(0，0，0)之解，試求：

(1) $k=$？　(2) $x^2+y^2+z^2-8x+2z+2$ 之最小值為何？

【解答】(1) $k=7$　(2) -4

【詳解】

(1)齊次方程組有異於(0，0，0)之解，即無限多解，則

$$\triangle=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & -k & 5\\ k & 3 & 2\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad k^2-7k=0 \quad\Rightarrow\quad k=7 \text{ 或 } 0\text{（不合）}$$

(2) $k=7$ 時，方程組之解表三相異平面交於一直線 L

而 L：$\begin{cases}x-y+z=0\\ 3x-7y+5z=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad L：\begin{cases}x=t\\ y=-t\\ z=-2t\end{cases}$ ，$t\in R$

$x^2+y^2+z^2-8x+2z+2=t^2+t^2+4t^2-8t-4t+2=6t^2-12t+2=6(t-1)^2-4$

當 $t=1$ 時，有最小值爲 -4

20.設 x，y，$a\in R$，若$|3x-2y+9a|+|4x+y+5a+3|+|5x+4y+4a|=0$ 有解，則 a 之值爲何？

【解答】2

【詳解】原式有解，表示$\begin{cases}3x-2y+9a=0\\ 4x+y+5a+3=0\\ 5x+4y+4a=0\end{cases}$有解，即相異三直線交於一點

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}3 & -2 & 9a\\ 4 & 1 & 5a+3\\ 5 & 4 & 4a\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad 33a-66=0，\text{得 } a=2$$