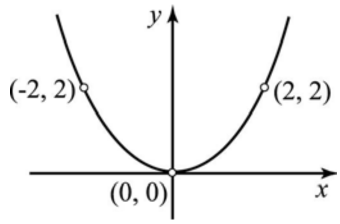
高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：97.12.29					
範圍	Book4 圓錐曲線	班級	三年 班	姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 5 分)

1、(A) 如圖所示，在坐標平面上，以原點 (0, 0) 為頂點，且通過 (2, 2), (−2, 2) 的拋物線，它的焦點坐標為 (A)(0, 0.5) (B)(0, 1) (C)(0, 1.5) (D)(0, 2) (E)(0, 4)



解析：1° ∵對稱軸為y軸，設拋物線為 $y = ax^2$

又過(2,2)代入 $\Rightarrow a = \frac{1}{2}$ $\therefore y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x^2 = 2y$

2° $\because x^2 = 2y = 4\times\frac{1}{2}\times y$ $\therefore$焦點為 $(0,\frac{1}{2}) = (0,0.5)$

2、(E) 設拋物線Γ之焦點坐標為(2 , 2)，準線方程式為 $x + y + 4 = 0$，則下列何者可為正焦弦之端點坐標？ (A)(−2 , −2) (B)(0 , 0) (C)(2 , 2) (D)(4 , 0) (E)(6 , −2)

解析：焦點為(2 , 2)，準線為 $x + y + 4 = 0$ 故正焦弦在 $x + y - 4 = 0$ 上

$d(F, L) = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ $\therefore |c| = 2\sqrt{2}$

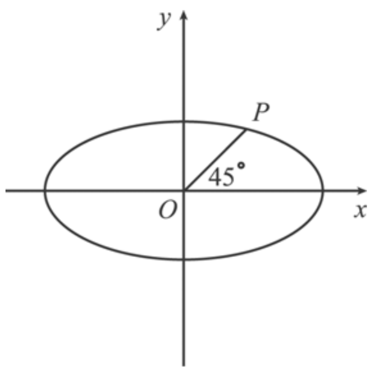
$\therefore$正焦弦兩端點為 $(2,2) \pm 4\sqrt{2}\times\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = (6,-2)$ 或 (−2 , 6)

3、(C) 在橢圓 $9x^2 + 16y^2 = 144$ 上，作內接矩形使長與寬分別與坐標軸平行，則此種矩形的最大面積為 (A)48 (B)25 (C)24 (D)20 (E)12

解析：$P(4\cos\theta, 3\sin\theta)$為橢圓上內接矩形在第一象限上的頂點，故矩形面積為 $48\cos\theta\sin\theta = 24\sin 2\theta \le 24$

4、(B) 在坐標平面上有一橢圓，它的長軸落在 x 軸上，短軸落在 y 軸上，長軸、短軸的長度分別為 4、2。如圖所示，通過橢圓的中心 O 且與 x 軸夾角為 45 度的直線在第一象限跟橢圓相交於 P。則此交點 P 與中心 O 的距離為

(A)1.5 (B)$\sqrt{1.6}$ (C)$\sqrt{2}$ (D)$\sqrt{2.5}$ (E)$\sqrt{3.2}$

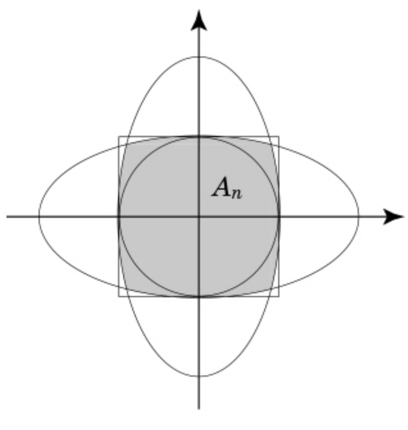


解析：橢圓方程式：$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \cdots$①

直線 OP 方程式 $y = x$ 代入① $\Rightarrow \frac{x^2}{4} + x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5}$

令 $P(x, y) \Rightarrow \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2\cdot\frac{4}{5}} = \sqrt{1.6}$

5、(ABCD) (複選)n 是大於 1 的整數。坐標平面上兩個橢圓區域 $\frac{x^2}{n^2} + y^2 \le 1$ 和 $x^2 + \frac{y^2}{n^2} \le 1$ 共同的部分以 A_n 表示。請選出正確的選項。 (A) A_n 的面積小於 4 (B) A_n 的面積大於 π (C) A_n 的周長大於 5 (D)當 n 趨於無窮大時，A_n 的面積趨近於 4



解析：

圓面積 ≤ 陰影區域 A_n 的面積 ≤ 正方形 面積

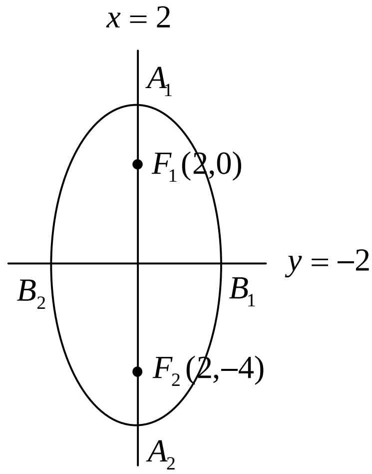
(A) A_n的面積 $\le 4\cdot 1^2 = 4$

(B) A_n的面積 $\ge \pi\cdot 1^2 = \pi$

(C) A_n的周長 $\ge 2\pi\cdot 1\ = 2\pi > 5$

(D)當 $n\to\infty$，A_n 的面積 $\to$ 正方形面積 $=4$

6、(AC DE) (複選)考慮坐標平面上所有滿足 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=10$ 的點 (x,y) 所成的圖形，下列敘述何者正確？ (A)此圖形爲一橢圓 (B)此圖形爲一雙曲線 (C)此圖形的中心在 $(2,-2)$ (D)此圖形對稱於 $x-2=0$ (E)此圖形有一頂點 $(2,3)$



解析：$\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=10$，爲焦點在 $F_1(2,\ 0)$，$F_2(2,-4)$ 且 $2a=10$ 的橢圓

$a=5$，$c=\dfrac{1}{2}\overline{F_1F_2}=2$，$b=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

中心 $O=\dfrac{1}{2}(F_1+F_2)=(2,-2)$

對稱軸：$x=2$，$y=-2$，

頂點：$A_1(2,-2+5)=(2,3)$，$A_2(2,-2-5)=(2,-7)$

$B_1=(2+\sqrt{21},-2)$，$B_2=(2-\sqrt{21},-2)$

7、(A) 設 $A(-2,1)$，$B(4,2)$，P 點滿足 $\left|\overline{PA}-\overline{PB}\right|=8$，則 P 點所形成之軌跡圖形爲 (A)沒有圖形 (B)一射線 (C)二射線 (D)雙曲線 (E)雙曲線的一支

解析：$\overline{AB}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}<8$，故沒有圖形

8、(B) 雙曲線 $\dfrac{y^2}{k}-\dfrac{x^2}{4}=1$ 上任一點到二漸近線距離之乘積爲 $\dfrac{12}{5}$，則 $k=$ (A)7 (B)6 (C)5 (D)3 (E)1

解析：雙曲線上任一點到二漸近線距離之乘積爲 $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$，$\therefore \dfrac{4k}{4+k}=\dfrac{12}{5}$ $\quad\therefore k=6$

9、(C) 設 k 爲一實數，若方程式 $y^2-2ky-kx^2-4x+6=0$ 之圖形爲貫軸與 x 軸平行之雙曲線，則 k 之範圍爲 (A)$k>1+\sqrt{3}$ (B)$0<k<1+\sqrt{3}$ (C)$1-\sqrt{3}<k<1+\sqrt{3}$（但 $k\ne 0$） (D)$1-\sqrt{3}<k<1+\sqrt{3}$（但 $k\ne 0$）或 $k<-2$ (E)$k>1+\sqrt{3}$ 或 $-2<k<1-\sqrt{3}$

解析：$y^2-2ky-kx^2-4x+6=0$，$(y-k)^2-k(x+\dfrac{2}{k})^2=k^2-\dfrac{4}{k}-6$

貫軸平行 x 軸 $\quad\therefore\ \dfrac{-k}{k^2-\dfrac{4}{k}-6}>0$，$k^2-\dfrac{4}{k}-6<0$ $\quad\therefore k>0$

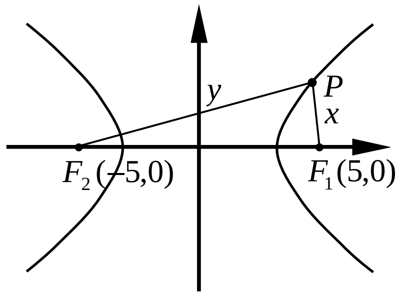
$\therefore\ k^3-6k-4<0$，$(k+2)(k^2-2k-2)<0$

$\therefore k<-2$ 或 $1-\sqrt{3}<k<1+\sqrt{3}\Rightarrow 0<k<1+\sqrt{3}$

10、(BE) (複選)設 F_1 與 F_2 爲坐標平面上雙曲線 Γ：$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的兩個焦點，P 爲 Γ 上一點，使得此三點構成一等腰三角形。試問以下哪些值可能是這些等腰三角形的週長？

(A)20 (B)24 (C)28 (D)32 (E)36

解析：



由方程式知兩焦點爲 $F_1(5,0)$ ， $F_2(-5,0)$ 　　$a=3$ ，$b=4 \Rightarrow c=5$

設 $\overline{PF_1}=x$ ， $\overline{PF_2}=y$ ，則 $|x-y|=2a=6 \Rightarrow x$ 不可能等於 y

因此要爲等腰三角形，僅有以下兩種情形：

(1) $y=2c=10$ ，則 $x=16$ 或 4 ，周長爲 $10+10+16=36$ 或 $10+10+4=24$

(2) $x=2c=10$ ，所得之周長亦相同

11、(A) 通過點(3,0)且與橢圓 $\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$ 相切於第一象限的切線方程式之斜率爲

(A)–4 (B)–3 (C) $-\sqrt{\dfrac{4}{7}}$ (D) $-\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ (E) $-\dfrac{1}{4}$

解析：橢圓之切線 $y-2=m(x-1)\pm\sqrt{2m^2+4}$ ，代入(3,0)， $2m^2+8m=0$, $m=-4$ 或 0

12、(A) 設拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 通過點(1,1)且與直線 $x+y+1=0$ 相切於(0 , –1)，則 $a=$ (A)3 (B)2 (C)1 (D)–1 (E)–2

解析： $\dfrac{y-1}{2}=ax\cdot 0+\dfrac{b}{2}(x+0)+c \Rightarrow bx-y+2c+1=0$ 與 $x+y+1=0$ 重合

$\therefore b=-1$ ， $c=-1$ 又 $a+b+c=1 \Rightarrow a=3$

13、(C)兩端點在一橢圓上的線段稱爲該橢圓的弦，在橢圓 $25x^2+4y^2=100$ 的諸弦中，以點(1,–4)爲中點的弦方程式爲 (A) $3x-2y-11=0$ (B) $5x-4y-21=0$ (C) $8x-5y-28=0$ (D) $25x-4y-41=0$ (E) $25x-16y-89=0$

解析：設過(1,–4)之弦與橢圓相交於 P 、Q 兩點，設 $P=(x,y)$ ， $Q=(2-x,-8-y)$

$\therefore 25x^2+4y^2=100$ ……①

$25(2-x)^2+4(-8-y)^2=100$ ……②

②–① 可得 $25(4-4x)+4(64+16y)=0$ ， $25x-16y-89=0$

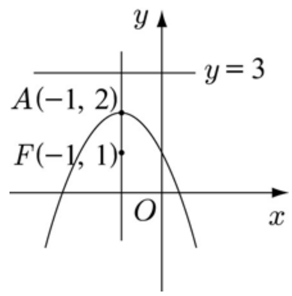
二、填充題 (每題 10 分)

1、拋物線 $4y^2+4y-12x+13=0$ 之頂點爲______，焦點爲______，對稱軸爲______，準線爲______。

答案：$(1,-\dfrac{1}{2})$，$(\dfrac{7}{4},-\dfrac{1}{2})$， $y=-\dfrac{1}{2}$ ， $x=\dfrac{1}{4}$

解析： $4(y+\dfrac{1}{2})^2=12(x-1)$ ，$\therefore$ 頂點爲 $(1,-\dfrac{1}{2})$，$c=\dfrac{3}{4}$ ，焦點 $(\dfrac{7}{4},-\dfrac{1}{2})$，對稱軸 $y=-\dfrac{1}{2}$ ，準線 $x=\dfrac{1}{4}$

2、 焦點坐標爲(–1, 1)，準線方程式爲 $y=3$ 的拋物線方程式爲__________。



答案： $(x+1)^2=-4(y-2)$

解析：頂點爲(–1, 2)，$\therefore |c|=1$ ，開口向下，$\therefore c=-1$

$\therefore$ 方程式爲 $(x+1)^2=-4(y-2)$ 。

3、 直線 $y=x+k$ 與拋物線 $y=-x^2+3x+5$ 相交於相異兩點 P、Q，

(1)則 k 的範圍爲______，(2)若 $\overline{PQ}=6\sqrt{2}$ ，則 $k=$______。

答案：$k<6\,,-3$

解析：$\begin{cases} y=x+k \\ y=-x^2+3x+5 \end{cases} \Rightarrow x^2-2x+(k-5)=0 \quad \therefore D>0\,,1-(k-5)>0\,,k<6$

若 $\overline{PQ}=6\sqrt{2}$ ，因 $m=1$ $\therefore |x_1-x_2|=6$ $\quad \therefore (2)^2-4(k-5)=36$ ， $k=-3$

4、 拋物線 $y=x^2+2(t+1)x+2t+2$ 之頂點隨著實數 t 的改變而變，求頂點之軌跡方程式爲______。

答案：$y=-(x+1)^2+1$

解析：$y=(x+t+1)^2-t^2+1$ $\quad \therefore$頂點爲$(-t-1\,,-t^2+1)$

頂點 $x=-t-1$ ， $y=-t^2+1$ $\quad \therefore$消去 t 得頂點軌跡方程式爲 $y=-(x+1)^2+1$

5、 焦點爲(1, 1)，準線爲 $x+y+1=0$ 的拋物線方程式爲__________。

答案：$x^2-2xy+y^2-6x-6y+3=0$

解析：令 $P(x,\,y)$ 爲拋物線上任一點，$\therefore \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\left|\dfrac{x+y+1}{\sqrt{2}}\right|$ ，平方展開

$\therefore 2(x^2+y^2-2x-2y+2)=x^2+2xy+y^2+2x+2y+1$

$\Rightarrow$方程式爲 $x^2-2xy+y^2-6x-6y+3=0$ 。

6、設拋物線 Γ 之焦點爲(1,3)，準線爲 $2x+y+5=0$ ，則其頂點爲______，對稱軸爲______。

答案：$(-1,2)$, $\;x-2y+5=0$

解析：焦點(1,3)對準線 $2x+y+5=0$ 之投影點爲 $(1,3)-\dfrac{10}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{(2,1)}{\sqrt{5}}=(-3,1)$

$\therefore$ 頂點爲$(-1,2)$，對稱軸爲 $x-2y+5=0$

7、 方程式 $10(x-3)^2+10(y-5)^2=(x+3y-1)^2$ 之正焦弦長爲__________，軸的方程式爲__________。

答案：$\dfrac{34\sqrt{10}}{10}$ ；$3x-y-4=0$

解析：原式 $\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=\left|\dfrac{x+3y-1}{\sqrt{10}}\right|$ ，$\therefore$焦點 $F(3,\,5)$，準線 $L:x+3y-1=0$

$\therefore$正焦弦長 $=2d(F,L)=2\cdot\left|\dfrac{3+15-1}{\sqrt{10}}\right|=\dfrac{34\sqrt{10}}{10}$

$\because m_{軸}=3$ ，$\therefore$軸 M 爲 $y-5=3(x-3)\Rightarrow 3x-y-4=0$ 。

8、$x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 與 x 軸交於 A,B 兩點，則以 $\overline{AB}$ 爲正焦弦的拋物線方程式爲__________。

答案：$(x-1)^2=4(y+1)$，$\;(x-1)^2=-4(y-1)$

解析：令 $y=0\Rightarrow x^2-2x-3=0,\ \therefore x=3$ 或 -1 ，$\therefore$令 $A(3,\,0),\,B(-1,\,0),\ \ \overline{AB}=4=4|c|\Rightarrow c=\pm1$

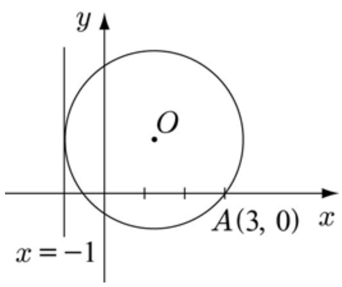
$\therefore$焦點 $F(\dfrac{3-1}{2},0)=F(1,0)$ 且爲直立的圖形

(1)若 $c=1$ 時，頂點 $C(1,-1)$ ，$\therefore$方程式爲 $(x-1)^2=4(y+1)$ 。

(2)若 $c=-1$ 時，頂點 $C(1,1)$ ，$\therefore$方程式爲 $(x-1)^2=-4(y-1)$ 。

9、過 $A(3,\,0)$ 且與 $x=-1$ 相切的所有圓之圓心的軌跡方程式爲__________。

答案：$y^2=8(x-1)$



$\boxed{解析}$：令 $O(x, y)$, $L: x+1=0$，$\therefore d(O, L)=\overline{OA}$，$\therefore A$ 爲焦點，L 爲準線，

$\therefore$頂點爲$(1, 0)$，$|c|=2$，開口向右，$\therefore c=2$，方程式爲 $y^2=8(x-1)$。

10、若 $\dfrac{x^2}{15-k}+\dfrac{y^2}{k-5}=1$ 的圖形爲一橢圓，則 k 的範圍爲__________。

$\boxed{答案}$：$5<k<15$ 且 $k\neq 10$

$\boxed{解析}$：$\because$圖形爲橢圓，$\therefore \begin{cases} 15-k>0 \\ k-5>0 \\ 15-k\neq k-5 \end{cases} \Rightarrow 5<k<15$ 且 $k\neq 10$。

11、已知一橢圓的長軸兩端點爲 $A(7,-2)$，$A'(-3,-2)$，兩焦點之間的距離爲 4，則此橢圓之方程式爲______，又其正焦弦長爲______。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{21}=1,\quad \dfrac{42}{5}$

$\boxed{解析}$：中心爲$(2, -2)$的橫橢圓，$a=5$，$2c=4$，$c=2$，$b=\sqrt{21}$

$\therefore$橢圓方程式爲 $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{21}=1$，正焦弦長 $\dfrac{42}{5}$

12、設圓 C 與二定圓 $C_1: x^2+y^2=36$，$C_2: x^2+(y-2)^2=49$ 相切，

(1)當圓 C 與圓 C_1 外切時，圓 C 之圓心軌跡方程式爲______，

(2)當圓 C 與圓 C_1 內切時，圓 C 之圓心軌跡方程式爲______。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$，$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

$\boxed{解析}$：C_1 圓心 $P(0,0)$，C_2 圓心 $Q(0,2)$，圓 C 之圓心 $R(x,y)$，圓 C 之半徑爲 r

(1) $\overline{RP}=r+1$，$\overline{RQ}=7-r$，$\therefore \overline{RP}+\overline{RQ}=8$，$\overline{PQ}=2$，中心$(0,1)$之直橢圓爲 $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$

(2) $\overline{RP}=r-1$，$\overline{RQ}=7-r$，$\therefore \overline{RP}+\overline{RQ}=6$，$\overline{PQ}=2$，中心$(0,1)$之直橢圓爲 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

13、設 F 與 F' 爲橢圓 $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 之兩焦點，且 F 在 F' 之右側，點 $P(6,2)$爲橢圓上的一點，則

(1) $\overline{PF}=$______，(2) $\cos(\angle FPF')=$______。

$\boxed{答案}$：$\sqrt{5}$，$\dfrac{3}{5}$

$\boxed{解析}$：$\overline{PF}=a-\dfrac{c}{a}x=3\sqrt{5}-\dfrac{5}{3\sqrt{5}}\times 6=\sqrt{5}$，

$\overline{PF'}=5\sqrt{5}$，又 $\overline{FF'}=10$，$\therefore \cos(\angle FPF')=\dfrac{5+125-100}{2\times\sqrt{5}\times 5\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}$

12、設 P 爲橢圓 $\Gamma: \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上的一點且位在上半平面。若 F_1, F_2 爲 Γ 之焦點，且 $\angle F_1PF_2$ 爲直角，則 P 點的 y 坐標爲______。(化成最簡分數)

$\boxed{答案}$：$\dfrac{9}{4}$

$\boxed{解析}$：(1) $\sqrt{25-9}=4$　兩焦點爲 $F_1(4,0)$, $F_2(-4,0)$

P 之坐標爲 $(5\cos\theta, 3\sin\theta),\ 0<\theta<\pi$

$\overrightarrow{F_1P}=(5\cos\theta-4, 3\sin\theta)$ ； $\overrightarrow{F_2P}=(5\cos\theta+4, 3\sin\theta)$

$\angle F_1PF_2$ 爲直角 $\Rightarrow \overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=0 \Rightarrow (5\cos\theta-4)(5\cos\theta+4)+(3\sin\theta)^2=0$

$\Rightarrow 25\cos^2\theta-16+9\sin^2\theta=0$

$\Rightarrow 25(1-\sin^2\theta)-16+9\sin^2\theta=0$

$\Rightarrow 16\sin^2\theta=9$

$\Rightarrow \sin^2\theta=\dfrac{9}{16}$ (但 $\sin\theta>0$)

$\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{3}{4}$

P 之 y 坐標爲 $3\sin\theta=3\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}$

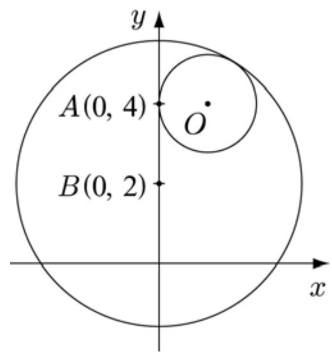
(2) $\sqrt{25-9}=4 \Rightarrow$ 以 $\overline{F_1F_2}$ 爲直徑的圓之方程式爲 $x^2+y^2=4^2\cdots\cdots$①

已知橢圓之方程式爲 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1\cdots\cdots$②

②$\times 25-$① $\dfrac{16}{9}y^2=9$ ， $y^2=\dfrac{9^2}{16}$ (但 y>0)， $y=\dfrac{9}{4}$

13、過 $A(0, 4)$ 且與 $x^2+(y-2)^2=16$ 相切的所有圓，其圓心的軌跡方程式爲__________。

答案： $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$



解析：令圓心爲 $O(x, y)$ ， $\therefore \overline{OB}=4-r,\ \overline{OA}=r$ ，

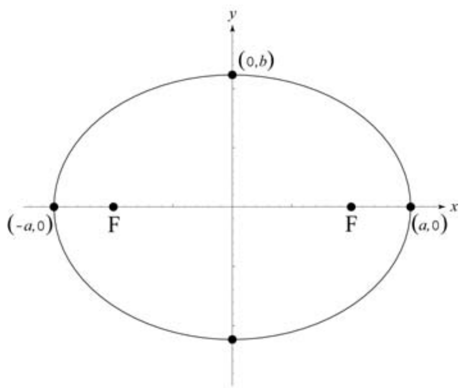
$\therefore \overline{OA}+\overline{OB}=4>\overline{AB}=2$ ， $\therefore$ 圖形爲橢圓

$\therefore A(0, 4), B(0, 2)$ 爲二焦點， $\therefore$ 中心

$C(0, 3), 2c=2, c=1, 2a=4, a=2$

$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$ ， $\therefore$ 方程式爲 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$ 。

14、設一橢圓方程式爲 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ，其中 $a>0, b>0$ ，F 爲它的一個焦點。已知此橢圓在 x 軸上的兩個頂點與 F 的距離分別爲 5 單位及 1 單位，如下圖 B 所示。則（a, b）＝________。



圖B

答案： $(3, \sqrt{5})$

解析：設兩頂點爲 A 與 A'　　由已知： $\overline{AA'}=\overline{AF}+\overline{A'F}=6=2a$

$\therefore a=3,\ F(2, 0)\ \ \therefore c=2$

因此， $b^2=a^2-c^2=5 \Rightarrow b=\sqrt{5}$ ， $\therefore (a,\ b)=(3,\ \sqrt{5})$

15、(1)橢圓 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{1}=1$ 的兩焦點坐標爲_______。

(2)設一橢圓與已知橢圓 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{1}=1$ 共焦點，且過(3,2)，則此橢圓方程式爲_______。

答案：(1)$(\sqrt{5}, 0)$，$(-\sqrt{5}, 0)$, (2) $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{10}=1$

$\boxed{解析}$：(1) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{1}=1$ $\therefore a=\sqrt{6}$，$b=1$，$c=\sqrt{5}$ $\therefore$焦點爲$(\sqrt{5},0)$，$(-\sqrt{5},0)$

(2)與$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{1}=1$共焦點之橢圓爲$\dfrac{x^2}{6+t}+\dfrac{y^2}{1+t}=1$，代入(3,2)

$\Rightarrow t^2-6t-27=0$ $\therefore t=9$或 -3（不合）$\therefore$橢圓方程式爲$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{10}=1$

16、$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=10$的圖形，其中心坐標爲______，長軸長是______，短軸所在的直線方程式爲__________。

$\boxed{答案}$：(2, 0)；10；$x+2y-2=0$

$\boxed{解析}$：令$A(1,-2), B(3,2), P(x,y)$，$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=10>\overline{AB}=2\sqrt{5}$

$\therefore$圖形爲橢圓，中心$(\dfrac{1+3}{2},\dfrac{-2+2}{2})=(2,0)$，長軸長$=2a=10$

$\because m_{長軸}=\dfrac{4}{2}=2$，$\therefore m_{短軸}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore$方程式爲 $y-0=-\dfrac{1}{2}(x-2)\Rightarrow x+2y-2=0$。

17、一線段AB長爲8，A在x軸上、B在y軸上移動，若$P\in\overline{AB}$且$\overline{AP}=6$，則$\overline{AB}$移動時，P點的軌跡方程式爲__________。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{36}=1$

$\boxed{解析}$：令$A(a,0), B(0,b)$, $\therefore \overline{AB}=8\Rightarrow a^2+b^2=64$，$\therefore \overline{AP}:\overline{BP}=6:2=3:1$

$\therefore P(\dfrac{a}{4},\dfrac{3b}{4})$，$\therefore x=\dfrac{a}{4}, y=\dfrac{3b}{4}$，$\therefore a=4x, b=\dfrac{4}{3}y$，

$\therefore (4x)^2+(\dfrac{4}{3}y)^2=64\Rightarrow$方程式爲 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{36}=1$。

18、設一雙曲線的兩漸近線爲$3x-4y-17=0,\ 3x+4y-1=0$且有一焦點坐標爲$(8,-2)$，則此雙曲線正焦弦的長是______。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{9}{2}$

$\boxed{解析}$：雙曲線方程式爲$(3x-4y-17)(3x+4y-1)=k$

$\therefore 9x^2-16y^2-54x-64y+17=k\Rightarrow \dfrac{(x-3)^2}{\frac{k}{9}}-\dfrac{(y+2)^2}{\frac{k}{16}}=1$，$\therefore c=\sqrt{\dfrac{k}{9}+\dfrac{k}{16}}$

$\therefore 8=3+\sqrt{\dfrac{k}{9}+\dfrac{k}{16}}\Rightarrow \dfrac{k}{9}+\dfrac{k}{16}=25\Rightarrow k=144$，$\therefore a^2=16,\ a=4,\ b^2=9,\ b=3$

$\therefore$正焦弦長$=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{9}{2}$。

19、一雙曲線的中心爲(1,–2)，一頂點爲(–1,–2)，一漸近線爲$2x+y=0$，則求此雙曲線之方程式爲_______。

$\boxed{答案}$：中心(1,–2)，$a=2$，漸近線斜率爲–2 $\therefore \dfrac{b}{a}=2$，$b=4$，橫雙曲線$\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$

20、雙曲線$\left|\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}-\sqrt{(x-8)^2+(y-7)^2}\right|=8$之中心坐標爲______，正焦弦長爲______，兩頂點坐標爲______和______，漸近線與貫軸長之夾角爲θ，則$\sin\theta=$______。

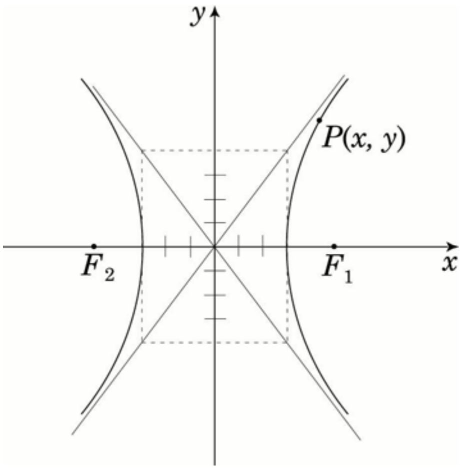
答案：$(5,3)$, $\frac{9}{2}$, $(\frac{37}{5},\frac{31}{5})$, $(\frac{13}{5},-\frac{1}{5})$, $\frac{3}{5}$

解析：$F(2,-1)$，$F'(8,7)$，中心$(5,3)$，$a=4$，$c=5$，$b=3$，正焦弦長$\frac{9}{2}$

頂點坐標$(5,3)\pm 4\times(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=(\frac{37}{5},\frac{31}{5})$和$(\frac{13}{5},-\frac{1}{5})$

貫軸與漸近線之夾角θ，其$|\tan\theta|=\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$ $\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$

21、設P爲雙曲線$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$上的一點且位在第一象限。若$F_1,F_2$爲此雙曲線的兩個焦點，且$\overline{PF_1}$：$\overline{PF_2}$=1：3，則$\triangle F_1PF_2$的周長等於______。



答案：22

解析：

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1\Rightarrow a=3,b=4,c=5$；

$\overline{PF_1}=\frac{5}{3}x-3=3$，$\overline{PF_2}=\frac{5}{3}x+3=9$，

$\overline{PF_1}$：$\overline{PF_2}=(\frac{5}{3}x-3)$：$(\frac{5}{3}x+3)$=1：3$\Rightarrow x=\frac{18}{5}$；

$\overline{F_1F_2}=2c=10\Rightarrow\triangle F_2PF_1=3+9+10=22$

22、雙曲線$\Gamma:(3x-4y+5)(2x+y-4)=10\sqrt{5}$上任一點到它的兩漸近線的距離之積爲______，又Γ的共軛雙曲線方程式爲______。

答案：2, $(3x-4y+5)(2x+y-4)=-10\sqrt{5}$

解析：$P(x,y)$在雙曲線上，其到兩漸近線的距離之積$=\frac{|3x-4y+5|\times|2x+y-4|}{5\times\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}=2$

Γ之共軛雙曲線爲$(3x-4y+5)(2x+y-4)=-10\sqrt{5}$

23、已知雙曲線之貫軸長等於共軛軸長時，稱爲等軸雙曲線，若有一等軸雙曲線之中心爲(1,1)又經過點(3,1)，已知其一漸近線方程式爲$x-3y+2=0$則另一條漸近線爲______，又此等軸雙曲線的方程式爲______。

答案：$3x+y-4=0$, $(3x+y-4)(x-3y+2)=12$

解析：等軸雙曲線漸近線互相垂直，又中心爲(1,1)，故另一條漸近線爲$3x+y-4=0$

雙曲線方程式爲$(3x+y-4)(x-3y+2)=k$，代入(3,1)$\therefore k=12$

$\therefore (3x+y-4)(x-3y+2)=12$

24、與雙曲線$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=1$共焦點且通過(0,–1)之橢圓方程式爲______。

答案：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{1}=1$

解析：與雙曲線共焦點爲$\frac{x^2}{16+t}+\frac{y^2}{-8+t}=1$ 且過(0,–1) $\therefore t=9$ 得$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{1}=1$

25、設圓$C_1:(x+1)^2+y^2=9$，圓$C_2:(x-5)^2+y^2=1$，現在有一動圓與圓C_1與圓C_2同時外切或同

時內切，則此動圓之圓心軌跡方程式為______。

答案：$\dfrac{(x-2)^2}{1}-\dfrac{y^2}{8}=1$

解析：設動圓 C 半徑為 r，圓心為 P，$F'(-1,0)$，$F(5,0)$

$\Rightarrow$若動圓 C 與兩圓同時外切$\Rightarrow$ $\overline{PF}=r+1$, $\overline{PF'}=r+3$

$\therefore \overline{PF'}-\overline{PF}=2$，若動圓 C 與兩圓同時內切，則 $\overline{PF}=r-1$，$\overline{PF'}=r-3$

$\therefore \overline{PF}-\overline{PF'}=2 \Rightarrow \left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|=2$

又 $\overline{FF'}=6$ $\therefore c=3$，$a=1$，中心$(2,0)$，$b=2\sqrt{2}$，$\therefore$圓心軌跡為 $\dfrac{(x-2)^2}{1}-\dfrac{y^2}{8}=1$

26、已知雙曲線的焦點為(1,4)，又漸近線為 $4x+3y=1$ 和 $4x-3y=7$，則雙曲線方程式為______。

答案：$\dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

解析：設雙曲線為 $(4x+3y-1)(4x-3y-7)=k^2$ ($k>0$)，中心為(1,–1)

$\Rightarrow [4(x-1)+3(y+1)][4(x-1)-3(y+1)]=k^2$

$16(x-1)^2-9(y+1)^2=k^2$ $\therefore a=\dfrac{k}{4}$，$b=\dfrac{k}{3}$，$c=\dfrac{5k}{12}$

$\because$焦點為(1,4) $\therefore c=5$ $\therefore k=12$, $a=3$, $b=4$

$\therefore$雙曲線為 $\dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

27、設方程式 $\dfrac{x^2}{2t-1}+\dfrac{y^2}{t^2-4}=1$ 的圖形為雙曲線，則 t 的範圍為______，又若此雙曲線之貫軸為 x 軸，則 t 的範圍為______。

答案：$t<-2$ 或 $\dfrac{1}{2}<t<2$, $\dfrac{1}{2}<t<2$

解析：$\because$圖形為雙曲線 $\therefore (2t-1)(t^2-4)<0$ $\therefore t<-2$ 或 $\dfrac{1}{2}<t<2$

若貫軸為 x 軸，則 $2t-1>0$, $t^2-4<0$ $\therefore \dfrac{1}{2}<t<2$

28、一雙曲線之兩焦點為(–2,–1)與(4,1)，則其共軛雙曲線的兩焦點為______和______。

答案：(2,–3), (0,3)

解析：雙曲線兩焦點為 F(–2,–1)，F′(4,1)，其中心為(1,0)，其 $c=\sqrt{10}$，其共軛雙曲線的 $c=\sqrt{10}$，且其焦點連線與 $\overline{FF'}$ 垂直，故其焦點為 $(1,0)\pm\sqrt{10}(\dfrac{1}{\sqrt{10}},\dfrac{-3}{\sqrt{10}})=(2,-3)$ 和 $(0,3)$

29、過橢圓 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上一點 P 的切線與兩坐標軸分別交於 A 、B 兩點，則 $\overline{AB}$ 之最小值為_______，在第一象限內，產生 $\overline{AB}$ 的最小值之 P 點坐標為_______。

答案：$3\sqrt{2}$, $P(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$

解析：設 $P=(2\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$，切線為 $\dfrac{2\sqrt{2}}{8}\cos\theta x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta y=1$

$\therefore A=(\dfrac{2\sqrt{2}}{\cos\theta},0)$, $B=(0,\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\theta})$, $\overline{AB}=\sqrt{\dfrac{8}{\cos^2\theta}+\dfrac{2}{\sin^2\theta}}$

$\because (\dfrac{8}{\cos^2\theta}+\dfrac{2}{\sin^2\theta})(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\ge(2\sqrt{2}+\sqrt{2})^2 \quad \therefore \overline{AB}\ge 3\sqrt{2}$

$\overline{AB}$ 之最小值 $3\sqrt{2}$ ，此時 $\dfrac{\cos\theta}{\dfrac{2\sqrt{2}}{\cos\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\theta}}\Rightarrow \cos^2\theta=2\sin^2\theta$

$\therefore \cos^2\theta=\dfrac{2}{3},\ \sin^2\theta=\dfrac{1}{3} \quad \therefore P=(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$

30、過 $P(1,2)$ 之直線與 $y^2=8(x-1)$ 僅有一交點，則此直線方程式爲__________。

答案： $y=2,\ x=1,\ y=x+1$

解析：僅有一個交點有兩種情形：(1)水平線，(2)切線。

(1)若爲水平線時，此直線方程式爲 $y=2$ 。

(2)若爲切線時， $4c=8,\ c=2$

$\therefore$ 方程式爲 $y=m(x-1)+\dfrac{2}{m}$ 過(1, 2)，$\therefore 2=\dfrac{2}{m}\Rightarrow m=1$（另一條則爲鉛直線）

$\therefore$ 切線 $L: y-2=1\cdot(x-1)\Rightarrow y=x+1$ ，另一條切線爲 $x=1$ 。

31、△ABC 有二固定的頂點 $A(3,-4)$， $B(1,-6)$，而第三頂點 C 在橢圓 $9x^2+16y^2=144$ 上滑動，則當 C 點坐標爲________時可使△ABC 有最大面積，其最大面積爲________。

答案：$(-\dfrac{16}{5},\dfrac{9}{5}),\ 12$

解析：設 $C(4\cos\theta，3\sin\theta)$，$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}4\cos\theta-3 & 3\sin\theta+4\\ -2 & -2\end{matrix}\right\|=\left|4\cos\theta-3\sin\theta-7\right|$

$=\left|5\cos(\theta+\phi)-7\right|\le 12$

$\therefore$△ABC 最大面積爲 12，此時 $\cos\theta=\dfrac{-4}{5},\ \sin\theta=\dfrac{3}{5}$ ，$\therefore C$ 點爲$(-\dfrac{16}{5},\dfrac{9}{5})$

32、過(2, 1)而與 $x^2-y^2=4$ 相切的直線方程式爲__________。

答案： $5x-4y-6=0$ 或 $x=2$

解析： $\because \Gamma: \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ ，$\therefore$ 切線方程式爲 $y=mx\pm\sqrt{4m^2-4}$ 過(2, 1)

$\therefore 1=2m\pm\sqrt{4m^2-4}$（移項平方），$\therefore 4m^2-4m+1=4m^2-4\Rightarrow m=\dfrac{5}{4}$

$\therefore$ 切線方程式爲 $y-1=\dfrac{5}{4}(x-2)\Rightarrow 5x-4y-6=0$

另一條切線方程式爲 $x=2$ 。（沒有斜率）

33、自橢圓外一點 $P(3,-3)$作橢圓 $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{25}=1$ 之兩切線與橢圓相切於二點 A、B，若 A 爲橢圓之頂點，則 A 點坐標爲______又 AB 直線方程式爲______。

答案：$(-1,-3),\ 5x-y+2=0$

解析：設橢圓外一點 $P(3,-3)$作橢圓之兩切線，切點 AB 之直線方程式爲

$\dfrac{(x+1)(3+1)}{4}+\dfrac{(y-2)(-3-2)}{25}=1\Rightarrow 5x-y+2=0$

$$\begin{cases}\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{25}=1\\ 5x-y+2=0\end{cases}\Rightarrow 5x^2+2x-3=0\text{ ， }x=\frac{3}{5}\text{或}-1\text{，}\therefore A(-1,-3)$$

34、設雙曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 上有一點 $P\,(6,4\sqrt{3}\,)$，若 F 爲右側之焦點，則 $\overline{PF}=$________，又過 P 點之法線與貫軸之交點爲________。

$\boxed{\text{答案}}$：7, $Q\,(\frac{3}{2},0)$

$\boxed{\text{解析}}$：$\because F\,(5,0)$ $\therefore \overline{PF}=7$，又 $\overline{PF'}=13$，又 $\overline{FF'}=10$，又過 P 之法線平分 $\angle FPF'$，設過 P 點之法線與貫軸之交點爲 Q $\therefore \overline{PF}:\overline{PF'}=\overline{QF}:\overline{QF'}$，又 $F'=(-5,0),\ F=(5,0)$

$\therefore Q=(\frac{3}{2},0)$

35、設 F，F' 分別爲橢圓 $9x^2+4y^2=36$ 的兩焦點，P 爲橢圓上任一點，且 $\angle FPF'$ 的平分線斜率爲 $\frac{1}{2}$，則過 P 點的切線方程式爲________或________。

$\boxed{\text{答案}}$：$y=-2x+5$, $y=-2x-5$

$\boxed{\text{解析}}$：$\because \angle FPF'$ 之平分線斜率爲 $\frac{1}{2}$ $\therefore$過 P 之切線斜率爲 -2 $\therefore$切線爲 $y=-2x\pm\sqrt{4\times4+9}$

$\therefore y=-2x\pm5$

36、拋物線 $x^2=4y$ 上有一弦，其中點爲(1,2)，則此弦之方程式爲_______，又其弦長爲_______。

$\boxed{\text{答案}}$：$x-2y+3=0$, $\sqrt{70}$

$\boxed{\text{解析}}$：$x^2=4y$ 上有一弦，$\overline{PQ}$ 之中點爲(1,2)，設 $P=(x,y)$，$Q=(2-x,4-y)$

$\Rightarrow\ x^2=4y\cdots\cdots①$，$(2-x)^2=4(4-y)\cdots\cdots②$

①−② 得 $4x-4=8y-16\Rightarrow x-2y+3=0$

$$\begin{cases}x^2=4y\\ x-2y+3=0\end{cases}\Rightarrow\ x^2-2x-6=0,\ \left|(x_1-x_2)\right|^2=4-4\times(-6)=28$$

$\therefore$直線斜率 $\frac{1}{2}$ $\therefore$弦長 $=\sqrt{28}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{70}$

37、拋物線 $y=x^2-5x+13$ 與直線 $y=2x+k$ 相交於 P,Q 二點，且 $\overline{PQ}=3$，則 $k=$_______。

$\boxed{\text{答案}}$：$\frac{6}{5}$

$\boxed{\text{解析}}$：令交點 $P(x_1,2x_1+k),Q(x_2,2x_2+k)$，$\therefore$方程式 $x^2-5x+13=2x+k$ 之二根爲 x_1,x_2

$$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=7\\ x_1\cdot x_2=13-k\end{cases}\text{，}\overline{PQ}=3=\sqrt{(x_1-x_2)^2+4(x_1-x_2)^2}=\sqrt{5[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$$

$\therefore 9=5\cdot(49-52+4k)$，$\therefore k=\frac{6}{5}$。

38、直線 $L:x+2y-1=0$ 被橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=25$ 所截出之弦，其中點坐標爲__________。

$\boxed{\text{答案}}$：$(\frac{9}{25},\frac{8}{25})$

$\boxed{\text{解析}}$：令直線與橢圓之交點爲 $P(x_1,y_1),\ Q(x_2,y_2)$，$\therefore\begin{cases}x+2y-1=0\cdots\cdots\cdots①\\ 4x^2+9y^2=900\cdots\cdots②\end{cases}$

將①代入②得 $25y^2-16y-896=0$，其二根爲 y_1,y_2

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{16}{25},\ y_1\cdot y_2=\dfrac{-896}{25}$，$\dfrac{x_1+x_2}{2}=-(y_1+y_2)+1=\dfrac{9}{25}$，$\therefore$中點坐標 $M(\dfrac{9}{25},\dfrac{8}{25})$。

39、拋物線 $y^2=16x$ 中，有一弦以(4, 3)爲中點，則此弦所在的直線方程式爲__________。

答案：$8x-3y-23=0$

解析：設此直線與拋物線交於 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 二點，$\therefore x_1+x_2=8,\ y_1+y_2=6,\ m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\therefore \begin{cases} y_2^2=16x_2 \cdots\cdots ① \\ y_1^2=16x_1 \cdots\cdots ② \end{cases}$

由①－②得 $(y_2-y_1)(y_2+y_1)=16(x_2-x_1)$，$\therefore m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{8}{3}$

$\therefore$直線方程式爲 $y-3=\dfrac{8}{3}(x-4)\Rightarrow 8x-3y-23=0$。

40、橢圓 $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ 在 $x+y+4=0$ 之直線上的正射影長爲_______。

答案：$\sqrt{13}$

解析：$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ 之斜率爲 1 之切線爲 $y-1=(x-1)\pm\sqrt{9+4}$，

即 $x-y\pm\sqrt{13}=0$ 相距 $\dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}}=\sqrt{13}$，此即橢圓在 $x+y+4=0$ 上之正射影長