| 高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：97.12.18 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | Book3 圓與球 | 班級 | 三年　班 | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

一、選擇題 (每題 5 分)

1、( AC ) (複選)設一圓通過$A(5, 1)$, $B(3,-1)$兩點且圓心在直線$x-2y+2=0$上，則此圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則

(A)$d=-4$　(B)$e=4$　(C) $f=-2$　(D)圓心坐標為$(2,-2)$ (E)半徑為 10

解析：令圓心 $O(2t-2, t)$，$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}$

$\therefore (2t-2-5)^2+(t-1)^2=(2t-2-3)^2+(t+1)^2 \Rightarrow t=2$

$\therefore$圓心 $O(2, 2)$，半徑$r=\overline{OA}=\sqrt{10}$，$\therefore$圓：$(x-2)^2+(y-2)^2=10$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x-4y-2=0$，$\therefore d=-4, e=-4, f=-2$。

2、( E )　設直線$5x-y-a=0$切圓：$3x^2+3y^2-2x+4y+b=0$於點$A(c,-1)$，求$a+b+c=$？

(A)2　(B)3　(C)4　(D)5　(E)6

解析：

Sol 一：

過切點$A(c,-1)$之切線$3cx-3y-2(\frac{x+3}{2})+4(\frac{y-1}{2})+b=0 \Rightarrow (3c-1)x-y-(c+2-b)=0$

與$5x-y-a=0$為同一直線$\Rightarrow \frac{3c-1}{5}=\frac{-1}{-1}=\frac{-a}{-(c+2-b)} \Rightarrow \begin{cases} c=2 \\ a=4-b \end{cases}$

又直線$5x-y-a=0$過$A(2,-1) \Rightarrow 10+1-a=0$, 即$a=11, b=-7$

Sol 二：

圓：$3x^2+3y^2-2x+4y+b=0$，$\therefore$圓心 $O(\frac{1}{3},\frac{-2}{3})$

$\therefore$切線斜率$=5$，半徑與切線垂直$\Rightarrow \frac{-1+\frac{2}{3}}{c-\frac{1}{3}}\times 5=-1 \Rightarrow c=2$代入

$\therefore 10+1-a=0$, $12+3-4-4+b=0 \Rightarrow a=11$, $b=-7$，$\therefore a+b+c=11-7+2=6$

3、( B )　已知點$A(-3,4)$為圓$O: x^2+y^2=41$內一點，則以$A$為中點之弦方程式為直線$L$，而$L$之斜率$m=$　(A)$\frac{4}{3}$　(B)$\frac{3}{4}$　(C)0 (D)$-\frac{3}{4}$　(E)$-\frac{4}{3}$

解析：$\overrightarrow{OA}=(-3,4) \Rightarrow m_{OA}=-\frac{4}{3}$，又$A$為中點之弦與$\overrightarrow{OA}$垂直，即$\overrightarrow{OA}\perp L$，$\therefore L$之斜率$\frac{3}{4}$

4、( E )　設一地球儀的球心為空間坐標的原點，有兩個城市的坐標分別為$\mathrm{A}(1,2,2)$，$\mathrm{B}(2,-2,1)$。假定地球為半徑等於 6400 公里的圓球，試問飛機從 A 城市直飛至 B 城市的最短航線長最接近下列那一個選項的值？

(A)8000 公里　(B)8500 公里　(C)9000 公里　(D)9500 公里　(E)10000 公里

解析：$\overrightarrow{OA}=(1,2,2)$, $\overrightarrow{OB}=(2,-2,1)$，$\cos(\angle AOB)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|}=\frac{2-4+2}{3\times 3}=0 \Rightarrow \angle AOB=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=6400\times\frac{\pi}{2} \fallingdotseq 3200\times 3.1416=10053.12$

5、( $\begin{smallmatrix}\text{BC}\\ \text{D}\end{smallmatrix}$ )（複選）過$A(0, 6, 0)$, $B(0,-6, 4)$, $C(-7,-1, 0)$, $D(9,-1, 0)$四點之球面方程式爲 $x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$，則(A) $d=2$ (B) $e=4$ (C) $f=8$ (D) $g=-60$ (E) $d+e+f=-10$

$\boxed{\text{解析}}$：將(0, 6, 0), (0,–6, 4), (–7,–1, 0), (9,–1, 0)代入

$$\therefore \begin{cases}36+6e+g=0\\ 52-6e+4f+g=0\\ 50-7d-e+g=0\\ 82+9d-e+g=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d=-2\\ e=4\\ f=8\\ g=-60\end{cases}，d+e+f=-2+4+8=10$$

## 二、填充題 (每題 10 分)

1、 若 $P$ 爲單位圓：$x^2+y^2=1$上的任一點，令 $O$ 爲原點，$Q(3,-2)$，則△$POQ$ 的最大面積爲_________。

$\boxed{\text{答案}}$：設 $P(\cos\theta, \sin\theta)$，$\overrightarrow{OP}=(\cos\theta, \sin\theta)$；$\overrightarrow{OA}=(3,-2)$

$$\therefore \triangle POQ \text{ 面積}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\cos\theta & \sin\theta\\ 3 & -2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-2\cos\theta-3\sin\theta\right|=\frac{1}{2}\left|3\sin\theta+2\cos\theta\right|$$

$$=\frac{\sqrt{13}}{2}\left|\sin\theta\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}+\cos\theta\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}\right|=\frac{\sqrt{13}}{2}\left|\sin(\theta+\phi)\right|$$

又 $-1\le\sin(\theta+\phi)\le1\Rightarrow 0\le\left|\sin(\theta+\phi)\right|\le1$，$\therefore$最大面積爲 $\frac{\sqrt{13}}{2}$。

2、 設點 $A(2,3)$爲圓 $\text{O}: x^2+y^2=16$之內部一點，則過 $A$ 點的所有弦中點所形成之點集圖形方程式爲一圓方程式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則 $d=$______, $f=$______。

$\boxed{\text{答案}}$：–2; 0

$\boxed{\text{解析}}$：過 $A$ 點的所有弦中點所形成之點集圖形爲圓，且(0,0)與(2,3)恰爲此圓直徑之兩端點

$\therefore$圓方程式爲 $(x, y)\cdot(x-2, y-3)=0$　$\therefore x^2+y^2-2x-3y=0$　$\therefore d=-2,\ e=-3,\ f=0$

3、 圓 $C$ 以(–2,1)爲圓心與圓 $C_1$ $: x^2+y^2-4x+4y+4=0$ 相切，則圓 $C$ 之方程式爲______或______。

$\boxed{\text{答案}}$：$(x+2)^2+(y-1)^2=9$；$(x+2)^2+(y-1)^2=49$

$\boxed{\text{解析}}$：圓 $C_1$ $:(x-2)^2+(y+2)^2=4$，連心線長 5

若圓 $C$ 與圓 $C_1$ 外切 $\Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=9$

若圓 $C$ 與圓 $C_1$ 內切 $\Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=49$

4、 設圓 $C_1$ $: x^2+y^2+4x+2y-8=0$與直線 $x+y=2$ 相交於 $A, B$ 兩點，又圓 $C$ 爲通過 $A, B$ 兩點，且與 $x$ 軸相切之圓方程式，則圓 $C$ 的方程式爲______或______。

$\boxed{\text{答案}}$：$x^2+y^2-2y=0$；$x^2+y^2-8x-10y+16=0$

$\boxed{\text{解析}}$：Sol 一：圓系

設圓 $C$ 的方程式爲 $(x^2+y^2+4x+2y-8+k(x+y-2)=0$

$y=0\Rightarrow x^2+(k+4)x-(2k+8)=0$

因爲與 $x$ 軸相切恰有一解 $\Rightarrow (k+4)^2-4\cdot1\cdot[-(2k+8)]=0$

$\Rightarrow k^2+16k+48=0,\quad (k+4)(k+12)=0, k=-4,-12$

所求 $x^2+y^2-2y=0$ ，$x^2+y^2-8x-10y+16=0$

Sol 二

$\begin{cases} x^2+y^2+4x+2y-8=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

$\overline{AB}$ 之中垂線為 $y=x+1$　$\therefore$設圓心為 $(t,t+1)$ ，半徑為 $|t+1|$

$t^2+(t+1-2)^2=(t+1)^2$　$\therefore t=0$ 或 4

$t=0$ 時，圓 $C$ 為 $x^2+y^2-2y=0$

$t=4$ 時，圓 $C$ 為 $x^2+y^2-8x-10y+16=0$

5、 設 $P(x,y)$ 為圓 $O: x^2+y^2=1$ 上的任一點，則 $2x^2+2xy$ 的最大值為______，最小值為______。

答案：$\sqrt{2}+1$; $1-\sqrt{2}$

解析：設 $P(\cos\theta,\sin\theta)$

$\therefore 2x^2+2xy=2\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta=1+\cos 2\theta+\sin 2\theta=\sqrt{2}(\sin(2\theta+\frac{\pi}{4}))+1 \Leftarrow$ 降次、輔助角

$\therefore$最大值為 $\sqrt{2}+1$，最小值為 $1-\sqrt{2}$

6、 一動點 $P(x,y)$ 到點 $(-1,0)$ 之距離與其到點 $(3,0)$ 之距離比為 1：3，此動點之點集圖形為一圓，此圓之圓心為______，半徑為______。

答案：$(-\frac{3}{2},0)$; $\frac{3}{2}$

解析：$3\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$　，平方之

$\therefore 9[(x+1)^2+y^2]=(x-3)^2+y^2 \Rightarrow 8x^2+8y^2+24x=0$

$\therefore x^2+y^2+3x=0$, $(x+\frac{3}{2})^2+y^2=(\frac{3}{2})^2$ ，圓心為 $(-\frac{3}{2},0)$　半徑 $\frac{3}{2}$

7、 有一圓圓心為 $(4,-5)$ 並且切於 $y$ 軸，求此圓之方程式。

答案：半徑 $=|$圓心之橫坐標$|=|4|=4$

此圓之方程式為 $(x-4)^2+(y+5)^2=4^2$ ，即 $x^2+y^2-8x+10y+25=0$

8、 設圓 $C_1: x^2+y^2=1$ 與圓 $C_2: x^2+y^2+2x+4y+1=0$ 相交於 $A, B$ 兩點，則

(1)直線 $AB$ 的方程式為______,

(2)圓 $C_3$ 通過 $A, B$ 兩點且通過點 $D(3,0)$ 則圓 $C_3$ 之方程式為______。

答案：(1) $x+2y+1=0$　(2) $x^2+y^2-2x-4y-3=0$

解析：(1)直線 $AB$ 的方程式為 $(x^2+y^2+2x+4y+1)-(x^2+y^2-1)=0 \Rightarrow x+2y+1=0$

(2)設通過 $A, B$ 兩點之圓 $C_3$ 為 $(x^2+y^2-1)+k(x+2y+1)=0$ ，此圓通過點 $D(3,0)$

$\therefore k=-2$　$\therefore$圓 $C_3$ 之方程式為 $x^2+y^2-2x-4y-3=0$

9、 設 $A(-4, 4)$，圓 $C$: $x^2+y^2-6x-6y-7=0$ 若通過 $A$ 點對圓 $C$ 作二切線得切點為 $P, Q$，則 (1) $\overline{AP}=$__________。(2)△$APQ$ 之外接圓方程式為____________________。

$\boxed{\text{答案}}$：(1) 5 (2) $x^2+y^2+x-7y=0$

$\boxed{\text{解析}}$：(1) $\overline{AP}=\sqrt{16+16+24-24-7}=5$

(2)△$APQ$ 之外接圓即以 $\overline{OA}$ 為直徑之圓，∴圓心 $O(3, 3)$

$\therefore (x-3)(x+4)+(y-3)(y-4)=0$，∴圓為 $x^2+y^2+x-7y=0$

10、設圓 $C$ 之圓心在 $x+y=3$ 上，且圓 $C$ 切 $2x+y+5=0$ 於$(-2,-1)$，則圓 $C$ 之圓心為______，又半徑為______。

$\boxed{\text{答案}}$：$(2,1)$; $2\sqrt{5}$

$\boxed{\text{解析}}$：過$(-2,-1)$與 $2x+y+5=0$ 垂直之直線為 $x-2y=0$，

$\begin{cases} x+y=3 \\ x-2y=0 \end{cases}$ ∴圓心為$(2,1)$，半徑為 $\sqrt{(2+2)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{5}$

11、設直線 $L: y=\frac{3}{4}x+b$ 與圓 $x^2+y^2+2x-6y=6$ 相切，則 $b=$______ 或 ______。

$\boxed{\text{答案}}$：$\frac{35}{4}$; $\frac{-5}{4}$

$\boxed{\text{解析}}$：$x^2+y^2+2x-6y=6 \Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=4^2$，圓之圓心為$(-1,3)$，半徑為 4，

直線 $L$ 之斜率為 $\frac{3}{4}$，∴切線為 $y-3=\frac{3}{4}(x+1)\ \pm 4\sqrt{(\frac{3}{4})^2+1} \Rightarrow y-3=\frac{3}{4}(x+1)\pm 5$

$\Rightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{35}{4}$ 或 $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$ ，$\therefore b=\frac{35}{4}$ 或 $\frac{-5}{4}$

12、求過 $A(-6, 4)$且與圓 $C$: $x^2+y^2+2x-6y-15=0$ 相切之切線方程式為______________________。

$\boxed{\text{答案}}$：$12x-5y+92=0$ 或 $x=-6$

$\boxed{\text{解析}}$：設切線 $y-4=m(x+6) \Rightarrow L$: $mx-y+(6m+4)=0$

∴圓 $C$: $x^2+y^2+2x-6y-15=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=25$

∴圓心 $O(-1, 3)$，半徑 $r=5$，$\therefore d(O, L)=r \Rightarrow \left|\frac{-m-3+6m+4}{\sqrt{m^2+1}}\right|=5$

$\therefore 25m^2+10m+1=25(m^2+1)$, $\therefore m=\frac{12}{5}$，∴切線為 $y-4=\frac{12}{5}(x+6)$ 及另一切線 $x=-6$

∴切線：$12x-5y+92=0$ 或 $x=-6$

13、過點$(2,-5)$的直線 $L$ 交圓 $C: (x-1)^2+(y-2)^2=10$ 於 $P, Q$ 兩點且 $\overline{PQ}=2\sqrt{5}$，則直線 $L$ 之斜率為______或______。

$\boxed{\text{答案}}$：$-2$; $\frac{11}{2}$

$\boxed{\text{解析}}$：設直線 $PQ$ 為 $y+5=m(x-2)$, $\frac{|m-2-2m-5|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5} \Leftarrow \sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{5})^2}$

$\therefore 2m^2-7m-22=0$，$(m+2)(2m-11)=0$ $\quad\therefore m=-2$ 或 $\dfrac{11}{2}$

14、設圓 $C: x^2+(y+2)^2=9$，若點 $P(2,2)$ 為圓外一點，點 $Q(0,-4)$ 為圓內一點且直線 $\overline{PQ}$ 交圓 $C$ 於 $A, B$ 兩點則(1) $\overline{PA}\times\overline{PB}$ ______, (2) $\overline{QA}\times\overline{QB}=$ ______ 。

答案：(1)11 (2)5

解析：(1)∵$P$ 為圓外一點：切割線性質

$\therefore \overline{PA}\times\overline{PB}=P$ 到此圓之切線段長之平方 $=2^2+(2+2)^2-9=11$

(2)$Q$ 為圓內一點 ：內冪性質

$\therefore \overline{QA}\times\overline{QB}=(r+\overline{CQ})(r-\overline{CQ})=r^2-\overline{CQ}^2=3^2-(\sqrt{(0-0)^2+(-2+4)^2})^2=5$

15、二圓 $C_1: x^2+y^2+2x=0$，$C_2:(x+3)^2+(y+4)^2=9$ 則

(1)二圓之外公切線段長為何？

(2)二圓之二條外公切線的交點為何？

(3)二圓之二條外公切線方程式為何？

(4)二條外公切線之交角為 $\theta$，則 $\sin\theta=$ ？

答案：(1)圓 $C_1$ 圓心$(-1,0)$，半徑為 1；圓 $C_2$ : 圓心$(-3,4)$，半徑為 3，

又連心線長 $2\sqrt{5}$，外公切線段長為 $\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$

(2)二條外公切線的交點為 $(\dfrac{3\times(-1)+(-1)\times(-3)}{3-1},\dfrac{3\times0+(-1)\times(-4)}{3-1})=(0,2)$

(3)設外公切線方程式為 $y-2=mx$，$\therefore \dfrac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$ $\quad\therefore 4m=3$ $\quad\therefore m=\dfrac{3}{4}$

∴二條外公切線為 $y=\dfrac{3}{4}x+2$ 與 $x=0$

(4)二外公切線之交角為 $\theta$ $\quad\therefore \sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\therefore \sin\theta=2\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$

16、設 $L: kx-y-k-4=0$, $C: x^2+y^2-6x+2y+1=0$，就 $k$ 值討論直線 $L$ 與圓 $C$ 的位置關係。

答案：$x^2+y^2-6x+2y+1=0\Rightarrow(x-3)^2+(y+1)^2=3^2$

∴圓心 $O(3,-1)$，半徑 3，$\because d(O,L)=\dfrac{|3k+1-k-4|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{|2k-3|}{\sqrt{k^2+1}}$

(1)相交於兩點 $\Rightarrow d(O,L)<3$，$\dfrac{|2k-3|}{\sqrt{k^2+1}}<3\Rightarrow|2k-3|<3\sqrt{k^2+1}$

$\Rightarrow 4k^2-12k+9<9k^2+9\Rightarrow 5k^2+12k>0\Rightarrow k(5k+12)>0$，$\therefore k>0$ 或 $k<-\dfrac{12}{5}$

(2)相切 $\Rightarrow d(O,L)=3\Rightarrow k=0$ 或 $k=-\dfrac{12}{5}$

(3)外離 $\Rightarrow d(O,L)>3\Rightarrow -\dfrac{12}{5}<k<0$

17、點 $P(3,1,-1)$ 為球面 $S: x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-7=0$ 上的一點，則過 $P$ 點與球相切之平面方

程式為______。

答案：$4x-y+2z-9=0$

解析：過 $P$ 點之切平面為 $3x+y-z+(x+3)-2(y+1)+3(z-1)-7=0 \Rightarrow 4x-y+2z-9=0$

18、直線 $L:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}$ 與球面 $S:(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$ 相交於 $P, Q$ 兩點，則此二點坐標為______和______。

答案：(1,0,3); (5,–2,1)

解析：直線 $L: x=2t-1,\ y=-t+1,\ z=-t+4$

$\therefore (2t-1-2)^2+(-t+1+2)^2+(-t+4-1)^2=9$，$6t^2-24t+18=0$　$\therefore t=1$ 或 3

$\therefore$ 此二交點為(1,0,3)和(5,–2,1)

19、設 $m\in\mathbb{R}$，且 $x^2+y^2+z^2-2(m+1)x-2my+2mz+4m^2-2=0$ 為一球面，若此球面有最大半徑時，求此時的球心坐標為____________，半徑為______。

答案：原式 $\Rightarrow [x-(m+1)]^2+(y-m)^2+(z+m)^2=-4m^2+2+(m+1)^2+m^2+m^2=-m^2+2m+3$

$\therefore -m^2+2m+3>0 \Rightarrow m^2-2m-3<0,\quad (m+1)(m-3)<0 \Rightarrow -1<m<3$，

球心 $(m+1, m, -m)$，$r^2=-m^2+2m+3=-(m-1)^2+4\le 4$

$\therefore$ 最大半徑 $=\sqrt{4}=2$ 時，球心(2, 1,–1)。

20、設平面 $\pi$ 包含直線 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-6}=\dfrac{z}{4}$ 且與球面 $S:(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=6$ 相切，則平面 $\pi$ 的方程式為______或______。

答案：$2x+y+z-7=0$；$22x-17y-31z+63=0$

解析：平面 $\pi$ 包含直線 $\begin{cases}6x+y-11=0\\4x-z-4=0\end{cases}$，$\therefore$ 設平面 $\pi$ 為 $(6x+y-11)+k(4x-z-4)=0$

即 $(6+4k)x+y-kz-(11+4k)=0$ 與球面 $S$ 相切 $\dfrac{|6+4k-1-11-4k|}{\sqrt{(6+4k)^2+1^2+(-k)^2}}=\sqrt{6}$

$\therefore 17k^2+48k+31=0$，$k=-1$ 或 $-\dfrac{31}{17}$

$\therefore$ 平面 $\pi$ 為 $2x+y+z-7=0$ 或 $22x-17y-31z+63=0$

21、設平面 $\pi: x+2y+z+2=0$ 截一球面 $S:(x-5)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=10$ 於一圓，則此圓之圓心為______，圓的半徑為______。

答案：(4,–3,0); 2

解析：球心到平面 $\pi$ 之距離為 $\dfrac{|5-2+1+2|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$，球之半徑為 $\sqrt{10}$，$\therefore$ 圓之半徑為 $\sqrt{10-6}=2$

圓心為 $(5,-1,1)-\dfrac{6}{\sqrt{6}}\times(\dfrac{1,2,1}{\sqrt{6}})=(4,-3,0)$

22、設兩球 $S_1$ $:(x-1)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=16$，$S_2$ $:x^2+y^2+z^2+10x+2y+8z-1=0$ 相交於一圓，則此圓之圓心為______，圓的半徑為______。

答案：$(-1,-3,0)$; $\sqrt{7}$

解析：兩球之根平面為 $S_2-S_1 \Rightarrow 12x-6y+12z-6=0$

$\therefore$此交圓落於平面 $\pi: 2x-y+2z-1=0$ 上，球心$(1,-4,2)$到平面 $\pi$ 之距離為 $\dfrac{|9|}{3}=3$

$\therefore$圓之半徑 $=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ ，圓心為$(1,-4,2)-\dfrac{9}{3}\cdot\dfrac{1}{3}(2,-1,2)=(-1,-3,0)$

23、已知 $x, y, z$ 滿足 $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$ ，則(1) $(x+4)^2+(y-1)^2+(z+2)^2$ 之最大值為______，最小值為______, (2) $2x-y-2z$ 之最大值為______，最小值為______。

答案：(1)64; 36　(2)6; 0

解析：(1)$(-4,1,-2)$到球 $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$ 之最近距離為

$\sqrt{(-6)^2+2^2+(-3)^2}-1=6$ ，最遠距離為 $7+1=8$

$\therefore$距離平方 $(x+4)^2+(y-1)^2+(z+2)^2$ 之最大值為 64，最小值為 36

(2)設 $2x-y-2z=k$ , $\dfrac{|4+1-2-k|}{3}\le 1$, $|k-3|\le 3$ ， $0\le k\le 6$　$\therefore$最大值 6，最小值 0

24、一球面 $S$ 與 $xz$ 平面相交於一圓 $(x-1)^2+(z-3)^2=13$，又球面 $S$ 通過點$(3,1,5)$，則球心坐標為______，球的半徑為______。

答案：$(1,-2,3)$; $\sqrt{17}$

解析：設球面為 $(x-1)^2+(y-t)^2+(z-3)^2=13+t^2$ ，代入$(3,1,5)$　得 $t=-2$

$\therefore$ 球心為$(1,-2,3)$，半徑 $\sqrt{17}$

25、球心為$(0,0,2)$又與球 $S_1: x^2+y^2+z^2-4x+6y+8z+20=0$ 相切之球面方程式為______或______。

答案： $x^2+y^2+(z-2)^2=16$ ; $x^2+y^2+(z-2)^2=100$

解析：球 $S_1$ 之球心為$(2,-3,-4)$，半徑為 3，連心線長 7

若兩球外切，所求球面半徑為 $7-3=4$ ，可得 $x^2+y^2+(z-2)^2=16$

若兩球內切，所求球面半徑為 $7+3=10$ ，可得 $x^2+y^2+(z-2)^2=100$

26、設球面 $S$ 與平面 $\pi: x+2y-2z+3=0$ 相切於一點 $P(1,-3,-1)$且點 $Q(0,-2,1)$亦在球面 $S$ 上，則球心坐標為______，球之半徑為______。

答案：$(0,-5,1)$; 3

解析：球面 $S$ 與平面 $\pi$ 相切於 $P$　$\therefore$球心在 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$ 上，設球心 $S(1+t,-3+2t,-1-2t)$

又 $\overline{SP}=\overline{SQ}$

$\Rightarrow (1+t-1)^2+(-3+2t+3)^2+(-1-2t+1)^2=(1+t-0)^2+(-3+2t+2)^2+(-1-2t-1)^2$ ，

$t=-1 \Rightarrow$ 球心為 $S(0,-5,1)$，半徑為 $\overline{SP}=\sqrt{(0-1)^2+(-5+3)^2+(1+1)^2}=3$

27、設直線 $L$: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ ，球面 $S$: $x^2+y^2+z^2+4x-6y+4z+16=0$ ，求直線 $L$ 上一點 $P$，

使 $P$ 到 $S$ 的距離爲最短。

$\boxed{答案}$：$L:\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=2-t \end{cases}, t\in\mathbb{R} \Rightarrow P(1+2t,-1+t,2-t)$

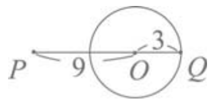
$S:(x+2)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=1 \Rightarrow$ 球心 $S(-2,3,-2)$，半徑 1

$\overrightarrow{SP}=(2t+3,t-4,-t+4)$ ，$L$ 的方向向量 $\overrightarrow{n}=(2,1,-1)$

$\because \overrightarrow{SP}\perp\overrightarrow{n} \Rightarrow \overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{n}=0$，$2(2t+3)+(t-4)-(-t+4)=0 \Rightarrow 6t-2=0 \Rightarrow t=\dfrac{1}{3}$，$\therefore P(\dfrac{5}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3})$

28、設點 $P(4,-4,4)$，球面 $S$：$x^2+y^2+z^2=2(x+2y-2z)$，求點 $P$ 到球面 $S$ 的最遠點與最遠距離？

$\boxed{答案}$：




球面 $S$：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=3^2 \Rightarrow$ 球心 $O(1,2,-2)$，半徑 3

$\overline{OP}=\sqrt{(4-1)^2+(-4-2)^2+(4+2)^2}=9 \Rightarrow \overline{PQ}=9+3=12$

$\therefore \overline{PQ}:\overline{OQ}=12:3=4:1$

設 $Q(x_0,y_0,z_0)$，$x_0=\dfrac{4\cdot1-1\cdot4}{4-1}=0,\ \ y_0=\dfrac{4\cdot2-1\cdot(-4)}{4-1}=\dfrac{12}{3}=4, z_0=\dfrac{4\cdot(-2)-1\cdot4}{4-1}=\dfrac{-12}{3}=-4$

$\therefore$最遠點$(0,4,-4)$，最遠距離 12。