高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：97.12.11					
範圍	Book3 空間平面直線	班級	三年 班	姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 5 分)

11、(B) 一平面通過(1,2,1)並通過二平面 $x+2y-3z=0$ 與 $x-y+z=1$ 的交線，則此平面的方程式為 (A) $3x-2z=1$ (B) $3x-z=2$ (C) $2x-z=1$ (D) $x+y+z=4$

解析：平面族：

設平面為 $(x+2y-3z)+k(x-y+z-1)=0$，代入(1,2,1)，得 $2-k=0$， $\therefore k=2$

$\therefore$平面為 $3x-z=2$

12、(AD)(複選)設二平面 $E_1: x+ky+z=0$ 與 $E_2: x+\sqrt{2}y-z+1=0$ 的夾角為 $\dfrac{\pi}{3}$，求 $k=$？

(A) $\sqrt{2}$ (B)1 (C)2 (D) $-\sqrt{2}$ (E) -2

解析：$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}=\left|\dfrac{1+\sqrt{2}k-1}{\sqrt{1+k^2+1}\cdot\sqrt{1+2+1}}\right| \Rightarrow k^2+2=2k^2$，$\therefore k=\pm\sqrt{2}$

13、(B) xyz 空間之一點(1,0,−1)及一線 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{y-3}{6}$，決定一平面，其方程式為

(A) $x-2y+z+1=0$ (B) $x-2y+z=0$ (C) $x-2y+z-1=0$ (D) $2x-y+2z=0$
(E) $x-2y+2z+1=0$

解析：$P(1,0,-1)$，取直線上一點 $Q(1,2,3)$，$\overrightarrow{PQ}=(0,2,4)$，又 $\overrightarrow{v}=(4,5,6)$

$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{v}=(0,2,4)\times(4,5,6)=(-8,16,-8)$

$\therefore$平面法向量為 $\overrightarrow{n}=(1,-2,1)\Rightarrow$平面方程式為 $x-2y+z=0$

二、填充題 (每題 10 分)

18、空間中有三點 $A(3,-1,2)$, $B(5,0,1)$, $C(4,2,2)$則

(1)△ABC 的面積為何？__________

(2)平面 ABC 的方程式為何？________

(3)又平面 ABC 與平面 E： $x+2y-3z=6$ 之夾角為 θ，則 $|\cos\theta|=$？________

(4)若 A, B, C 在平面 E 上之投影分別為 A', B', C'，則△ $A'B'C'$ 之面積為何？________

答案：(1) $\dfrac{1}{2}\sqrt{35}$ (2) $3x-y+5z=20$ (3) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ (4) $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

解析：$\overrightarrow{AB}=(2,1,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,3,0)$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(3,-1,5)$

(1)△ABC 面積 $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{9+1+25}=\dfrac{1}{2}\sqrt{35}$

(2)平面 ABC 的方程式 $3(x-3)-(y+1)+5(z-2)=0\Rightarrow 3x-y+5z-20=0$，

(3) $|\cos\theta|=\left|\dfrac{(1,2,-3)\cdot(3,-1,5)}{\sqrt{14}\times\sqrt{35}}\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

(2)△ $A'B'C'$ 面積 $=\Delta ABC\times\cos\theta=\dfrac{1}{2}\sqrt{35}\times\dfrac{\sqrt{10}}{5}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

19、設點 $A(3,1,-1)$，平面 $E: x-2y+z=4$，則 A 在平面 E 上之投影點為________，對稱點為________。

答案：$(\frac{11}{3},\frac{-1}{3},-\frac{1}{3})$；$(\frac{13}{3},\frac{-5}{3},\frac{1}{3})$

解析：依公式 $t=3-2-1-4=-4$

投影點 $(3,1,-1)-1\times\frac{(-4)}{\sqrt{6}}\times\frac{(1,-2,1)}{\sqrt{6}}=(\frac{11}{3},\frac{-1}{3},\frac{-1}{3})$

對稱點 $(3,1,-1)-2\times\frac{(-4)}{\sqrt{6}}\times\frac{(1,-2,1)}{\sqrt{6}}=(\frac{13}{3},-\frac{5}{3},\frac{1}{3})$

20、設空間中有一平面 $E: 2x-y+3z=7$，及兩點 $A(1,3,2), B(-2,1,5)$，若直線 AB 交平面 E 於 C，則 $\overline{AC}:\overline{BC}=$________。

答案：2 : 3

解析：$\overline{AC}:\overline{BC}=d(A,E):d(B,E)=\frac{|2-3+6-7|}{\sqrt{14}}:\frac{|-4-1+15-7|}{\sqrt{14}}=2:3$

21、設 $A(2,5,1)$在平面 E 上，且平面 E 與二平面 $3x-y+5z=7$，$x-y+2z=11$ 均垂直，則平面 E 的方程式為________。

答案：$3x-y-2z+1=0$

解析：$\vec{n}=(3,-1,5)\times(1,-1,2)=(3,-1,-2)$；$3(x-2)-(y-5)-2(z-1)=0\Rightarrow 3x-y-2z+1=0$

22、設平面 E 上有兩點 $A(2,-3,1), B(4,1,2)$且平面 E 與平面 $F: 7x-y+2z=5$ 垂直，則平面 E 的方程式為________。

答案：$3x+y-10z=-7$

解析：平面 E 法向量 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{n_F}=(2,4,1)\times(7,-1,2)=(9,3,-30)=3(3,1,-10)$

$\therefore$平面 $E: 3(x-2)+(y+3)-10(z-1)=0\Rightarrow 3x+y-10z+7=0$

23、設平面 E 通過點$(1,3,4)$且在第一卦限與 xy, yz, zx 平面所圍出之錐體體積最小，則平面 E 之方程式為何？____________，又此最小體積為何？________________。

答案：最小體積為 54，平面 E 為 $\frac{x}{3}+\frac{y}{9}+\frac{z}{12}=1$

解析：設平面 $E: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 且 $\frac{1}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}=1$ 且 $a>0$，$b>0$，$c>0$

平面 E 在第一卦限所圍出錐體體積為 $\frac{1}{6}abc$，算幾不等式 $\frac{\frac{1}{a}+\frac{3}{b}+\frac{4}{c}}{3}\ge\sqrt[3]{\frac{12}{abc}}$，$\therefore\frac{abc}{6}\ge 54$

等號成立時 $\frac{1}{a}=\frac{3}{b}=\frac{4}{c}=\frac{1}{3}$，$\therefore a=3,\ b=9,\ c=12$，即最小體積為 54，平面 E 為

$\frac{x}{3}+\frac{y}{9}+\frac{z}{12}=1$

24、設直線 L 過 $A(1,-5,-2), B(-2,-5,-3)$兩點，若點 $P(3,3,2)$，則 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上之正射影為________，P 對直線 L 之投影點為_________；P 對直線 L 之對稱點為________。

答案：(3,0,1); (4,-5,-1); (5,–13,–4)

解析：

$\overrightarrow{AP}=(2,8,4),\ \overrightarrow{AB}=(-3,0,-1),\quad \overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上之正射影爲

$(\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2})\cdot\overrightarrow{AB}=(\dfrac{-10}{10})\overrightarrow{AB}=(3,0,1)$

$\overleftrightarrow{AB}: x=1+3t,\ y=-5,\ z=-2+t,\ P(3,3,2)$

$\therefore$設 D 爲 P 對 L 之投影點，則 $\overrightarrow{AD}=(3,0,1)\Rightarrow D(4,-5,-1)$

設 P 對 L 之對稱點爲 P'，則 $\overline{PP'}$ 之中點爲 $D\Rightarrow P'(5,-13,-4)$

25、設兩直線 $L_1:\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-1}{+2}=\dfrac{z}{4}, L_2:\dfrac{x+7}{5}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z-a}{8}$ 交於一點 P，則 P 點坐標爲________；又 $a=$________。

答案：$(-2,7,12);\ 4$

解析：$L_1: x=t-5,\ y=2t+1,\ z=4t$, 代入 $L_2\Rightarrow\dfrac{t-5+7}{5}=\dfrac{2t+1-1}{6}=\dfrac{4t-a}{8}$ $\quad\therefore t=3$，$a=4$

交點爲 $P\ (-2,7,12)$

26、設兩平行線 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{-2},\ L_2:\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z+1}{2}$，則由直線 L_1 與 L_2 所決定的平面方程式爲________；又兩平行線間的距離爲________。

答案：$x+z=4;\ \dfrac{4}{3}\sqrt{2}$

解析：$P(1,0,3)$ 在 L_1 上，$Q(5,-4,-1)$ 在 L_2 上，$\overrightarrow{PQ}=(4,-4,-4),\ \overrightarrow{v}=(2,-1,-2)$

$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{v}=(4,0,4)$，$\therefore$平面之方程式爲 $4(x-1)+0(y-0)+4(z-3)=0\Rightarrow x+z=4$；

平行線間距離爲 $\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|}=\dfrac{\sqrt{4^2+0^2+4^2}}{3}=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$

27、設 $L_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{4},\ L_2:\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{3}$，則

(1) L_1 與 L_2 的交點坐標爲____________。

(2)包含 L_1 與 L_2 之平面方程式爲_______________。

答案：(1) $P(1,2,-3)$ (2) $-7x+13y+5z=4$

解析：(1)令交點 $P(t+2,-t+1,4t+1)$，代入 L_2，$\therefore\dfrac{t-3}{4}=\dfrac{-t-2}{1}=\dfrac{4t+1}{3}\Rightarrow t=-1$，交點 $P(1,2,-3)$。

(2)令 $\vec{n}$ 爲所求平面法向量，$\vec{n}\perp\vec{v_1}=(1,-1,4)$ 且 $\vec{n}\perp\vec{v_2}=(4,1,3)$

$\therefore\vec{n}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=(\begin{vmatrix}-1&4\\1&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&1\\3&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-1\\4&1\end{vmatrix})=(-7,13,5)$

$\therefore E: -7x+13y+5z=k$，將 $P(1,2,-3)$ 代入，$\therefore k=-7+26-15=4$, $\therefore E: -7x+13y+5z=4$

28、過 $A(3,-2,-2)$, $B(-1,0,-2)$兩點的直線 L 與平面 $E: 2x-y-2z=7$ 之交點為________，又直線 L 與平面 E 之銳夾角為 θ，則 $\cos\theta=$ _______ 。

答案：$(1,-1,-2)$; $\dfrac{2}{3}$

解析：$\overleftrightarrow{AB}: x+1=4t,\ y=-2t,\ z=-2$ 代入 E $\quad 2(4t-1)-(-2t)-2(-2)=7$, $\therefore t=\dfrac{1}{2}$，交點$(1,-1,-2)$

設直線 L 方向向量 $\overrightarrow{v_{AB}}=(4,-2,0)$ 與平面 E 法向向量 $\overrightarrow{n}=(2,-1,-2)$ 夾角α

則 $\cos\alpha=\dfrac{(2,-1,-2)\cdot(2,-1,0)}{3\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ， $\therefore \cos\theta=\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$

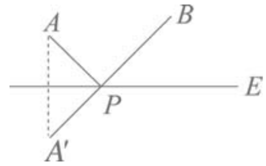
29、設平面 E 與平面 $x-2y+5z=2$ 及 $2x-3y+z=3$ 相交於一直線，又點 $A(-4,1,2)$在平面 E 上，則平面 E 的方程式為________。

答案：$8x-15y+31z-15=0$

解析： 設平面 E 為 $k(x-2y+5z-2)+(2x-3y+z-3)=0$ ， $2k-12=0$ ，$\therefore k=6$

$\therefore$平面 E 為 $8x-15y+31z-15=0$

30、空間中二點 $A(3, 2, 1)$, $B(4, 4, 4)$及平面 $E: x+y+z=0$ 在 E 上找一點 P，使 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 為最小，則 P 之坐標為何？



答案：$P(\dfrac{2}{3}, 0, -\dfrac{2}{3})$

解析：$A(3, 2, 1)$, $B(4, 4, 4)$代入平面 $E: x+y+z=0 \Rightarrow A$ 與 B 同側

(1)求 A 對 E 之對稱點 A' ，$\because \overleftrightarrow{AA'}: \begin{cases} x=3+t \\ y=2+t,\ t\in\mathbb{R} \text{ 代入 } E \\ z=1+t \end{cases}$

$3+t+2+t+1+t=0 \Rightarrow t=-2$ ，$\overleftrightarrow{AA'}$ 與 E 交點$(1, 0,-1)$，$\therefore A'$ 坐標為$(-1,-2,-3)$

(2) $\overrightarrow{A'B}=(5, 6, 7) \Rightarrow \overleftrightarrow{A'B}: \begin{cases} x=-1+5t \\ y=-2+6t,\ t\in\mathbb{R} \text{ 代入 } E \\ z=-3+7t \end{cases}$

$-1+5t-2+6t-3+7t=0 \Rightarrow t=\dfrac{1}{3}$ ，$\therefore \overleftrightarrow{A'B}$ 與 E 交點 $P(\dfrac{2}{3}, 0, -\dfrac{2}{3})$，使 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 為最小。

31、設二點 $A(3,1,2)$, $B(4,3,3)$和一直線 $L: x=t+1$ ， $y=1$ ， $z=-t+2$ ，若點 P 在直線 L 上移動，則當 P 點坐標為何時，$\triangle PAB$ 的面積最小？又其最小面積為何？

答案：$P(2,1,1)$，$\triangle PAB$ 的面積最小 $\sqrt{2}$

解析：直線 AB 與 L 為歪斜線，為使$\triangle PAB$ 面積最小，故 P 到直線 L 之距離要最小，因此 P 為此對歪斜線之公垂線與 L 之交點。

$P(t+1,1,-t+2)$ ，設 Q 在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上， $Q(3+s,1+2s,2+s) \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(s-t+2, 2s, s+t)$

$\overrightarrow{PQ}\cdot(1,0,-1)=0,\ \overrightarrow{PQ}\cdot(1,2,1)=0$ ，$\begin{cases}(s-t+2)-(s+t)=0\\(s-t+2)+2(2s)+(s+t)=0\end{cases}$ ， $\therefore t=1$ ，$s=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore P(2,1,1),\ Q(\dfrac{8}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3}),\ \overline{PQ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ \overline{AB}=\sqrt{6}$ ，$\therefore\triangle PAB=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\sqrt{2}$

32、設 $L_1:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{1-y}{6}=\dfrac{z-5}{2},L_2:\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{1-y}{2}=\dfrac{3-z}{2}$

(1)求包含 L_1 且平行 L_2 的平面？　　(2)求 L_1,L_2 的最近距離？

答案：(1) $2x+y+2z=17$ ；(2) 6

解析：(1)設平面 E 包含 L_1 與 L_2 平行，且法向量 $\overrightarrow{n}$

$\therefore\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v_1}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v_2}$, 又 $\overrightarrow{v_1}=(1,-6,2)$, $\overrightarrow{v_2}=(3,-2,-2)$

$\therefore\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=(\begin{vmatrix}-6&2\\-2&-2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2&1\\-2&3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1&-6\\3&-2\end{vmatrix})=(16,\ 8,\ 16)=8(2,1,2)$

$\therefore$ 取 $\overrightarrow{n}=(2,1,2)$ ，又平面 E 過 L_1 上的點 $A(3,\ 1,\ 5)$，$\therefore E$： $2(x-3)+(y-1)+2(z-2)=0$

$\therefore$ E： $2x+y+2z=17$

(2)點 $B(-4,\ 1,\ 3)$在 L_2 上，$d(L_1,L_2)=d(B,E)=\left|\dfrac{-8+1+6-17}{\sqrt{4+1+4}}\right|=6$

33、若兩歪斜線 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{1},L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ ，試求

(1) L_1 與 L_2 兩歪斜線之最近距離。　(2) L_1 與 L_2 之公垂線。

答案：(1) $\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$　(2) $x=\dfrac{9}{5},\dfrac{y-\frac{18}{5}}{-1}=\dfrac{z+\frac{11}{5}}{2}$

解析：(1)令 $P(1+t,2+2t,-3+t)$，$Q(1+2s,1+2s,1+s)\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=(2s-t,2s-2t-1,s-t+4)$

$\because\overrightarrow{PQ}\perp(1,\ 2,\ 1)$且 $\overrightarrow{PQ}\perp(2,\ 2,\ 1)$

$\therefore\begin{cases}1\cdot(2s-t)+2\cdot(2s-2t-1)+1\cdot(s-t+4)=0\\2\cdot(2s-t)+2\cdot(2s-2t-1)+1\cdot(s-t+4)=0\end{cases}\Rightarrow t=\dfrac{4}{5},\ \ s=\dfrac{2}{5}$

$\therefore\overrightarrow{PQ}=(0,\dfrac{-9}{5},\dfrac{18}{5})$，且 $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(\dfrac{-9}{5})^2+(\dfrac{18}{5})^2}=\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$ 。

(2) $\because P(\dfrac{9}{5},\dfrac{18}{5},\dfrac{-11}{5})$，$Q(\dfrac{9}{5},\dfrac{18}{5},\dfrac{-11}{5})$，$\overrightarrow{PQ}=(0,\dfrac{-9}{5},\dfrac{18}{5})=\dfrac{9}{5}(0,-1,\ 2)$，取方向向量$(0,-1,\ 2)$，

公垂線 $\overleftrightarrow{PQ}:\begin{cases}x=\dfrac{9}{5}\\y=\dfrac{18}{5}-t\\z=-\dfrac{11}{5}+2t\end{cases}$ ， $t\in\mathbb{R}$ 。即 $x=\dfrac{9}{5},\dfrac{y-\frac{18}{5}}{-1}=\dfrac{z+\frac{11}{5}}{2}$