高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：97.11.20					
範圍	Book3 平面向量	班級 座號	三年　　班	姓名	

一、選擇題 (每題 5 分)

1、(C) 設 $P(1,3)$，直線 $L:\begin{cases} x=-2+2t \\ y=2-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$，則 P 點到直線 L 的距離爲

(A)$\frac{1}{\sqrt{5}}$ (B)$\frac{3}{\sqrt{5}}$ (C)$\sqrt{5}$ (D)$\frac{9}{\sqrt{5}}$ (E)5

解析：$d(P,L)=\frac{|1+6-2|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

2、(E) G 爲$\triangle ABC$ 的重心，且 $|\overrightarrow{GA}|=2$，$|\overrightarrow{GB}|=3$，$|\overrightarrow{GC}|=4$，若$\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{GC}$ 之夾角爲θ，則
(A)$0°<\theta\le 90°$ (B)$90°<\theta\le 120°$ (C)$120°<\theta\le 135°$ (D)$135°<\theta\le 150°$
(E)$150°<\theta<180°$

解析：$\because G$ 爲重心　$\therefore \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\therefore |\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}|^2=|-\overrightarrow{GA}|^2$　$\therefore |\overrightarrow{GB}|^2+2\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+|\overrightarrow{GC}|^2=|\overrightarrow{GA}|^2$

$\therefore \overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=-\frac{21}{2}$，$\cos\theta=-\frac{7}{8}<-\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\therefore 150°<\theta<180°$

3、(E) 於平面上，P, Q 二點對於 A 點對稱，Q, R 二點對於 B 點對稱。若 $\vec{x}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{y}=\overrightarrow{OB}$ 且

$\overrightarrow{PR}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$，求$\alpha-\beta=$？ (A)4 (B)2 (C)0 (D)–2 (E)–4

解析：$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{QR}-\overrightarrow{QP}=2\overrightarrow{QB}-2\overrightarrow{QA}=2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OQ})-2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OQ})=2\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}$
$\therefore \alpha=-2,\beta=2,\therefore \alpha-\beta=-2-2=-4$

4、(B) $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=2$，$\overline{CA}=3$，$\overline{AB}=4$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=$ (A)-3 (B)$-\frac{3}{2}$ (C)$\frac{3}{2}$ (D)3 (E)$\frac{11}{2}$

解析：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{3^2+2^2-4^2}{2}=-\frac{3}{2}$

5、(E) 設正五邊形 $ABCDE$ 中，$\overline{AB}=2$，則下列內積之值何者最小？ (A)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (B)$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

(C)$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$ (D)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ (E)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$

解析：$\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|\cos 36°>0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AD}|\cos 72°>0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AE}|\cos 108°<0$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AD}|\cos 36°>0$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AE}|\cos 72°>0$

6、(BC D) (複選)　設$A(4,3)$, $B(6,8)$, $O(0,0)$爲平面上之三點，令C點爲$\overline{OB}$之中點，且令

$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB}$，則下列何者爲真？ (A)向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 的長度爲 15 (B)內積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=48$ (C) $\triangle OAB$的面積爲 7 (D)A點到直線 $\overleftrightarrow{OB}$ 的距離爲 $\dfrac{7}{5}$ (E) $\overrightarrow{AC}=(1,-1)$

解析：$\vec{a}=(4,3),\ \vec{b}=(6,8),\ \vec{a}+\vec{b}=(10,11),\ |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{221}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=48$，$\triangle OAB$ 的面積$=\dfrac{1}{2}\sqrt{5^2\ \times 10^2-48^2}=7$

直線 OB 爲 $4x-3y=0$，$d(A,\overleftrightarrow{OB})=\dfrac{7}{5}$，$C(3,4),\ \overrightarrow{AC}=(-1,1)$

二、填充題 (每題 10 分)

1、 設$\triangle ABC$ 中，P 在線段 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{PB}:\overline{PC}=2:3$，若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{PC}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則數對$(x,y)=$__________，又數對$(\alpha,\beta)=$__________。

答案：$(\dfrac{3}{5},\dfrac{2}{5})$；$(-\dfrac{3}{5},\dfrac{3}{5})$

解析：$\because \overline{PB}:\overline{PC}=2:3\quad \therefore \overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}\quad \therefore (x,y)=(\dfrac{3}{5},\dfrac{2}{5})$

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\quad \therefore (\alpha,\beta)=(-\dfrac{3}{5},\dfrac{3}{5})$

2、 設 $\vec{a}=(1,-1),\ \vec{b}=(3,1)$，則 $|t\vec{a}+\vec{b}|$的最小值爲______，又此時$t=$______。

答案：$2\sqrt{2}$；-1

解析：$|t\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(t+3)^2+(-t+1)^2}=\sqrt{2t^2+4t+10}=\sqrt{2(t+1)^2+8}$，$\therefore$最小值$2\sqrt{2}$，此時$t=-1$

3、平面上 A, B, C 三點共線，O 爲不在此線上之任一點，若$(2t+1)\overrightarrow{OA}+(3t+4)\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，求實數$t=$______。

答案：-2

解析：$\overrightarrow{OC}=-\dfrac{2t+1}{5}\overrightarrow{OA}-\dfrac{3t+4}{5}\overrightarrow{OB}$

$\because C, A, B$ 共線，$\therefore -\dfrac{2t+1}{5}-\dfrac{3t+4}{5}=1\Rightarrow t=-2$

4、設 $\vec{a}=(2,-6)$，$\vec{b}=(1,2)$，則(1) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影量爲____________，

(2) $\vec{a}$ 對於 $\vec{b}$ 的對稱向量爲____________。

答案：$-2\sqrt{5}$；$(-6,-2)$

解析：(1) $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{-10}{\sqrt{5}}=-2\sqrt{5}$　　(2) $2\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}-\vec{a}=2\times(-2\sqrt{5})\times\dfrac{(1,2)}{\sqrt{5}}-(2,-6)=(-6,-2)$

5、 設$\triangle OAB$ 是邊長爲 2 的正三角形，在 $\overline{AB}$ 上有三點 P, Q, R 使 $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RB}$，則 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=$______。

$\boxed{答案}$：$\frac{11}{4}$

$\boxed{解析}$：$\because \overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RB}$　$\therefore \overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$

$\therefore \overrightarrow{OR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ 又 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$

$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=\frac{3}{16}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{3}{16}|\overrightarrow{OB}|^2+\frac{10}{16}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{11}{4}$

6、 若 D 爲△ABC 內部一點，且 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$，則 $\overrightarrow{AD}=$_____ $\overrightarrow{AB}+$_____ $\overrightarrow{AC}$，又△ABD 的面積：△ACD 的面積：△BCD 的面積＝______。

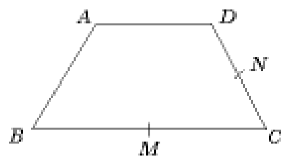
$\boxed{答案}$：$\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 1:1:1

$\boxed{解析}$：$\because \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$　$\therefore D$ 爲△ABC 的重心

$\therefore$△ABD 的面積：△ACD 的面積：△BCD 的面積＝1:1:1，且 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

7、 如圖等腰梯形 $ABCD$，$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{CD}=2$，$\overline{BC}=4$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$______，

若 M 爲 $\overline{BC}$ 之中點，N 爲 $\overline{CD}$ 的中點，則 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=$______。



$\boxed{答案}$：6; 4

$\boxed{解析}$：∵等腰梯形 $ABCD$，$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{CD}=2$，$\overline{BC}=4$

$\therefore \overline{AD}//\overline{BC}$ 且 $\angle ABC=60°$　$\therefore \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times4\times\frac{1}{2}=4$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})=6$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN})=(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM})$

$=(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})\cdot(\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA})=4$

8、△ABC 中，$\overrightarrow{AB}=(5,12)$，$\overrightarrow{BC}=(3,-4)$，則△$ABC$ 的周長爲______。

$\boxed{答案}$：$18+8\sqrt{2}$

$\boxed{解析}$：$\overrightarrow{AC}=(8,8)$，$\therefore$△$ABC$ 的周長爲 $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BC}|=13+5+8\sqrt{2}=18+8\sqrt{2}$

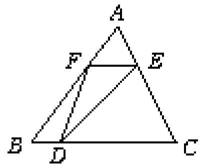
9、 平面上三點 $A(4,-1), B(-2,3), C(3,2)$，求

(1) A 到 $\overleftrightarrow{BC}$ 的距離 ＝________________，(2) △ABC 的面積 ＝______________，

(3) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上的正射影 ＝_____________。

$\boxed{答案}$：(1) $\frac{7\sqrt{26}}{13}$　(2) 7　(3) $(\frac{-85}{13},\frac{17}{13})$

10、在△ABC 的三邊 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 上分別取 D, E, F 三點，使 $\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$（如圖）。設 G 爲△DEF 的重心，$\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則 $\alpha=$______，$\beta=$______。



答案：$\frac{17}{45}$; $\frac{8}{45}$

解析：$\because G$ 爲△DEF 的重心　$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$

又 $\overrightarrow{DC}=4\overrightarrow{BD}$　$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{AE}$　$\therefore \overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$　$\therefore \overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{17}{45}\overrightarrow{AB}+\frac{8}{45}\overrightarrow{AC}$　$\therefore \alpha=\frac{17}{45},\ \beta=\frac{8}{45}$

11、設 $\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(1,0)$ 若 $\begin{cases}2\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}+\vec{b}\\ \vec{x}-\vec{y}=2\vec{a}-4\vec{b}\end{cases}$，則 $\vec{x}=$______，$\vec{y}=$______。(以坐標表示)

答案：$(2,1)$; $(0,-1)$

解析：$\begin{cases}2\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}+\vec{b}\\ \vec{x}-\vec{y}=2\vec{a}-4\vec{b}\end{cases}\Rightarrow 3\vec{x}=3\vec{a}-3\vec{b}$　$\therefore \vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{y}=3\vec{b}-\vec{a}$

$\therefore \vec{x}=(2,1)$，$\vec{y}=(0,-1)$

12、梯形 $ABCD$，$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，$\overline{AD}=1$，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=3$，$E$ 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{BE}=5\overline{CE}$，$\overline{BD}$ 與 $\overline{AE}$ 相交於 O(1)若 $\overrightarrow{AO}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD}$，則 $\alpha=$_______，$\beta=$_______，

(2)若 $\overline{BD}\perp\overline{AE}$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$_______，$\angle BAD=$_______。

答案：$\frac{2}{7}$; $\frac{5}{7}$; -1; 120°

解析：$\because ABCD$ 爲梯形，$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，$\overline{BE}=\frac{5}{6}\overline{BC}=\frac{5}{2}$

$\therefore \overline{DO}:\overline{BO}=1:\frac{5}{2}=2:5$

$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AD}$　$\therefore \alpha=\frac{2}{7},\ \beta=\frac{5}{7}$

$\because \overline{AD}\perp\overline{AE}$　$\therefore \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$(\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AD})\cdot(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=0$

$-\frac{2}{7}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{5}{7}|\overrightarrow{AD}|^2-\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ $\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-1$

令 $\angle BAD=\theta$，$\cos\theta=\frac{-1}{2\times 1}$ $\therefore \theta=120°$

13、設直線 $L: y=mx+2$ 與直線 $x-2y+3=0$ 之交角為 $45°$ 或 $135°$，則 $m=$_____或_____。

答案：$3;\ -\frac{1}{3}$

解析：$\tan 45°=\left|\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}\right|$ $\therefore \frac{3}{4}m^2-2m-\frac{3}{4}=0$，$m=3$ 或 $-\frac{1}{3}$

14、已知點 $A(2,5)$ 及一直線 $L: 4x+3y+2=0$，試求

(1)A 到 L 的距離為______，(2)A 在 L 上的正射影為______，(3)A 對於 L 的對稱點為______。

答案：5; (-2,2); (-6,-1)

解析：(1) $d(A,L)=\frac{8+15+2}{5}=5$

(2)A 在 L 上的正射影為 $(2,5)-5\cdot(\frac{4}{5},\frac{3}{5})=(-2,2)$

(3)對稱點 $(2,5)-2\times 5\times(\frac{4}{5},\frac{3}{5})=(-6,-1)$

15、設 $\vec{a}=(3,2)$, $\vec{b}=(1,-2)$, $\vec{c}=(-3,4)$，若 $t\vec{a}//(\vec{b}+t\vec{c})$，$t\neq 0$，求實數 $t=$______。

答案：$\frac{4}{9}$

解析：$t\vec{a}=t(3,2)=(3t,2t)$

$\vec{b}+t\vec{c}=(1,-2)+t(-3,4)=(1-3t,-2+4t)$

$\because t\vec{a}//(\vec{b}+t\vec{c})$，$\therefore \frac{3t}{1-3t}=\frac{2t}{-2+4t}$，$\therefore -6t+12t^2=2t-6t^2$，$18t^2-8t=0$；$2t(9t-4)=0$

$\therefore t=0$（不合）或 $\frac{4}{9}$。

16、設△ABC 為正三角形且邊長為 6，若 M, N 是 $\overline{BC}$ 邊的三等分點，則 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=$_______。

答案：26

解析：$\because \overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\frac{1}{9}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})\cdot(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$=\frac{1}{9}(2|\overrightarrow{AB}|^2+5\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2|\overrightarrow{AC}|^2)$

$=\frac{1}{9}(72+5\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{1}{2}+72)=26$

17、設直線 L 通過$(-2,-3)$且與 $\vec{u}=(1,2)$垂直，則直線 L 的方程式爲______。

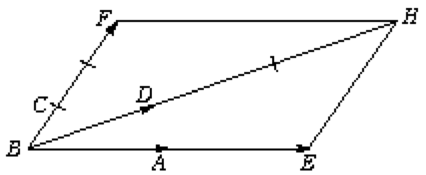
答案：$x+2y+8=0$

解析：直線 L 與 $\vec{u}=(1,2)$ 垂直　$\therefore L: x+2y=k$ 過$(-2,-3)$　$\therefore x+2y+8=0$

18、四邊形 $ABCD$ 中，$2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，則(1)$\triangle ABD$ 的面積：$\triangle CBD$的面積＝__________，(2)$\triangle ABC$ 的面積：四邊形 $ABCD$的面積＝____________。

答案：(1)3:2　(2)3:5

解析：



如圖 $BEHF$ 爲平行四邊形且 $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BE}}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BF}}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BH}}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \dfrac{\triangle ABD\text{ 的面積}}{\triangle BEH\text{ 的面積}}=\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{\triangle BCD\text{ 的面積}}{\triangle BFH\text{ 的面積}}=\dfrac{1}{9}$

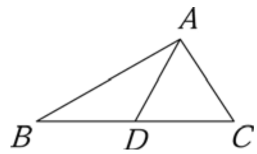
又$\triangle BEH$的面積＝$\triangle BFH$ 的面積

$\therefore \triangle ABD$ 的面積＝$\triangle BCD$ 的面積＝3:2

$\dfrac{\triangle ABC\text{ 的面積}}{\triangle BEF\text{ 的面積}}=\dfrac{1}{6}$, $\triangle BEF$ 的面積＝$\triangle BHE$ 的面積

$\therefore \triangle ABC$ 的面積：面積四邊形 $ABCD=(\dfrac{1}{6}):(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9})=3:5$

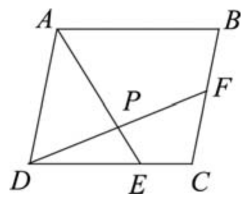
19、$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=6$, $\overline{AC}=3$，若 $\overline{AD}$ 爲$\triangle ABC$ 之中線，求 $\overline{AD}=$______。



答案：$2\sqrt{2}$

解析：利用中線長定理，$\therefore 25+9=2(\overline{AD}^2+9)$；$\therefore \overline{AD}^2=8$, $\therefore \overline{AD}=2\sqrt{2}$

20、如圖，$ABCD$ 是平行四邊形，$\overline{BF}:\overline{FC}=1:1$, $\overline{CE}:\overline{ED}=1:2$，$\overline{AE}$ 交 $\overline{DF}$ 於 P，設 $\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$，求數對$(x,y)=$________。



答案：$(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4})$

解析：(1) $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$，$\therefore \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$\therefore \overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BA}+y(\overrightarrow{BE}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA})=(x-\dfrac{1}{3}y)\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BE}$

$\because A, P, E$ 共線$\Rightarrow (x-\dfrac{1}{3}y)+y=1$

(2) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BF}$ ，$\therefore \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{BP}=x\cdot(\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{BF})+y\cdot 2\overrightarrow{BF}=x\overrightarrow{BD}+(-2x+2y)\overrightarrow{BF}$

$\because D, P, F$ 共線，$\therefore x+(-2x+2y)=1$

由(1)(2)得$\begin{cases} x+\dfrac{2}{3}y=1 \\ -x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3}{4} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$，故 $(x,y)=(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4})$ 。

21、設 $ABCD$ 爲平行四邊形，$\overline{AB}=4$，$\overline{AD}=1$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$______。

答案：-15

解析：$\because ABCD$ 爲平行四邊形　$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$　$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=-15$

22、設 $\overrightarrow{OA}=(4,2)$，$\overrightarrow{OB}=(-3,1)$，$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OA}$ 且 $\overrightarrow{AC}//\overrightarrow{OB}$ 又 $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ ，則 $\overrightarrow{OC}=$____,

$\overrightarrow{OD}=$_____。

答案：(-2,4); (1,3)

解析：設 $\overrightarrow{OC}=(x,y)$，$(x,y)\cdot(4,2)=0$　$\therefore 4x+2y=0$

$\overrightarrow{AC}=(x-4,y-2)//(-3,1)$　$\therefore x+3y=10$

$\therefore x=-2$，$y=4 \Rightarrow \overrightarrow{OC}=(-2,4)$，又 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ ，$\therefore \overrightarrow{OD}=(1,3)$

23、設 $|\vec{a}|=2|\vec{b}|\neq 0$ ，且 $\sqrt{7}|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}|\vec{a}-\vec{b}|$ ，則 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 之夾角 $\theta=$______。

答案：120°

解析：令 $|\vec{b}|=K$，$|\vec{a}|=2K$，$7|\vec{a}+\vec{b}|^2=3|\vec{a}-\vec{b}|^2$　$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=-K^2$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{-K^2}{K(2K)}=-\dfrac{1}{2}$　$\therefore \theta=120°$

24、設 H 爲△ABC 的垂心(即三高的交點)，其中 $\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=4$，$\overline{AB}=3$，若 $\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ ，

則(1) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=$______，(2) $\alpha=$______，$\beta=$______。

答案：8; $\dfrac{8}{10}$; $\dfrac{1}{10}$

解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{3^2+4^2-3^2}{2}=8$

$\because H$ 爲△ABC 的垂心　$\therefore \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8$

$\because \overrightarrow{AH}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$　$\therefore \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\alpha|\overrightarrow{AB}|^2+\beta\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ ，$8=9\alpha+8\beta$

又 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\alpha\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\beta\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$ ，$8=8\alpha+16\beta$

$\Rightarrow \alpha=\dfrac{8}{10},\ \ \beta=\dfrac{1}{10}$

25、過 $P(0,-1)$且與直線 $L:3x+4y-12=0$ 交成 45° 之直線方程式爲________________________。

答案：$x-7y-7=0$ 或 $7x+y-1=0$

解析：設直線 $y=mx-1\Rightarrow mx-y-1=0$

$\therefore \dfrac{|3m-4|}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{3^2+4^2}}=\cos45^{\circ}$

$|3m-4|=5\sqrt{m^2+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$9m^2-24m+16=\dfrac{25}{2}(m^2+1)$

$7m^2+48m-7=0$ ，$\therefore m=\dfrac{1}{7}$ 或-7

$\therefore y=\dfrac{1}{7}x-1$ 或 $y=-7x-1$ ，即 $x-7y-7=0$ 或 $7x+y-1=0$ 。

26、在四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=120^{\circ}$，$\overline{AB}=1$，$\overline{AD}=2$ ，且 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$ ，則 $\overrightarrow{AC}$ 的長度爲________。

答案：$\sqrt{13}$

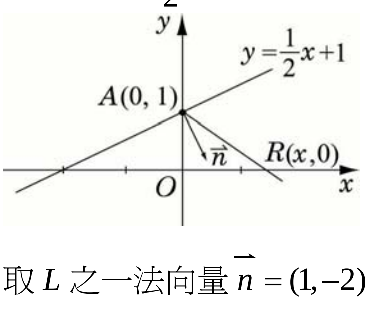
解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\times2\times\cos120^{\circ}=-1$

$|\overrightarrow{AC}|^2=|3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}|^2=9|\overrightarrow{AB}|^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+4|\overrightarrow{AD}|^2=13$ ，　$\therefore |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{13}$

27、在坐標平面上，一道光線通過原點 O 後，沿著 y 軸射向直線 L：$y=\dfrac{1}{2}x+1$，碰到直線 L 後，假設光線依光學原理（入射角等於反射角）反射後通過 x 軸上的 R 點，則 R 點的 x 坐標爲_______。(化成最簡分數)

答案：$\dfrac{4}{3}$

解析：直線 $L:y=\dfrac{1}{2}x+1$ ，即 $x-2y+2=0$ ，L 交 y 軸於 $A(0,1)$



取 L 之一法向量 $\vec{n}=(1,-2)$ ，已知 $\overrightarrow{AO}=(0,-1)$, $\overrightarrow{AR}=(x,-1)$

由 $\overrightarrow{AO}$ 與 $\vec{n}$ 之夾角等於 $\overrightarrow{AR}$ 與 $\vec{n}$ 之夾角 $\dfrac{(0,-1)\cdot(1,-2)}{\sqrt{0^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{(x,-1)\cdot(1,-2)}{\sqrt{x^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2}}$

$\Rightarrow 2=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$

$2\sqrt{x^2+1}=x+2$

$4(x^2+1)=x^2+4x+4$

$3x^2=4x\ (x\neq 0)$　　$x=\dfrac{4}{3}$　　故 R 的 x 坐標爲 $\dfrac{4}{3}$。

28、設 $A(2,1)$，$B(-3,-2)$，直線 $L:3x-2y-9=0$，若直線 AB 與直線 L 相交於 P，則(1) $\overline{PA}:\overline{PB}$ 之值爲_______，(2) A 點對直線 L 的對稱點爲_______。

答案：$\dfrac{5}{14}$；$(\dfrac{56}{13},\dfrac{-7}{13})$

解析：(1) $d(A,L)=\dfrac{|-5|}{\sqrt{13}}=\dfrac{5}{\sqrt{13}}$, $d(B,L)=\dfrac{14}{\sqrt{13}}$，$\therefore \overline{PA}:\overline{PB}=5:14=\dfrac{5}{14}$

A 對 L 之對稱點爲 $(2,1)-2\cdot\dfrac{(-5)}{\sqrt{13}}(\dfrac{3,-2}{\sqrt{13}})=(\dfrac{56}{13},\dfrac{-7}{13})$