高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：97.11.17					
範圍	三角函數(3)	班級	三年　　班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 設$t=\cos2\theta$，則 $2(\sin^8\theta-\cos^8\theta)=$____________________。(以$t$表示)

答案：$-t^3-t$

解析：$2(\sin^8\theta-\cos^8\theta)=2(\sin^4\theta-\cos^4\theta)(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$

$$=2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)[(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2+2\sin^2\theta\cos^2\theta]$$

$$=2(-\cos2\theta)(t^2+\frac{1}{2}\sin^2 2\theta)=-2t\,[t^2+\frac{1}{2}(1-t^2)]=-2t(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2})=-t^3-t$$

2. 求 $\cot\frac{\pi}{9}\ \cot\frac{2\pi}{9}\ \cot\frac{4\pi}{9}=$__________________。

答案：$\frac{1}{\sqrt{3}}$

解析：∵ $\cos20°\cos40°\cos80°=\frac{8\sin20°\cos20°\cos40°\cos80°}{8\sin20°}=\frac{\sin160°}{8\sin20°}=\frac{\sin20°}{8\sin20°}=\frac{1}{8}$

又 $\sin20°\sin40°\sin80°=-\frac{1}{2}\sin40°(\cos100°-\cos60°)$

$$=-\frac{1}{4}(2\sin40°\cos100°)+\frac{1}{4}\sin40°$$

$$=-\frac{1}{4}[\sin140°+\sin(-60°)]+\frac{1}{4}\sin40°$$

$$=-\frac{1}{4}\sin40°+\frac{1}{4}\sin60°+\frac{1}{4}\sin40°=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\cot\frac{\pi}{9}\cot\frac{2\pi}{9}\cot\frac{4\pi}{9}=\cot20°\cot40°\cot80°=\frac{\cos20°\cos40°\cos80°}{\sin20°\sin40°\sin80°}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{8}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

3. 設$f(x)=2\sin(30°-x)-2\cos x$， $-60°<x\le210°$，若$f(x)$在 $x=\alpha$ 處有最大值 M，在 $x=\beta$ 處有最小值 m，則(1)數對$(\alpha,M)=$____________________；(2) 數對$(\beta,m)=$__________________

答案：(1) $(1,210°)$ (2) $(-2,60°)$

解析：$f(x)=2\sin(30°-x)-2\cos x=2\sin30°\cos x-2\cos30°\sin x-2\cos x$

$$=-\cos x-\sqrt{3}\sin x\quad=-2(\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\cdot\frac{1}{2})\quad=-2(\sin x\cos30°+\cos x\sin30°)$$

$$=-2\sin(x+30°)\text{且 }-30°<x+30°\le240°\Rightarrow-\frac{1}{2}\le\sin(x+30°)\le1$$

(1)當$\sin(x+30°)=-\frac{1}{2}$， $f(x)=-2\times(-\frac{1}{2})=1$最大，即$M=1$， 此時$x+30°=240°\Rightarrow\alpha=210°$

(2)當$\sin(x+30°)=1$， $f(x)=-2$最小，即$m=-2$， 此時$x+30°=90°\Rightarrow\beta=60°$

4. 設$x\in R$，$f(x)=1+\sin x+\cos x-\sin2x$

(1)令$t=\sin x+\cos x$，請以t表示$f(x)=$__________。(2)求$f(x)$之最小值爲__________。

答案：(1) $-t^2+t+1$ (2) $-\sqrt{2}$

解析：$f(x)=\sin x+\cos x-\sin2x+1$

(1) 設$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$，

且$t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x \Rightarrow \sin 2x=t^2-1$

$\therefore\ f(x)=1+t-(t^2-1)=-t^2+t+2$，$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

(2) $f(x)=-t^2+t+2=-[t^2-t+(\frac{1}{2})^2]+\frac{9}{4}=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}$

$\because\ -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$，當$t=-\sqrt{2}$時，$f(x)=-(-\sqrt{2}-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}=-\sqrt{2}$爲最小值

5. 設$t=\tan\theta$，請以t表示(1) $\sin 2\theta=$__________。 (2) $\cos 2\theta=$__________。

答案：(1) $\frac{2t}{1+t^2}$ (2) $\frac{1-t^2}{1+t^2}$

解析：(1) $\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2t}{1+t^2}$ (2) $\cos 2\theta=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

6. 設$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$，$\tan\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$，則$\cos\frac{\theta}{2}=$__________。

答案：$\frac{-\sqrt{6}}{6}$

解析：$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}$，$\tan\theta=\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos\theta=-\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1+(-\frac{2}{3})}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{-\sqrt{6}}{6}$ （$\because\ \frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}$，$\cos\frac{\theta}{2}<0$）

7. 函數$f(t)=\sin^2 2t-3\cos^2 t$在 $0\le t\le 2\pi$ 的範圍內，其最大值爲__________。

答案：$\frac{1}{16}$

解析：$f(t)=(1-\cos^2 2t)-3\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}=-(\cos 2t+\frac{3}{4})^2+\frac{1}{16}$ ⇐降次、配方

$\cos 2t=-\frac{3}{4}$時，$f(t)=\frac{1}{16}$爲最大值。

8. $\sin\theta$，$\cos\theta$爲$x^2+px+q=0$之二根，試以p，q表 $2\cos^2\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})^2=$__________。

答案：$1-p+q$

解析：$\because$ $\sin\theta$，$\cos\theta$爲$x^2+px+q=0$之二根，$\therefore$ $\sin\theta+\cos\theta=-p$，$\sin\theta\cos\theta=q$

$2\cos^2\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})^2=2\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}\cdot(1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})$

$=(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)=1+(\sin\theta+\cos\theta)+\sin\theta\cos\theta=1-p+q$

9. 設 $180°<x<360°$，若$\tan x=\frac{\cos 83°+\sin 37°}{\sin 83°-\cos 37°}$，則$x=$__________。

答案：255°

解析：$\tan x=\frac{\cos 83°+\sin 37°}{\sin 83°-\cos 37°}=\frac{\sin 7°+\sin 37°}{\cos 7°-\cos 37°}=\frac{2\sin 22°\cos 15°}{2\sin 22°\sin 15°}=\cot 15°=\tan 75°$

$\because\ 180°<x<360°$ $\therefore\ x=180°+75°=255°$ ⇐第三象限的 75°

10.設$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$，則：(1) $\cos(\alpha-\beta)=$ ______。(2) $\cos(\alpha+\beta)=$ ______。

答案：(1) $-\frac{59}{72}$　(2) $-\frac{5}{13}$

解析：

(1) $\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}\\ \cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}\end{cases}$，平方得$\begin{cases}\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{4}\\ \cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{9}\end{cases}$

上下兩式相加$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}$

得 $\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=-\frac{59}{72}$　$\Rightarrow$即　$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{59}{72}$

(2) $\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}\\ \cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}\end{cases}$　$\Rightarrow$和差化積　$\begin{cases}2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2}\cdots\cdots ①\\ 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{3}\cdots\cdots ②\end{cases}$

由$\frac{①}{②}$得 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}$，　$\therefore\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{1-(\frac{3}{2})^2}{1+(\frac{3}{2})^2}=-\frac{5}{13}$

11.設$\tan\alpha$，$\tan\beta$為 $3x^2-7x+1=0$ 之二根，則

(1) $\tan(\alpha+\beta)=$ ______。(2) $3\sin^2(\alpha+\beta)-7\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=$ ________。

答案：(1) $\frac{7}{2}$　(2) 1

解析：$\tan\alpha$，$\tan\beta$為 $3x^2-7x+1=0$ 之二根，則$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{7}{3}$,　$\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{3}$

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{7}{2}$

(2) $3\sin^2(\alpha+\beta)-7\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)$

$=\cos^2(\alpha+\beta)[\,3\cdot\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}-7\cdot\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}+1\,]$

$=\dfrac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}[\,3\tan^2(\alpha+\beta)-7\tan(\alpha+\beta)+1\,]$

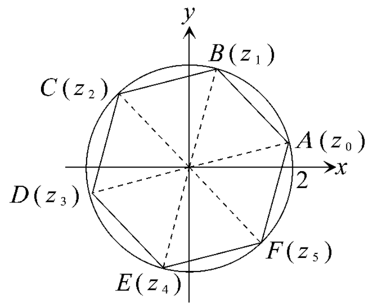
$=\dfrac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}[\,3\tan^2(\alpha+\beta)-7\tan(\alpha+\beta)+1\,]=\dfrac{1}{1+(\frac{7}{2})^2}[\,3\times(\frac{7}{2})^2-7(\frac{7}{2})+1\,]=1$

12.$x^6=-32+32\sqrt{3}i$ 有 6 個根，六個根在複數平面上的六個點所圍成正六邊形，其周長為________。

答案：12

解析：$-32+32\sqrt{3}i=64(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=64(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

$$z_k=2(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{6})，k=0，1，2，3，4，5$$



將六個根圖示在高斯平面，圖形爲一正六邊形，六個頂點在以原點爲圓心，半徑爲 2 的圓形上，則正六邊形$ABCDEF$的周長爲 $6\cdot 2=12$

13.設$z=\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}$，則(1) z之極式爲__________。 (2) $z^{50}=$ __________。

答案：(1) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$ (2) -1

解析：(1) $z=\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)}{2(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}=\frac{2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})}{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}$

$$=\cos(\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$$

(2) $z^{50}=(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})^{50}=\cos(75\pi)+i\sin(75\pi)=-1$

14. $6-8i$的平方根爲__________。

答案：$\pm(2\sqrt{2}-\sqrt{2}i)$

解析：

設$(x+yi)^2=6-8i$

$\begin{cases}x^2-y^2=6\\ 2xy=-8\\ x^2+y^2=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=8\\ y^2=2\end{cases}$，且 x, y 異號$\Rightarrow\begin{cases}x=\pm 2\sqrt{2}\\ y=\mp\sqrt{2}\end{cases}$，即$\pm(2\sqrt{2}-\sqrt{2}i)$爲 $6-8i$ 的平方根

15. $y=3\sin x-4\cos x$，當$x=\alpha$ 時，y有最大值，求$\tan\frac{\alpha}{2}=$ __________。

答案：3

解析：

$y=3\sin x-4\cos x=5(\sin x\cdot\frac{3}{5}-\cos x\cdot\frac{4}{5})=5\sin(x-\phi)$，其中 $\cos\phi=\frac{3}{5}$，$\sin\phi=\frac{4}{5}$

當 $\sin(x-\phi)=1$，即 $x-\phi=\frac{\pi}{2}+2n\pi$，$n\in Z$ 時，y 有最大值 5，此時$\alpha=\phi+\frac{\pi}{2}+2n\pi$，$n\in Z$

$$\Rightarrow\quad\tan\frac{\alpha}{2}=\tan(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}+n\pi)=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2})=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\phi}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\phi}{2}}=\frac{1+\tan\frac{\phi}{2}}{1-\tan\frac{\phi}{2}}$$

又 $\tan\frac{\phi}{2}=\frac{1-\cos\phi}{\sin\phi}=\frac{1-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{2}{4}\Rightarrow\tan\frac{\phi}{2}=\frac{1}{2}$，$\therefore\quad\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$

16. 設$\omega=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ ，則

(1) $\omega^6+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=$ ＿＿＿＿＿＿。

(2) $(1-\omega)(1-\omega^2)(-1-\omega^3)(1-\omega^4)(1-\omega^5)(1-\omega^6)$之值爲＿＿＿＿＿＿。

答案：(1)0　(2) 7

解析：　$\omega=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$　$\Rightarrow$　$\omega^7=(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7})^7=\cos2\pi+i\sin2\pi=1$

ω爲$x^7-1=0$　的一虛根，又$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ …….(*)

ω代入(*)$\Rightarrow(\omega-1)(\omega^6+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1)=0$

但$\omega-1\neq0\Rightarrow\omega^6+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$

(1)　$\omega^6+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$

(2) $\omega=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$爲$x^7=1$的一虛根　$\Rightarrow$　$x^7=1$的 7 個根爲 1，ω，ω^2，ω^3，ω^4，ω^5，ω^6

$\therefore$　$x^7-1=(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)(x-\omega^5)(x-\omega^6)$

$\Rightarrow$　$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)(x-\omega^5)(x-\omega^6)$

令$x=1$，$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)(x-\omega^5)(x-\omega^6)=1^6+1^5+1^4+1^3+1^2+1+1=7$

17.函數$f(x)=\frac{2\cos x}{3+\sin x}$的最大值爲＿＿＿＿＿＿，最小值爲＿＿＿＿＿＿。

答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ；$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析：令$k=\frac{2\cos x}{3+\sin x}$　$\therefore$　$k(3+\sin x)=2\cos x$　$\Rightarrow$　$3k=2\cos x-k\sin x$

x爲任意實數，$-\sqrt{2^2+(-k)^2}\le3k\le\sqrt{2^2+(-k)^2}$ ，

即　$|3k|\le\sqrt{2^2+(-k)^2}$　$\Leftrightarrow$　$9k^2\le4+k^2$，

$\therefore$　$8k^2\le4$　$\Rightarrow$　$k^2\le\frac{1}{2}$，即$-\frac{\sqrt{2}}{2}\le k\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，故最大值爲$\frac{\sqrt{2}}{2}$，而最小值爲 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$