高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：97.11.13					
範圍	Book2 3 三角函數(2)	班級	三年 班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 5 分)

1. 設 $t=\cos 2\theta$，則 $2(\sin^8\theta-\cos^8\theta)$可表成下列那一個多項式？

(A) $-t^3-t$ (B) t^3+t (C) t^3-t (D) $-t^3+t$ (E) t^3+t^2

答案：(A)

解析：$2(\sin^8\theta-\cos^8\theta)=2(\sin^4\theta-\cos^4\theta)(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$

$$=2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)[(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2+2\sin^2\theta\cos^2\theta]$$

$$=2(-\cos 2\theta)(t^2+\frac{1}{2}\sin^2 2\theta)$$

$$=-2t\,[t^2+\frac{1}{2}(1-t^2)]=-2t(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2})=-t^3-t$$

2. 設 $\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}$，則 $\sqrt{1+\sin 2\theta}-\sqrt{1-\sin 2\theta}$ =

(A) $2\sin\theta$ (B) $2\cos\theta$ (C) $2\sin 2\theta$ (D) $-2\sin\theta$ (E) $-2\cos\theta$

答案：(E)

解析：$\because \sqrt{1+\sin 2\theta}-\sqrt{1-\sin 2\theta}=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}$

$$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=|\sin\theta+\cos\theta|-|\sin\theta-\cos\theta|$$

$\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}$ 時，$0>\cos\theta>\sin\theta$，$\therefore$ $\sin\theta+\cos\theta<0$，$\sin\theta-\cos\theta<0$

$\therefore$ 原式 $=-(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=-2\cos\theta$

3. $\sqrt{3}\tan 20°+\sqrt{3}\tan 10°+\tan 20°\tan 10°=$ (A) $\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) 1 (E) -1

答案：(D)

解析：

$\tan 30°=\tan(20°+10°)$ $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\tan 20°+\tan 10°}{1-\tan 20°\tan 10°}\Rightarrow \sqrt{3}\tan 20°+\sqrt{3}\tan 10°+\tan 20°\tan 10°=1$

4. (複選)下列敘述，何者正確？

(A) $\cos 10°\cos 50°\cos 70°=\frac{1}{8}$ (B) $\cot\frac{\pi}{9}\ \cot\frac{2\pi}{9}\ \cot\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\tan\frac{\pi}{18}\ \tan\frac{5\pi}{18}\ \tan\frac{7\pi}{18}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(D) $\sec\frac{\pi}{9}\sec\frac{2\pi}{9}\sec\frac{4\pi}{9}=8$ (E) $\csc\frac{\pi}{18}\ \csc\frac{5\pi}{18}\ \csc\frac{7\pi}{18}=8$

答案：(B)(C)(D)(E)

解析：$\because$ $\cos 20°\cos 40°\cos 80°=\frac{8\sin 20°\cos 20°\cos 40°\cos 80°}{8\sin 20°}=\frac{\sin 160°}{8\sin 20°}=\frac{\sin 20°}{8\sin 20°}=\frac{1}{8}$

又 $\sin 20°\sin 40°\sin 80°=-\frac{1}{2}\sin 40°(-2\sin 20°\sin 80°)=-\frac{1}{2}\sin 40°(\cos 100°-\cos 60°)$

$$=-\frac{1}{4}(2\sin 40°\cos 100°)+\frac{1}{4}\sin 40°=-\frac{1}{4}[\sin 140°+\sin(-60°)]+\frac{1}{4}\sin 40°$$

$$=-\frac{1}{4}\sin 40°+\frac{1}{4}\sin 60°+\frac{1}{4}\sin 40°=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

(A) $\cos10°\cos50°\cos70° = \sin20°\sin40°\sin80° = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

(B) $\cot\dfrac{\pi}{9}\cot\dfrac{2\pi}{9}\cot\dfrac{4\pi}{9} = \cot20°\cot40°\cot80° = \dfrac{\cos20°\cos40°\cos80°}{\sin20°\sin40°\sin80°} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{8}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(C) $\tan\dfrac{\pi}{18}\tan\dfrac{5\pi}{18}\tan\dfrac{7\pi}{18} = \tan10°\tan50°\tan70° = \cot20°\cot40°\cot80° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(D) $\sec\dfrac{\pi}{9}\sec\dfrac{2\pi}{9}\sec\dfrac{4\pi}{9} = \sec20°\sec40°\sec80° = \dfrac{1}{\cos20°\cos40°\cos80°} = 8$

(E) $\csc\dfrac{\pi}{18}\csc\dfrac{5\pi}{18}\csc\dfrac{7\pi}{18} = \csc10°\csc50°\csc70° = \sec20°\sec40°\sec80° = 8$

5. (複選)設 $f(x) = 2\sin(30° - x) - 2\cos x$， $-60° \le x \le 210°$，若 $f(x)$ 在 $x = \alpha$ 處有最大值 M，在 $x = \beta$ 處有最小值 m，下列何者正確？

(A) $M = 2$ (B) $\alpha = 210°$ (C) $m = -2$ (D) $\beta = 60°$ (E) $M - m = 4$

答案：(B)(C)(D)

解析： $f(x) = 2\sin(30° - x) - 2\cos x = 2\sin30°\cos x - 2\cos30°\sin x - 2\cos x$

$= -\cos x - \sqrt{3}\sin x = -2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x) = -2(\sin x\cos30° + \cos x\sin30°)$

$= -2\sin(x + 30°)$ 且 $-30° \le x + 30° \le 240° \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \le \sin(x + 30°) \le 1$

(1)當 $\sin(x+30°) = -\dfrac{1}{2}$， $f(x) = -2\times(-\dfrac{1}{2}) = 1$ 最大，即 $M = 1$

此時 $x + 30° = -30°, 240° \Rightarrow \beta = -60°, 210°$

(2)當 $\sin(x+30°) = 1$， $f(x) = -2$ 最小，即 $m = -2$， 此時 $x + 30° = 90° \Rightarrow \beta = 60°$

6. (複選)下列各式何者正確？

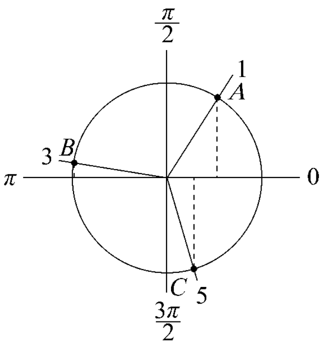
(A) $\sin1 > \sin3 > \sin5$ (B) $-\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{5\pi}{6}$ 時，$-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \sin x \le \dfrac{1}{2}$

(C)若 A 爲一三角形之內角，則 $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$ 且 $\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A}$

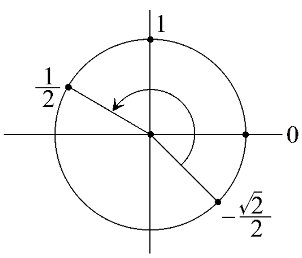
(D)若 $\dfrac{3\pi}{2} < A < 2\pi$，則 $\sqrt{1+\sin A} = \sin\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{A}{2}$ (E) $\sin7° - \sin5° < \sin1°$

答案：(A)

解析：1 弧度＝57°.…



圖(一)



圖(二)

(A)○如圖(一)單位圓上的 A，B，C 三點之 y 坐標可知 $\sin1 > \sin3 > 0 > \sin5$

(B)✕ 如圖(二)，$-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{6}$ 時 $\Rightarrow$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le \sin x\le 1$

(C)✕ 若$\angle A$ 爲鈍角，則 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ ，但 $\cos A=-\sqrt{1-\sin^2 A}$

(D)✕ $\frac{3\pi}{2}<A<2\pi\Rightarrow\frac{3\pi}{4}<\frac{A}{2}<\pi$， $0<\sin\frac{A}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，$-1<\cos\frac{A}{2}<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……① (負的多)

$$\sqrt{1+\sin A}=\sqrt{(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2})+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=|\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}|\overset{由①}{=\!=}-(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2})$$

(E)✕ $\sin7^\circ-\sin5^\circ=2\cos6^\circ\sin1^\circ>2\cdot\cos60^\circ\cdot\sin1^\circ=\sin1^\circ$

二、填充題(每題 10 分)

1. 求 $8x^3+4x^2-6x-2$ 除以$x-\cos15^\circ$之餘式爲__________。

答案：$\sqrt{2}+\sqrt{3}$

解析：餘式$R=8(\cos15^\circ)^3+4(\cos15^\circ)^2-6\cos15^\circ-2$

$$=2(4\cos^3 15^\circ-3\cos15^\circ)+2(2\cos^2 15^\circ-1)=2\cos45^\circ+2\cos30^\circ=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

2. 若$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 且$\sin2\theta=\frac{4}{5}$ ，求$\sin\theta=$__________。

答案：$\frac{2}{\sqrt{5}}$

解析：$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}<2\theta<\pi$ 且 $\sin2\theta=\frac{4}{5}\Rightarrow\cos2\theta=-\frac{3}{5}$

半角公式$\sin\theta=+\sqrt{\frac{1-\cos2\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-(-\frac{3}{5})}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

3. 設$x\in R$，$f(x)=2+\sin x+\cos x-\sin2x$

(1)令$t=\sin x+\cos x$，請以t表示$f(x)=$__________。(2)求$f(x)$之最小値爲__________。

答案：(1) $-t^2+t+3$ (2) $1-\sqrt{2}$

解析：$f(x)=\sin x+\cos x-\sin2x+2$

(1) 設$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ ，$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ ，

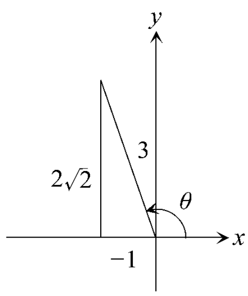
且$t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x=1+\sin2x$ $\Rightarrow$ $\sin2x=t^2-1$

$\therefore$ $f(x)=t-(t^2-1)+2=-t^2+t+3$，$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

(2) $f(x)=-t^2+t+3=-[t^2-t+(\frac{1}{2})^2]+\frac{13}{4}=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{13}{4}$

$\because$ $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ ，當$t=-\sqrt{2}$ 時，$f(x)=-(-\sqrt{2}-\frac{1}{2})^2+\frac{13}{4}=1-\sqrt{2}$ 爲最小値

4. 設$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$且$\cos\theta=-\frac{1}{3}$，則$\sin3\theta+\cos3\theta=$__________。



答案：$\frac{23-10\sqrt{2}}{27}$

解析：$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\cos\theta=-\frac{1}{3}$ ，$\therefore\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

$\therefore \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 3(\frac{2\sqrt{2}}{3}) - 4(\frac{2\sqrt{2}}{3})^3 = \frac{-10\sqrt{2}}{27}$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4(-\frac{1}{3})^3 - 3(-\frac{1}{3}) = \frac{23}{27}$

$\therefore \sin 3\theta + \cos 3\theta = \frac{23-10\sqrt{2}}{27}$

5. 設$t=\tan\theta$，請以t表示(1) $\sin 2\theta =$__________。 (2) $\cos 4\theta =$__________。

答案：(1) $\frac{2t}{1+t^2}$ (2) $\frac{1-6t^2+t^4}{1+2t^2+t^4}$

解析：(1) $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2t}{1+t^2}$

(2) $\cos 4\theta = \cos 2(2\theta) = 1 - 2\sin^2 2\theta = 1 - 2(\frac{2t}{1+t^2})^2 = 1 - \frac{8t^2}{1+2t^2+t^4} = \frac{1-6t^2+t^4}{1+2t^2+t^4}$

6. 設$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$，$\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$，則$\cos\frac{\theta}{2} =$__________。

答案：$\frac{-\sqrt{6}}{6}$

解析：$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}$，$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt{5}\tan^2\frac{\theta}{2} + 4\tan\frac{\theta}{2} - \sqrt{5} = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{5}\tan\frac{\theta}{2} - 1)(\tan\frac{\theta}{2} + \sqrt{5}) = 0$，$\therefore \tan\frac{\theta}{2} = -\sqrt{5}$ 或 $\frac{1}{\sqrt{5}}$（不合$\because \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}$，$\tan\frac{\theta}{2} < 0$）

$\tan\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{1}, \sqrt{(\sqrt{5})^2+1^2} = \sqrt{6}$，故$\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{6}}{6}$

7. 函數$f(t) = \sin^2 2t - 3\cos^2 t$在 $0 \le t \le 2\pi$ 的範圍內，其最大值爲__________。

答案：$\frac{1}{16}$

解析：$f(t) = (1-\cos^2 2t) - 3 \cdot \frac{1+\cos 2t}{2} = -(\cos 2t + \frac{3}{4})^2 + \frac{1}{16}$ $\Leftarrow$降次

$\cos 2t = -\frac{3}{4}$時，$f(t) = \frac{1}{16}$爲最大值，故$f(t)$之最大值爲$\frac{1}{16}$

8. $\cos^2\theta + \cos^2(\theta+\frac{\pi}{5}) + \cos^2(\theta+\frac{2\pi}{5}) + \cos^2(\theta+\frac{3\pi}{5}) + \cos^2(\theta+\frac{4\pi}{5}) =$__________。

提示：$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$； $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

答案：$\frac{5}{2}$

解析：原式$= \cos^2\theta + \cos^2(\theta+\frac{\pi}{5}) + \cos^2(\theta+\frac{2\pi}{5}) + \cos^2[\theta+(\pi-\frac{2\pi}{5})] + \cos^2[\theta+(\pi-\frac{\pi}{5})]$

$= \cos^2\theta + \cos^2(\theta+\frac{\pi}{5}) + \cos^2(\theta+\frac{2\pi}{5}) + \cos^2(\theta-\frac{2\pi}{5}) + \cos^2(\theta-\frac{\pi}{5})$

$= \frac{1+\cos 2\theta}{2} + \frac{1+\cos(2\theta+\frac{2\pi}{5})}{2} + \frac{1+\cos(2\theta+\frac{4\pi}{5})}{2} + \frac{1+\cos(2\theta-\frac{4\pi}{5})}{2} + \frac{1+\cos(2\theta-\frac{2\pi}{5})}{2}$

$=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}[\cos 2\theta+(\cos(2\theta+\frac{2\pi}{5})+\cos(2\theta-\frac{2\pi}{5}))+(\cos(2\theta+\frac{4\pi}{5})+\cos(2\theta-\frac{4\pi}{5}))]$

$=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2\theta+2\cos 2\theta\cdot\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos 2\theta\cdot\cos\frac{4\pi}{5})$ ⇐和差化積

$=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}[\cos 2\theta+2\cos 2\theta(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5})]=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}[\cos 2\theta+2\cos 2\theta(\cos 72^\circ+\cos 144^\circ)]$

$=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}[\cos 2\theta+2\cos 2\theta(\sin 18^\circ-\cos 36^\circ)]=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}[\cos 2\theta+2\cos 2\theta(\frac{\sqrt{5}-1}{4}-\frac{\sqrt{5}+1}{4})]$

$=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}[\cos 2\theta+2\cos 2\theta(-\frac{1}{2})]=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2\theta-\cos 2\theta)=\frac{5}{2}+0=\frac{5}{2}$

9. 化簡$\cos 108^\circ\cos 132^\circ+\cos 132^\circ\cos 12^\circ+\cos 12^\circ\cos 108^\circ$之值爲__________。

答案：$-\frac{3}{4}$

解析：原式$=\frac{1}{2}(2\cos 108^\circ\cos 132^\circ+2\cos 132^\circ\cos 12^\circ+2\cos 12^\circ\cos 108^\circ)$

$=\frac{1}{2}(\cos 240^\circ+\cos 24^\circ+\cos 144^\circ+\cos 120^\circ+\cos 120^\circ+\cos 96^\circ)$ ⇐積化和差

$=\frac{1}{2}(-\frac{3}{2}+\cos 24^\circ+\cos 144^\circ+\cos 96^\circ)=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(2\cos 84^\circ\cos 60^\circ-\cos 84^\circ)$ ⇐和差化積

$=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(\cos 84^\circ-\cos 84^\circ)=-\frac{3}{4}$

10. $\sin\theta$，$\cos\theta$ 爲$x^2+px+q=0$ 之二根，試以p，q表 $2\sin^2\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})^2=$__________。

答案：$1+p+q$

解析：∵ $\sin\theta$，$\cos\theta$ 爲$x^2+px+q=0$ 之二根 ∴ $\sin\theta+\cos\theta=-p$，$\sin\theta\cos\theta=q$

$2\sin^2\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})^2=2\cdot\frac{1-\cos\theta}{2}\cdot(1-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})$

$=(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)=1-(\sin\theta+\cos\theta)+\sin\theta\cos\theta=1+p+q$

11. 已知$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{5}$，則(1) $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=$______。(2) $\cos(\alpha+\beta)=$______。

答案：(1)3　(2)$\frac{-4}{5}$

解析：

(1)∵ $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{5}$ ∴ $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{3}{5}$……①

∵ $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{5}$ ∴ $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{5}$……②

$\frac{①}{②}$得$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}}$ ⇒ $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=3$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{1-9}{1+9}=-\frac{4}{5}$

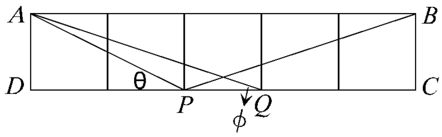
12.設 $180° < x < 360°$，若 $\tan x = \dfrac{\cos 83° + \sin 37°}{\sin 83° - \cos 37°}$，則 $x =$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：255°

解析：$\tan x = \dfrac{\cos 83° + \sin 37°}{\sin 83° - \cos 37°} = \dfrac{\sin 7° + \sin 37°}{\cos 7° - \cos 37°} = \dfrac{2\sin 22° \cos 15°}{2\sin 22° \sin 15°} = \cot 15° = \tan 75°$

$\because \ 180° < x < 360° \quad \therefore \ x = 180° + 75° = 255°$

13.如圖，矩形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} = 5$，$\overline{AD} = 1$，$\overline{DP} = 2$，$\overline{PQ} = 1$，$\angle APD = \theta$，$\angle AQD = \phi$，則 $\theta + \phi =$ ＿＿＿＿＿＿度。



答案：45

解析：$\because \tan\theta = \dfrac{1}{2}$，$\tan\phi = \dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow \tan(\theta + \phi) = \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$$，而 $0° < \theta + \phi < 180° \Rightarrow \theta + \phi = 45°$

14.設 α，β 不同界，已知 α，β 爲方程式 $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ 的兩個根，則 $\tan\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ 之值爲＿＿＿＿。

答案：$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解析：α，β 爲 $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ 的兩個根，代入

$\therefore \quad \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha = 1$

$-) \quad \sin\beta - \sqrt{3}\cos\beta = 1$

$(\sin\alpha - \sin\beta) - \sqrt{3}(\cos\alpha - \cos\beta) = 0$

$$2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2} = \sqrt{3}\left(-2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$ ⇐和差化積

α，β 不同界 $\therefore \ \alpha - \beta \neq 2k\pi$，$k \in Z \ \Rightarrow \ \dfrac{\alpha - \beta}{2} \neq k\pi$，$k \in Z \ \Rightarrow \ \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2} \neq 0$

消去 $\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$，得 $\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} = -\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \ \Rightarrow \ \tan\dfrac{\alpha + \beta}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

15.設 $\sin\alpha + \sin\beta = \dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha + \cos\beta = \dfrac{1}{3}$，則：(1) $\cos(\alpha - \beta) =$ ＿＿＿＿。(2) $\cos(\alpha + \beta) =$ ＿＿＿＿。

答案：(1) $-\dfrac{59}{72}$ (2) $-\dfrac{5}{13}$

解析：

(1) $\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = \dfrac{1}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta = \dfrac{1}{3} \end{cases}$，平方得 $\begin{cases} \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \dfrac{1}{4} \\ \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = \dfrac{1}{9} \end{cases}$

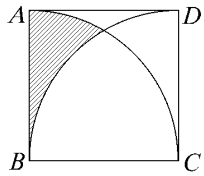
上下兩式相加 $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 2(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) + (\sin^2\beta + \cos^2\beta) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9}$

得 $\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta = -\dfrac{59}{72} \ \Rightarrow \ \cos(\alpha - \beta) = -\dfrac{59}{72}$

(2) $\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2}\\ \cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots ①\\ 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{1}{3}\cdots\cdots ②\end{cases}$

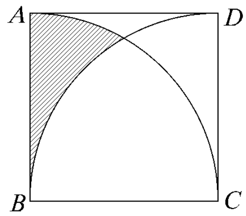
由$\dfrac{①}{②}$得 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{3}{2}$， $\therefore\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{1-(\frac{3}{2})^2}{1+(\frac{3}{2})^2}=-\dfrac{5}{13}$

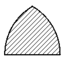
16.如下圖所示，邊長為 1 之正方形$ABCD$中，以B，C為圓心，1 為半徑畫弧，求斜線部分之面積 ＝__________。

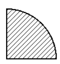
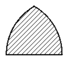


答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{5\pi}{12}$

解析：



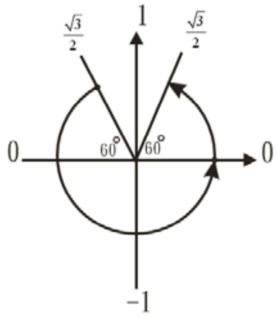
 $=2$  $-$  $=2\cdot 1^2\cdot\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore$ 所求面積 ＝  $-$  $=\dfrac{1}{4}\cdot 1^2\cdot\pi-(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4})=\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{5\pi}{12}$

17.設 $0\le x\le 2\pi$，$\sin x\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$之解為__________。

答案：$0\le x\le\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}\le x\le 2\pi$

解析：如右圖



19.若以x表示$\sin\theta$之值，則將三角方程式$\cos4\theta=\sin\theta$ 表成x的四次方程式為__________，此方程式的所有實根中最小者為__________。

答案：$8x^4-8x^2-x+1=0$；$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

解析：

(1) $\because$ $\cos4\theta=\sin\theta$ $\therefore$ $2\cos^2 2\theta-1=\sin\theta$ $\Rightarrow$ $2(1-2\sin^2\theta)^2-1=\sin\theta$

$\Rightarrow$ $2(1-4\sin^2\theta+4\sin^4\theta)-1=\sin\theta$ $\Rightarrow$ $2-8\sin^2\theta+8\sin^4\theta-1=\sin\theta$

$\Rightarrow$ $8\sin^4\theta-8\sin^2\theta-\sin\theta+1=0$， $\because\sin\theta=x$，$\therefore 8x^4-8x^2-x+1=0$ 為x的四次方程式

(2)用綜合除法

$8+0-8-1+1\ \lfloor 1$
$\ \ +8+8+0-1$
$8+8-0-1+0\ \lfloor -\frac{1}{2}$
$\ \ -4-2+1$
$2\ \boxed{8+4-2}-0$
$4+2-1$

$\therefore$ $(x-1)(x+\dfrac{1}{2})(4x^2+2x-1)=0$ $\Rightarrow$ $x=1$ 或$x=-\dfrac{1}{2}$或$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$， 最小的$x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

20.設$P(\cos\alpha,-\sin\alpha)$，$Q(\cos\beta,-\sin\beta)$，且$\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{3}$，則$\overline{PQ}$ ＝__________。

答案：1

解析：$\overline{PQ}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(-\sin\alpha+\sin\beta)^2}\ =\sqrt{1+1-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta}$

$=\sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)}\ =\sqrt{2-1}\ =1$

21.設$\tan\alpha$ ， $\tan\beta$為 $3x^2-7x+1=0$ 之二根，則

(1) $\tan(\alpha+\beta)=$ ______ 。(2) $3\sin^2(\alpha+\beta)-7\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=$ ________ 。

答案：(1)$\frac{7}{2}$ (2) 1

解析：$\tan\alpha$ ， $\tan\beta$為 $3x^2-7x+1=0$ 之二根，則$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{7}{3}$, $\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{3}$

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{7}{2}$

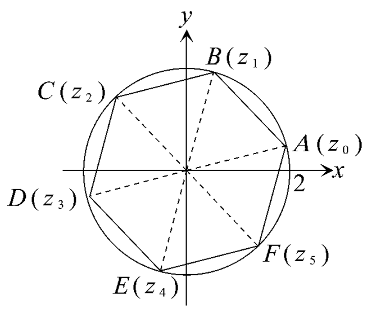
(2) $3\sin^2(\alpha+\beta)-7\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)$

$=\cos^2(\alpha+\beta)[3\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}-7\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}+1]$

$=\dfrac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}[3\tan^2(\alpha+\beta)-7\tan(\alpha+\beta)+1]$

$=\dfrac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}[3\tan^2(\alpha+\beta)-7\tan(\alpha+\beta)+1]=\dfrac{1}{1+(\frac{7}{2})^2}[3\times(\frac{7}{2})^2-7(\frac{7}{2})+1]=1$

22.$x^6=-32+32\sqrt{3}i$ 有 6 個根，六個根在複數平面上的六個點所圍成正六邊形，其面積爲______ 。



答案：$6\sqrt{3}$

解析：$-32+32\sqrt{3}i=64(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=64(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

$z_k=2(\cos\dfrac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{6}+i\sin\dfrac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{6})$，$k=0$，1，2，3，4，5

將六個根圖示在<u>高斯</u>平面，圖形爲一正六邊形，六個頂點在以原點爲圓心，半徑爲 2 的圓形上，則正六邊形$ABCDEF$的面積爲 $6\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin60°=6\sqrt{3}$

23.設$z\in C$，且$|z|=2|z-1|$，$\text{Arg}(\frac{z-1}{z})=\frac{\pi}{3}$，則$|z|=$ __________ 。

答案：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解析：$\because$ $|z|=2|z-1|$ $\Rightarrow$ $|\frac{z-1}{z}|=\frac{1}{2}$，而 $\text{Arg}(\frac{z-1}{z})=\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $\dfrac{z-1}{z}=\dfrac{1}{2}(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}$ $\Rightarrow$ $1-\dfrac{1}{z}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}\Rightarrow$ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{-3+\sqrt{3}i}{4}$

$$\left|\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{-3+\sqrt{3}i}{4}\right|=\sqrt{\frac{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}{16}}=\sqrt{\frac{12}{16}}\Rightarrow\quad |z|=\frac{4}{\sqrt{12}}=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

24.化簡$(1+\cos20°+i\sin20°)^{987}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r>0$，$0°\le\theta<360°$，則$\theta=$__________。

答案：150°

解析：

$1+\cos20°+i\sin20°=1+\cos2(10°)+i\sin2(10°)$

$=1+2\cos^2 10°-1+i(2\sin10°\cos10°)=2\cos10°(\cos10°+i\sin10°)$ ⇐極式

$(1+\cos20°+i\sin20°)^{987}=[2\cos10°(\cos10°+i\sin10°)]^{987}=(2\cos10°)^{987}(\cos9870°+i\sin9870°)$

$=(2\cos10°)^{987}(\cos150°+i\sin150°)$

$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r>0$，$0°\le\theta<360°\Rightarrow\theta=150°$

25.設$z=\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}$，則(1) z之極式為__________。 (2) $z^{100}=$__________。

答案：(1) $\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$ (2) 1

解析：(1) $z=\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}=\dfrac{2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)}{2(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}=\dfrac{2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})}{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}$

$=\cos(\dfrac{11\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3})+i\sin(\dfrac{11\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3})=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$

(2) $z^{100}=(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2})^{100}=\cos(150\pi)+i\sin(150\pi)=1$

26.設$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$，則$z^{2008}+\dfrac{1}{z^{2008}}$之值為__________。

答案：-1

解析：由$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}\Rightarrow z^2-\sqrt{3}z+1=0\Rightarrow z=\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}\pm i\sin\dfrac{\pi}{6}$

當$z=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$，則$z^{2008}+\dfrac{1}{z^{2008}}=(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})^{2008}+(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})^{-2008}$

$=2\cos\dfrac{2008\pi}{6}=2\cos\dfrac{2\pi\times167+4\pi}{6}=2\cos\dfrac{4\pi}{6}=2(-\dfrac{1}{2})=-1$

同理，當$z=\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}$時，$z^{2008}+\dfrac{1}{z^{2008}}$也為$-1$，故所求$z^{2008}+\dfrac{1}{z^{2008}}=-1$

27.$12-16i$的平方根為__________。

答案：$\pm(4-2i)$

解析：設$(x+yi)^2=12-16i$

$\begin{cases}x^2-y^2=12\\2xy=-16\\x^2+y^2=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=16\\y^2=4\end{cases}$，且$x,y$異號$\Rightarrow\begin{cases}x=\pm4\\y=\mp2\end{cases}$，即$\pm(4-2i)$為$12-16i$的平方根

28.$f(\theta)=\dfrac{\sin\theta+\sin3\theta+\sin5\theta+\sin7\theta}{\cos\theta+\cos3\theta+\cos5\theta+\cos7\theta}$，則

(1) $f(\theta)=\tan k\theta$時，$k=$__________。 (2) $f(\dfrac{\pi}{16})$之值為__________。

答案：(1) 4 (2) 1

解析：(1)$f(\theta)=\dfrac{\sin\theta+\sin3\theta+\sin5\theta+\sin7\theta}{\cos\theta+\cos3\theta+\cos5\theta+\cos7\theta}=\dfrac{(\sin\theta+\sin7\theta)+(\sin3\theta+\sin5\theta)}{(\cos\theta+\cos7\theta)+(\cos3\theta+\cos5\theta)}$

$=\dfrac{2\sin4\theta\cos3\theta+2\sin4\theta\cos\theta}{2\cos4\theta\cos3\theta+2\cos4\theta\cos\theta}=\dfrac{2\sin4\theta(\cos3\theta+\cos\theta)}{2\cos4\theta(\cos3\theta+\cos\theta)}=\tan4\theta$

(2) $f(\dfrac{\pi}{16})=\tan(4\times\dfrac{\pi}{16})=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

29.$y=3\sin x-4\cos x$，當$x=\alpha$ 時，y有最大值，求$\tan\dfrac{\alpha}{2}=$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：3

解析：$y=3\sin x-4\cos x=5(\dfrac{3}{5}\sin x-\dfrac{4}{5}\cos x)=5\sin(x-\phi)$，其中 $\cos\phi=\dfrac{3}{5}$ ，$\sin\phi=\dfrac{4}{5}$

當 $\sin(x-\phi)=1$，即 $x-\phi=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$，$n\in Z$ 時，y 有最大值 5，此時$\alpha=\phi+\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$，$n\in Z$

$\Rightarrow\quad \tan\dfrac{\alpha}{2}=\tan(\dfrac{\phi}{2}+\dfrac{\pi}{4}+n\pi)=\tan(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\phi}{2})=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\phi}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\phi}{2}}=\dfrac{1+\tan\frac{\phi}{2}}{1-\tan\frac{\phi}{2}}$

又 $\tan\phi=\dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}=\dfrac{4}{3}=\dfrac{2\tan\frac{\phi}{2}}{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}\quad\Rightarrow\quad\tan\dfrac{\phi}{2}=\dfrac{1}{2}$ ，$\therefore\quad\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$

30.將函數$y=\sin(x-\dfrac{\pi}{3})+\sin x$化爲$r\sin(x-\phi)$的形式，其中$r>0$，$0\le\phi\le\dfrac{\pi}{2}$ ，$0\le x\le\pi$，求：

(1)數對$(r，\phi)=$ ＿＿＿＿＿＿。 (2)函數值y的範圍爲＿＿＿＿＿＿。

答案：(1)$(\sqrt{3}，\dfrac{\pi}{6})$ (2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le y\le\sqrt{3}$

解析：(1) $y=\sin(x-\dfrac{\pi}{3})+\sin x=2\sin\dfrac{x-\frac{\pi}{3}+x}{2}\cos\dfrac{x-\frac{\pi}{3}-x}{2}$

$=2\sin(x-\dfrac{\pi}{6})\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}\sin(x-\dfrac{\pi}{6})\qquad\therefore\quad(r，\phi)=(\sqrt{3}，\dfrac{\pi}{6})$

(2)$\because\quad 0\le x\le\pi$，$-\dfrac{\pi}{6}\le x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{5}{6}\pi$，$\therefore\quad -\dfrac{1}{2}\le\sin(x-\dfrac{\pi}{6})\le1\quad\Rightarrow\quad-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le\sqrt{3}\sin(x-\dfrac{\pi}{6})\le\sqrt{3}$

31.將$\cos^2x+2a\sin x\cos x+b\sin^2x$表爲$r\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$的形式，其中$r>0$，則$a=$ ＿＿＿＿，$b=$ ＿＿＿＿＿。

答案：1； -1

解析：因爲$\cos^2x+2a\sin x\cos x+b\sin^2x=\dfrac{1}{2}(1+\cos2x)+a\sin2x+\dfrac{b}{2}(1-\cos2x)$

$=\dfrac{1-b}{2}\cos2x+a\sin2x+\dfrac{1+b}{2}=r(\sin\dfrac{\pi}{4}\cos2x+\cos\dfrac{\pi}{4}\sin2x)$

比較兩邊可得$\begin{cases}\dfrac{1+b}{2}=0 & \cdots\cdots① \\ \dfrac{1-b}{2}=a=\dfrac{\sqrt{2}r}{2} & \cdots\cdots②\end{cases}$ 由①得$b=-1$，代入② $r=\sqrt{2}$ ，$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r=1$

32.設$\omega=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ ，則

(1) $\omega^6+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega=$ ＿＿＿＿＿＿＿。

(2) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)(1+\omega^6)$之值為＿＿＿＿＿＿＿。

(3) $\omega^{84}+\omega^{85}+\omega^{86}+\cdots+\omega^{188}=$ ＿＿＿＿＿＿＿。

答案：(1) -1 (2) 1 (3)0

解析： $\omega=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ $\Rightarrow$ $\omega^7=(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7})^7=\cos2\pi+i\sin2\pi=1$

ω為$x^7-1=0$ 的一虛根，又$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ …….(*)

ω代入(*)$\Rightarrow(\omega-1)(\omega^6+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1)=0$

但$\omega-1\neq0\Rightarrow\omega^6+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1)=0$

(1) $\omega^6+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega=-1$

(2) $\omega=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$為$x^7=1$的一虛根 $\Rightarrow$ $x^7=1$的 7 個根為 1，ω，ω^2，ω^3，ω^4，ω^5，ω^6

$\therefore$ $x^7-1=(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)(x-\omega^5)(x-\omega^6)$

$\Rightarrow$ $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)(x-\omega^5)(x-\omega^6)$

令$x=-1$，$(-1-\omega)(-1-\omega^2)(-1-\omega^3)(-1-\omega^4)(-x-\omega^5)(-x-\omega^6)$

$=(-1)^6+(-1)^5+(-1)^4+(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1$

$(-1)^6(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)(1+\omega^6)=1$，

故$(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)(1+\omega^6)=1$

(3) $\omega^{84}+\omega^{85}+\omega^{86}+\cdots+\omega^{188}=\omega^{84}(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{104})=1\times(\frac{1-\omega^{105}}{1-\omega})=\frac{1-1}{1-\omega}=0$

33.方程式$x^4+x^2+1=0$之四根為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。(以通式表示)

答案：$\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}$ ，$k=1$，2，4，5

解析：$x^6-1=0\Rightarrow$ $x=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}$ ，$k=0$，1，2，3，4，5

又$x^6-1=[x^2-1][(x^2)^2+x^2+1]=0\Rightarrow(x^2-1)(x^4+x^2+1)=0$ ，

其中$k=0$，3 時，$\cos\frac{0\pi}{6}+i\sin\frac{0\pi}{6}=1$ ，$\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}=-1$為$x^2-1=0$的 2 根

方程式$x^4+x^2+1=0$之四根為$x=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}$ ，$k=1$，2，4，5

34.函數$f(x)=\frac{2\cos x}{3+\sin x}$的最大值為＿＿＿＿＿＿＿，最小值為＿＿＿＿＿＿＿。

答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ； $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析：令$k=\frac{2\cos x}{3+\sin x}$ $\therefore$ $k(3+\sin x)=2\cos x$ $\Rightarrow$ $3k=2\cos x-k\sin x$

x為任意實數， $|3k|\leq\sqrt{2^2+(-k)^2}$ $\Leftrightarrow$ $9k^2\leq4+k^2$，$\therefore$ $8k^2\leq4$

$\Rightarrow$ $k^2\leq\frac{1}{2}$ ，即$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq k\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故最大值為$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，而最小值為 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$