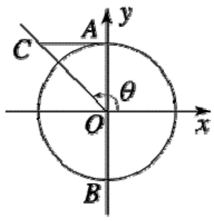
高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：97.11.05					
範圍	Book2 2 三角函數(1)	班級	三年 班	姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 5 分)

1、(A) 設$\angle A$爲銳角，$(2\sec A-3)(7\sec A-4)=0$，則$\sec A=$

(A)$\frac{3}{2}$ (B)$\frac{4}{7}$ (C)$\frac{3}{2}$或$\frac{4}{7}$ (D)$\frac{3}{2}$且$\frac{4}{7}$ (E)無解

解析：$\because |\sec A|\ge 1$ $\therefore \sec A=\frac{3}{2}$



2、(D) 如下圖，單位圓 O 與 y 軸交於 A, B 兩點。角θ的頂點爲原點，始邊在 x 軸的正向上，終邊爲$\overrightarrow{OC}$，直線$\overleftrightarrow{AC}$垂直於 y 軸且與角θ的終邊交於 C 點。則下列那一個函數值爲$\overline{AC}$？

(A)$|\sin\theta|$ (B)$|\cos\theta|$ (C)$|\tan\theta|$ (D)$|\cot\theta|$ (E)$|\sec\theta|$

解析：$\angle ACO=180^\circ-\theta$

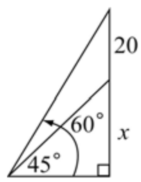
$\overline{AC}=\overline{OA}\cdot\cot\angle ACO=\overline{OA}\cdot\cot(180^\circ-\theta)=1\cdot(-\cot\theta)$ $\therefore \overline{AC}=|\cot\theta|$

3、(E) 下列何者無意義？ (A)$\sin 360^\circ$ (B)$\cos 90^\circ$ (C)$\tan 0^\circ$ (D)$\cot 270^\circ$ (E)$\sec 450^\circ$

解析：$\sec 450^\circ=\frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ}$分母爲 0 無意義

4、(B) 若$(4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)$爲小於 0 的實數，則$\theta$是第幾象限角？ (A)第一象限角 (B)第二象限角 (C)第三象限角 (D)第四象限角 (E)條件不足，無法判斷

解析：因爲$(4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)$爲一小於 0 的實數，表$(4+3i)$以原點$O$爲中心旋轉θ至$x$軸負向 θ爲第二象限角。



5、(A) 若一建築物上有一旗桿，旗桿長 20 公尺，某人於地面上某一點測得建築物頂點仰角爲45°，旗桿頂端仰角爲60°，則建築物高度最接近

(A)27 (B)37 (C)47 (D)57 (E)67 公尺

解析：

設建築物高度爲 x 公尺 $20+x=\sqrt{3}x$

$20=(\sqrt{3}-1)x,\ x=\frac{20}{\sqrt{3}-1}=10(\sqrt{3}+1)\fallingdotseq 27$

6、(D) 設$a=\sin 760^\circ, b=\cos(-1480^\circ), c=\tan(-1925^\circ)$, 則

(A)$c<a<b$ (B)$a<c<b$ (C)$b<a<c$ (D)$a<b<c$ (E)$b<c<a$

解析：$\because a=\sin 760^\circ=\sin(90^\circ\times 8+40^\circ)=\sin 40^\circ<1$

$b=\cos 1480^\circ=\cos(90^\circ\times 16+40^\circ)=\cos 40^\circ>\sin 40^\circ$

$c=-\tan 125^\circ=-\tan(180^\circ-55^\circ)=\tan 55^\circ>\tan 45^\circ=1$

$\therefore c>b>a$

7、(D) $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=5,\ \overline{AC}=3,\ \overline{AB}=4$，若$\angle A$的角平分線交$\overline{BC}$於 D，則$\overline{AD}=$

(A)$\frac{9}{7}\sqrt{2}$ (B)$\frac{10}{7}\sqrt{2}$ (C)$\frac{11}{7}\sqrt{2}$ (D)$\frac{12}{7}\sqrt{2}$ (E)$\frac{13}{7}\sqrt{2}$

解析：$\because \triangle ABC$爲直角△，$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$

$\therefore \frac{1}{2}(3)(4)\sin 90° = \frac{1}{2}(4)(\overline{AD})\sin 45° + \frac{1}{2}(3)(\overline{AD})\sin 45°$

$12 = \overline{AD}(2\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2}),\ \overline{AD} = 12(\frac{2}{7\sqrt{2}}) = \frac{12}{7}\sqrt{2}$

8、(B)　$\triangle ABC$ 中，　已知 $a = 4\sqrt{6},\ b = 8,\ \angle A = 60°$，則 $\angle B =$

(A) $30°$　(B) $45°$　(C) $60°$　(D) $120°$　(E) $135°$

解析：利用正弦定理得知

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{4\sqrt{6}}{\sin 60°} = \frac{8}{\sin B} \Rightarrow \frac{4\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\sin B} \Rightarrow 4\sqrt{6}\sin B = 4\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$\therefore \angle B = 45°$或$135°$，又 $a > b$，　$\therefore \angle A > \angle B$，故 $\angle B = 45°$

二、填充題 (每題 10 分)

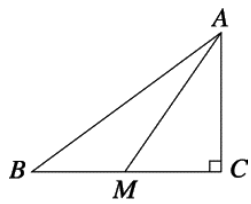
1、若 θ 爲銳角，$4\sin^2\theta - 4\cos^2\theta = 2 + \sin\theta\cos\theta$，則 $\tan\theta =$ ______，又 $\sin\theta =$ ______。

答案：$2,\ \frac{2\sqrt{5}}{5}$

解析：同除 $\cos^2\theta$，$4\tan^2\theta - 4 = 2\sec^2\theta + \tan\theta$

$\therefore \tan\theta = 2$ 或 $\tan\theta = -\frac{3}{2}$(不合)　$\therefore \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

2、如圖三角形 ABC，$\angle C = 90°$，M 爲 $\overline{BC}$ 之中點，設 $\theta = \angle BAC$，已知 $\sin\theta = \frac{4}{5}$，則 $\tan(\angle BAM) =$ ______。



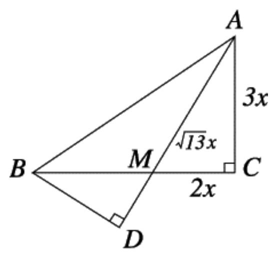
答案：$\frac{6}{17}$

解析：$\because \sin\theta = \frac{4}{5}$　$\therefore \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC} = 5:4:3$

$\because M$ 爲 $\overline{BC}$ 中點　$\therefore \overline{AC} : \overline{CM} = 3:2$

延長 $\overline{AM}$，過 B 作 $\overline{BD} \perp \overline{AM}$ 於 D　$\therefore \frac{\overline{BM}}{\sqrt{13}} = \frac{\overline{BD}}{3} = \frac{\overline{DM}}{2}$

設 $\overline{AC} = 3x,\ \overline{CM} = 2x$，$\overline{BM} = 2x,\ \overline{BD} = \frac{6x}{\sqrt{13}},\ \overline{DM} = \frac{4x}{\sqrt{13}}$



$$\therefore \tan(\angle BAM) = \frac{\frac{6}{\sqrt{13}}x}{\sqrt{13}x + \frac{4x}{\sqrt{13}}} = \frac{6}{17}$$

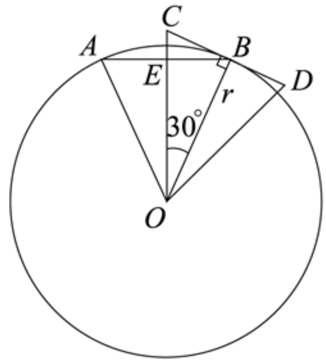
3、設 $\cot\alpha, \cot\beta$ 爲 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 之兩根，則 $\sin^2\alpha - \cos^2\beta =$ ______。

答案：$-\frac{3}{17}$

解析：$\because \begin{cases} \cot\alpha + \cot\beta = 4 \\ \cot\alpha \cdot \cot\beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \cot^2\alpha + \cot^2\beta = (\cot\alpha + \cot\beta)^2 - 2\cot\alpha\cot\beta = 12$

$$\text{原式}=\frac{1}{\csc^2\alpha}-(1-\sin^2\beta)=(\frac{1}{\csc^2\alpha}+\frac{1}{\csc^2\beta})-1=\frac{(1+\cot^2\alpha)+(1+\cot^2\beta)}{(1+\cot^2\alpha)(1+\cot^2\beta)}-1$$

$$=\frac{1+\cot^2\alpha+\cot^2\beta+1}{1+\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\alpha\cdot\cot^2\beta}-1=\frac{1+12+1}{1+12+4}-1=-\frac{3}{17}$$



4、設 $0°<\angle A<18°,\ \ \sin A=\cos 5A$，則 $\angle A=$______ ，又 $\sec 4A=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：$15°, 2$

$\boxed{\text{解析}}$：$\sin A=\cos 5A\Rightarrow A+5A=90° \quad \therefore \angle A=15°,\ \ \sec 60°=2$

5、圓外切正六邊形與內接正六邊形面積之比爲______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：4∶3

$\boxed{\text{解析}}$：

$\triangle OCD$ 與 $\triangle OAB$ 分別爲圓外切正六邊形與圓內接正六邊形的 $\frac{1}{6}$ 部分面積

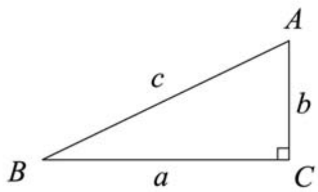
$\therefore \angle COB=30°,\ \overline{BC}=\frac{r}{\sqrt{3}},\ \overline{BE}=\frac{1}{2}r,\ \overline{OE}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$

$\therefore$ 圓外切正六邊形面積：圓內接正六邊形面積

$=6\triangle OCD:6\triangle OAB=(6\cdot\frac{2r}{\sqrt{3}}\times r\cdot\frac{1}{2}):(6\times\frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r)=4:3$

6、設 $\triangle ABC$ 中，$\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長分別爲 a, b, c，若 $\angle C=90°$ ，且 $a-b=\frac{2}{3}c$ ，又 $a>b$ ，則 $\sin A=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：$\frac{2+\sqrt{14}}{6}$



$\boxed{\text{解析}}$：$\because a^2+b^2=c^2$ 且 $a-b=\frac{2}{3}c, \sin A=\frac{a}{c}=x$

$\therefore a^2+(a-\frac{2}{3}c)^2=c^2\Rightarrow 18a^2-12ac-5c^2=0$

$\therefore 18(\frac{a}{c})^2-12(\frac{a}{c})-5=0, \therefore 18x^2-12x-5=0$

$\therefore x=\frac{12\pm\sqrt{504}}{36}=\frac{2\pm\sqrt{14}}{6}$ （負不合），$\therefore \sin A=\frac{2+\sqrt{14}}{6}$

7、若 $\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{3}$ ，則無窮等比級數 $1+\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^3\theta\cos^3\theta+\cdots=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：$\frac{9}{5}$

$\boxed{\text{解析}}$：$(\cos\theta-\sin\theta)^2=\frac{1}{9}\Rightarrow 1-2\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{9},\ \therefore \sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{4}{9}=r$

$\therefore \text{原式}=\frac{1}{1-r}=\frac{1}{1-\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{1}{\frac{5}{9}}=\frac{9}{5}$

8、若 $a\sin\theta+\cos\theta=1,\ b\sin\theta-\cos\theta=1$ ，則 $ab=$______ 。

$\boxed{\text{答案}}$：1

$\boxed{\text{解析}}$：$\because a=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta},\ b=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\Rightarrow ab=\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=1$

9、設$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{7}{5}$，且$0°<\theta<45°$,則

(1)$\sin\theta\cos\theta=$______,　　(2)$\sin\theta-\cos\theta=$______,

(3)$\tan\theta+\cot\theta=$______,　　(4)$\sin^3\theta+\cos^3\theta=$______。

$\boxed{答案}$：(1)$\dfrac{12}{25}$　(2)$-\dfrac{1}{5}$　(3)$\dfrac{25}{12}$　(4)$\dfrac{91}{125}$

$\boxed{解析}$：$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{7}{5}$　$\therefore 2\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{49}{25}-1$　$\therefore \sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{12}{25}$, $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\dfrac{1}{25}$

$\because 0°<\theta<45°$　$\therefore \sin\theta<\cos\theta$　$\therefore \sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{1}{5}$

$\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\dfrac{25}{12}$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)=\dfrac{7}{5}\times\dfrac{13}{25}=\dfrac{91}{125}$

10、設θ爲銳角，$\sin\theta$, $\cos\theta$爲$x^2-(6k-1)x+k=0$的二根，則$k=$______。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{7}{18}$

$\boxed{解析}$：$\sin\theta+\cos\theta=6k-1$, $\sin\theta\cos\theta=k$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta\Rightarrow(6k-1)^2=1+2k$　$\therefore k=0$(不合)或$\dfrac{7}{18}$

11、若$\sin\theta=\cos^2\theta$，則$\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}=$______。

$\boxed{答案}$：$\sqrt{5}+1$

$\boxed{解析}$：原式$=\dfrac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$

$\sin\theta=\cos^2\theta\Rightarrow\sin\theta=1-\sin^2\theta$,　$\sin^2+\theta\sin\theta-1=0$, $\therefore\sin\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　（$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$不合）

$\therefore$原式$=\dfrac{2}{\sin\theta}=\dfrac{2}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}\times\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{5}+1$

12、設方程式$x^2-(\tan\theta+\cot\theta)x+1=0$有一根爲$3-2\sqrt{2}$，試求$\sin\theta\cos\theta$的值。

$\boxed{答案}$：

$\boxed{解析}$：根與係數關係

二根之積爲 1，有一根爲$3-2\sqrt{2}$，故另一根爲$\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$

二根和$\tan\theta+\cot\theta=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$，故$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{6}$

13、 若$\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$且$\cos\theta\cdot\cot\theta<0$，則$\dfrac{4\cos\theta+1}{3\sin\theta+5}=$______。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{17}{13}$

$\boxed{解析}$：$\because\tan\theta<0$且$\cos\theta>0$，$\therefore\theta$在第四象限，$\therefore\cos\theta=\dfrac{3}{5}$, $\sin\theta=\dfrac{-4}{5}$

$$\therefore 原式=\frac{4\cdot\frac{3}{5}+1}{3\cdot\frac{-4}{5}+5}=\frac{\frac{17}{5}}{\frac{13}{5}}=\frac{17}{13}$$

14、 設 $P(-4\sqrt{3},y)$ 在 θ 的終邊上，若 $\cot\theta=\sqrt{3}$ ，則 $\csc\theta=$______ 。

答案：-2

解析：$\cot\theta=\frac{-4\sqrt{3}}{y}=\sqrt{3}\Rightarrow y=-4$ ，$\therefore r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-4\sqrt{3})^2+(-4)^2}=8$ ，$\therefore \csc\theta=\frac{8}{-4}=-2$

15、$\cos 47°20'=0.7373,\ \cos 47°30'=0.7353$，若 $\sin\theta=-0.7359$ 且 $180°<\theta<270°$，則 $\theta=$________。

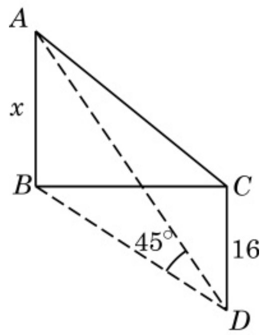
答案：$222°33'$

解析：

θ	$\cos\theta$
$47°20'$	0.7373
x	0.7359
$47°30'$	0.7353

$$\frac{x-47°20'}{10'}=\frac{-0.0014}{-0.0020}\Rightarrow x=47°27' \text{ ，} \therefore \sin\theta=-0.7359=-\cos 47°27'$$

且 $180°<\theta<270°$ ，$\therefore \theta=270°-47°27'=222°33'$



16、小緯在塔的正東測得塔頂仰角爲 $60°$，然後南行 16 公尺，再測得塔頂仰角爲 $45°$，則塔高爲_______ 。

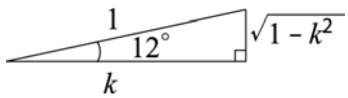
答案：$8\sqrt{6}$ 公尺

解析：設塔高 $\overline{AB}=x$ 公尺

$\overline{BC}=\overline{AB}\cot 60°=\frac{x}{\sqrt{3}}$ 公尺 ， $\overline{BD}=\overline{AB}\cot 45°=x$ 公尺

$\because \overline{BC}^2+\overline{CD}^2=\overline{BD}^2$，$\therefore \frac{x^2}{3}+16^2=x^2,\ \frac{2}{3}x^2=256,\ x^2=256(\frac{3}{2})=8\sqrt{6},\ x=\pm 8\sqrt{6}$ $(-8\sqrt{6}$不合)

17、若 $\sin 102°=k$ ，試以 k 表示 $\tan 1968°$ 。



答案：$-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$

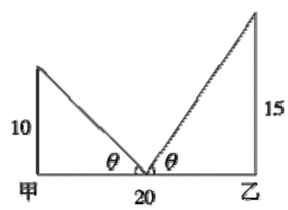
解析：$\because \frac{k}{1}=\sin(90°\times 1+12°)=\cos 12°$

$$\therefore \tan 1968°=\tan(90°\times 22-12°)=-\tan 12°=-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$$

18、若 θ 爲第四象限角且 $\cos\theta=\frac{3}{4}$ ，求 $\frac{\sin(270°+\theta)\cdot\csc(-\theta)\cdot\tan(180°-\theta)}{\cos(90°-\theta)\cdot\sec(\theta-90°)}=$________ 。

答案：-1

解析：原式$=\frac{(-\cos\theta)\cdot(-\csc\theta)\cdot(-\tan\theta)}{\sin\theta\cdot\csc\theta}=\frac{(-\cos\theta)\cdot(-\csc\theta)\cdot(-\frac{\sin\theta}{\cos\theta})}{\sin\theta\cdot\csc\theta}=-1$



19、有甲、乙兩棟大樓，相對而立，兩棟大樓相距 20 公尺，又知甲棟大樓高 10 公尺，乙棟大樓高 15 公尺，則在兩棟基地連線上距甲大樓多少

公尺處，觀測兩棟大樓其仰角大小相同？

答案：8

解析：設仰角 θ $\quad\therefore 10\cot\theta+15\cot\theta=20$，

$\therefore \cot\theta=\dfrac{4}{5}$，$10\times\dfrac{4}{5}=8$，距甲大樓 8 m 處滿足所求。

20、$\triangle ABC$ 三高為 $h_a=20,\ h_b=15,\ h_c=12$，求$\triangle ABC$ 之(1)最大邊長；(2)面積。

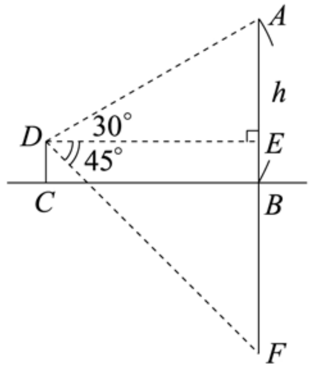
答案：25, 150

解析：$\because a:b:c=\dfrac{1}{h_a}:\dfrac{1}{h_b}:\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{20}:\dfrac{1}{15}:\dfrac{1}{12}=3:4:5$

$\because\triangle ABC$ 為直角三角形，三高即為三邊且 c 為最大邊 $a=h_b=15,\ b=h_a=20$

$c=\sqrt{15^2+20^2}=25,\qquad \triangle ABC=\dfrac{1}{2}(15)(20)=150$

21、站在湖中小島的山峰上，看對岸高峰的仰角是$30°$，看湖面，這高峰的鏡影俯角是$45°$，如果所站的山峰高度是 250 公尺（從湖面算起），則對岸高峰的高度是多少？



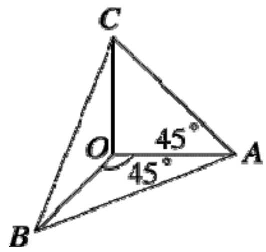
答案：$500+250\sqrt{3}$ 公尺

解析：設山高 $\overline{AB}=h$，則 $\overline{AE}=h-250$，$\overline{EF}=h+250$，

$\therefore\overline{DE}=h+250$，$\therefore\dfrac{h-250}{h+250}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\sqrt{3}h-250\sqrt{3}=h+250$，

$\therefore(\sqrt{3}-1)h=250(\sqrt{3}+1)\Rightarrow h=\dfrac{250(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1}=125(4+2\sqrt{3})=500+250\sqrt{3}$ (公尺)

22、有一人在塔的正東 A 處，測得塔頂的仰角為$45°$，他走到塔的東南 B 處，再測得塔頂的仰角為$30°$，若 A, B 的距離為 100 公尺，試求塔高。



答案：$\dfrac{100}{\sqrt{4-\sqrt{6}}}$ 公尺

解析：設塔高 h 公尺，$\overline{OA}=h,\ \overline{OB}=\sqrt{3}h$，

ΔOAB 中 $h^2+(\sqrt{3}h)^2-2\times h\times\sqrt{3}h\times\cos45°=100^2$，

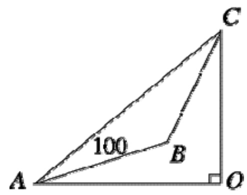
$(4-\sqrt{6})h^2=100^2\quad\therefore h=\dfrac{100}{\sqrt{4-\sqrt{6}}}$ (公尺)

23、如圖 $\angle CAO=60°,\ \angle BAO=15°,\ \overline{AB}=100,\ \angle ABC=120°$，則 $\overline{BC}=$_____，又 $\overline{OC}=$______。

答案：$100(\sqrt{3}+1)$，$75(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

解析：$\because\angle CAO=60°,\ \angle BAO=15°\quad\therefore\angle CAB=45°$

又 $\angle ABC=120°,\ \overline{AB}=100\quad\therefore\dfrac{\overline{AC}}{\sin120°}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin45°}=\dfrac{100}{\sin15°}$



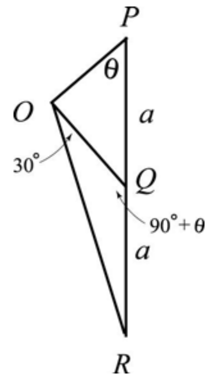
$\therefore\overline{BC}==\dfrac{100\sin45°}{\sin15°}=100\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=100(\sqrt{3}+1)$,

$\overline{AC}=\dfrac{100\times\sin120°}{\sin15°}==100\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=50(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$

$\therefore\overline{OC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{AC}=75(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

24、某人在 O 點測量到遠處有一物作等速直線運動。開始時該物位置在 P 點，一分鐘後，其位置在 Q 點，且 $\angle POQ=90^\circ$。再過一分鐘後，該物位置在 R 點，且 $\angle QOR=30^\circ$。請以最簡分數表示 $\tan^2(\angle OPQ)=$______。

答案：$\dfrac{3}{4}$



解析：設 $\overline{PQ}=\overline{QR}=a$ ($\because$ 爲等速直線運動)

則△OPQ 中, $\dfrac{\overline{OQ}}{\sin\theta}=\dfrac{a}{\sin 90^\circ}\Rightarrow \overline{OQ}=a\cdot\sin\theta$

又△OQR 中, $\angle R=180^\circ-30^\circ-\left(90^\circ+\theta\right)=60^\circ-\theta$

由正弦定律 $\Rightarrow \dfrac{a}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\overline{OQ}}{\sin(60^\circ-\theta)}\Rightarrow \dfrac{a}{\sin 30^\circ}=\dfrac{a\sin\theta}{\sin(60^\circ-\theta)}$

$\Rightarrow \sin(60^\circ-\theta)=\sin 30^\circ\cdot\sin\theta\Rightarrow \sin 60^\circ\cdot\cos\theta-\cos 60^\circ\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sin\theta$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sin\theta\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \tan^2\theta=\dfrac{3}{4}$

25、一人在山麓測得山頂之仰角爲 $30°$，由此處上山有一直線斜坡路，與地面的斜度是 $15°$，此人沿此坡走 50 公尺，又測得山頂之仰角爲 $60°$，則山高爲______公尺。

答案：$25\sqrt{2}$

解析：設山高爲 $h+50\sin 15°$，$\therefore \sqrt{3}(h+50\sin 15°)=\dfrac{h}{\sqrt{3}}+50\cos 15°$，

$\sqrt{3}(h+50\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})=\dfrac{h}{\sqrt{3}}+50\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\Rightarrow h=\dfrac{25}{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$，

$\therefore$ 山高爲 $\dfrac{25}{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{6})+50(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})=25\sqrt{2}$ 公尺。

26、△ABC 中，M 爲 $\overline{BC}$ 之中點，且 $\overline{BC}=6,\ \overline{AC}=3,\ \overline{AB}=5$，則 $\overline{AM}=$____，$\cos(\angle AMB)=$______。

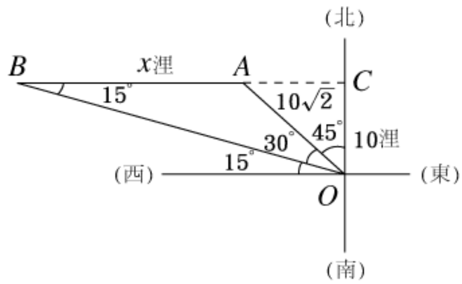
答案：$2\sqrt{2}$，$-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

解析：$\because \overline{AM}$ 爲中線，設 $\overline{AM}=x$, 中線定理 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AM}^2+\dfrac{1}{2}\overline{BC}^2$

$\therefore 3^2+5^2=2x^2+\dfrac{1}{2}\times 6^2$ $\quad\therefore x=\pm 2\sqrt{2}$ (負不合) $\quad\therefore \overline{AM}=2\sqrt{2}$

$\cos(\angle AMB)=\dfrac{3^2+(2\sqrt{2})^2-5^2}{2\times 3\times 2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

27、一船發現兩燈塔 A, B，燈塔 A 在西北方，燈塔 B 在西 $15°$ 北，今此船向正北方向航行 10 浬後，發現燈塔 A 與燈塔 B 均在其正西方，則 A, B 兩塔的距離爲______。



答案：$10(\sqrt{3}+1)$浬

解析：如圖所示：設 A, B 兩塔相距 x 浬

(1)在△AOC 中，$\angle AOC=45°,\angle OAC=45°,\overline{OC}=10$

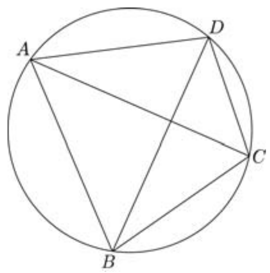
$\Rightarrow \overline{AC}=10\Rightarrow \overline{OA}=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$

(2)在△AOB 中 $\angle AOB=45°-15°=30°,\angle ABO=15°$

利用正弦定理得知$\dfrac{x}{\sin 30^\circ}=\dfrac{10\sqrt{2}}{\sin 15^\circ}\Rightarrow \dfrac{x}{\frac{1}{2}}=\dfrac{10\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\Rightarrow \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}x=5\sqrt{2}$

$\Rightarrow x=5\sqrt{2}\times\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{20}{\sqrt{3}-1}\times\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=10(\sqrt{3}+1)$ (浬)

28、如圖所示， $ABCD$為圓內接四邊形： 若 $\angle DBC=30^\circ$，$\angle ABD=45^\circ$，$\overline{CD}=6$ ，則線段$\overline{AD}=$____



答案：$\sqrt{72}$

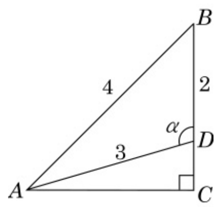
解析：設此圓之半徑為 R，$\overline{AD}=x$

①在△ABD 中：由正弦定理知：$\dfrac{x}{\sin 45^\circ}=2R$

②在△BCD 中：再由正弦定理知：$\dfrac{6}{\sin 30^\circ}=2R$

③$\therefore \dfrac{x}{\sin 45^\circ}=\dfrac{6}{\sin 30^\circ}\Rightarrow x=\dfrac{6}{\sin 30^\circ}\times\sin 45^\circ=\dfrac{6}{\frac{1}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{72}$

29、如圖已知，$\overline{AB}=4,\ \overline{AD}=3,\ \overline{BD}=2$ ，又$\overline{AC}$垂直$\overleftrightarrow{BD}$於 C，則(1) $\cos(\angle ADB)=$______；(2) $\tan(\angle BAC)=$______。



答案：(1) $-\dfrac{1}{4}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

解析：令$\angle ADB=\alpha$　$\therefore \cos\alpha=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3}=-\dfrac{1}{4}$　$\therefore \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　$\overline{AD}=3$

$\therefore \overline{AC}=\overline{AD}\cdot\sin(\pi-\alpha)=\overline{AD}\cdot\sin\alpha=\dfrac{3}{4}\sqrt{15}$

$\overline{CD}=\overline{AD}\cdot\cos(\pi-\alpha)=\overline{AD}\cdot(-\cos\alpha)=\dfrac{3}{4}$ ，　$\therefore \tan(\angle BAC)=\dfrac{\frac{3}{4}+2}{\frac{3}{4}\sqrt{15}}=\dfrac{11}{45}\sqrt{15}$

30、△ABC 中，a, b, c 分別表$\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊長，且 $a=1+\sqrt{3}$，$b=1+\sqrt{5}$，$c=5-\sqrt{5}$ ，則$(a+b)\cos C+(b+c)\cos A+(c+a)\cos B=$______。

答案：$7+\sqrt{3}$

解析：原式$=(b\cos C+c\cos B)+(a\cos C+c\cos A)+(b\cos A+a\cos B)$

$=a+b+c=(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{5})+(5-\sqrt{5})=7+\sqrt{3}$

31、設 a, b, c 分別表示△ABC 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 之對邊邊長，在△ABC 中，若 $2a-6b+3c=0,\ 6a-3b-c=0$ ，則

(1) $\sin A:\sin B:\sin C=$______，(2) $\cos A:\cos B:\cos C=$______。

答案：(1) $3:4:6$ ，(2) $129:116:(-66)$

解析：$\begin{cases}2a-6b+3c=0\\6a-3b-c=0\end{cases}$　$\therefore a:b:c=3:4:6$ ，$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=3:4:6$

$\cos A:\cos B:\cos C=\dfrac{4^2+6^2-3^2}{2\times4\times6}:\dfrac{3^2+6^2-4^2}{2\times3\times6}:\dfrac{3^2+4^2-6^2}{2\times3\times4}=129:116:(-66)$

32、△ABC 中，若$\log_3(a+b+c)+\log_3(b+c-a)=1+\log_3 b+\log_3 c$ ，則$\angle A=$______。

答案：60°

解析：$\log_3(a+b+c)(b+c-a)=\log_3 3\times b\times c$

$\therefore (b+c)^2-a^2=3bc$，$\therefore b^2+c^2-a^2=bc$，$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \angle A=60^\circ$

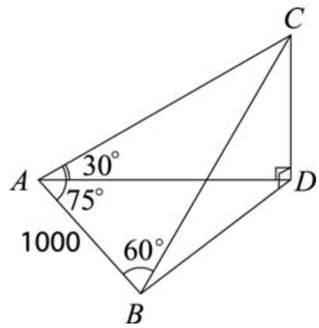
33、$\triangle ABC$ 中，三邊長為 5, 6, 7，則$\triangle ABC$ 的面積為______，外接圓半徑為______，內切圓半徑為______。

答案：$6\sqrt{6}$, $\dfrac{35\sqrt{6}}{24}$, $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

解析：$\triangle ABC$ 面積$=\sqrt{9\times4\times3\times2}=6\sqrt{6}$, $\because 2R=\dfrac{abc}{2\triangle}\Rightarrow \quad R=\dfrac{35\sqrt{6}}{24}$

$s=9 \quad \therefore r=\dfrac{\Delta}{s}=\dfrac{6\sqrt{6}}{9}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

34、從相距 1000 公尺之兩點 A, B，探得氣球 C 之高度，在 A 測得 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 所成之角度為 75°，氣球的仰角為 30°，在 B 測得 $\overline{BA}, \overline{BC}$ 所成之角度為 60°，求氣球的高度為何？__________公尺。

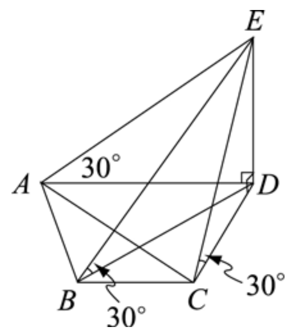


答案：$250\sqrt{6}$ 公尺

解析：令 $\overline{CD}=x$，$\therefore \overline{AC}=2x,\ \angle ACB=180^\circ-75^\circ-60^\circ=45^\circ$

$\therefore \dfrac{2x}{\sin60^\circ}=\dfrac{1000}{\sin45^\circ}\Rightarrow 2x\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1000\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore x=250\sqrt{6}$, $\therefore$氣球高度為 $250\sqrt{6}$ 公尺

35、在平面上三點 A, B, C，測得一山頂的仰角均為 30°，若 $\angle BAC=30^\circ$ 且 $\overline{BC}=200$ 公尺，則山高是多少？__________公尺。



答案：$\dfrac{200\sqrt{3}}{3}$

解析：$\because$仰角皆為 30°，$\therefore \overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}$，$\therefore A, B, C$ 共圓

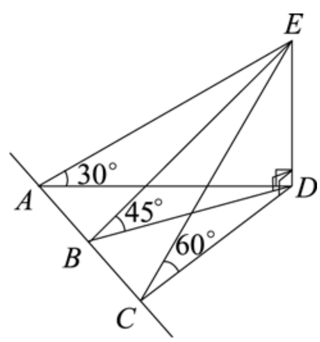
令 $\overline{DE}=x,\ \overline{AD}=\sqrt{3}x,\ \therefore \dfrac{200}{\sin30^\circ}=2\cdot(\sqrt{3}x)$，$\therefore 200x=\sqrt{3}x,\ \therefore x=\dfrac{200}{\sqrt{3}}$,

$\therefore$山高為 $\dfrac{200\sqrt{3}}{3}$ 公尺

36、由一直線上相異三點 A, B, C 測得一高塔的仰角分別為 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$，若 $\overline{AB}=\overline{BC}=600$ 公尺，則此高塔高度是多少？__________公尺。

答案：$300\sqrt{6}$

解析：



令 $\overline{DE}=\sqrt{3}x$，$\therefore \overline{AD}=3x,\ \overline{BD}=\sqrt{3}x,\ \overline{CD}=x$

利用中線長定理

$\therefore (3x)^2+x^2=2(\sqrt{3}x)^2+\dfrac{1}{2}\times1200^2$，$\therefore 4x^2=2\times600\times600$

$\therefore x=300\sqrt{2}$（負不合），$\therefore$塔高$=\sqrt{3}x=300\sqrt{6}$（公尺）