<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：97.10.30</td></tr>
<tr><td>範
圍</td><td>Book2
指數、對數</td><td>班級
座號</td><td>三年　　班
</td><td>姓
名</td><td></td></tr>
</table>

一、選擇題 (每題 5 分)

1、(A)　$\log 851.1 = 2.930$，則$\log x = -1.07$，則$x =$

(A)0.08511　(B)0.8511　(C)8.511　(D)847.1　(E)條件不足

$\boxed{\text{解析}}$：$\log 851.1 = 2.930 = 2 + 0.930$，　$\therefore \log 8.511 = 0.930$

$\therefore \log x = -1.07 = -2 + 0.930 = \log 10^{-2} + \log 8.511 = \log(8.511 \times 10^{-2}) \Rightarrow x = 0.08511$

2、(D)　$2x + 2\log_{10}(2 + 10^{-x}) - \log_{10}(\frac{1}{4} + 10^{x} + 10^{2x}) =$

(A) 2×10^{x}　(B) $x \cdot \log_{10}\frac{1}{4}$　(C)1　(D) $2\log_{10} 2$　(E) $2x + 10^{2x}$

$\boxed{\text{解析}}$：原式$= \log 10^{2x} + \log_{10}(2 + 10^{-x})^2 - \log_{10}(\frac{1}{4} + 10^{x} + 10^{2x})$

$$= \log_{10}\left[\frac{10^{2x}(2 + 10^{-x})^2}{\frac{1}{4} + 10^{x} + 10^{2x}}\right] = \log_{10}\left(\frac{4 \times 10^{2x} + 4 \times 10^{x} + 1}{10^{2x} + 10^{x} + \frac{1}{4}}\right) = \log_{10} 4 = 2\log_{10} 2$$

3、(B)　設$x = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}$，則$4^{x} =$　(A)10　(B)25　(C)8　(D)16　(E)32

$\boxed{\text{解析}}$：$x = \log_2 5 \Rightarrow 4^{x} = 4^{\log_2 5} = 2^{2\log_2 5} = 2^{\log_2 25} = 25$

4、(B)　設a, b為正實數，已知$\log_7 a = 11,\ \log_7 b = 13$；試問$\log_7(a + b)$之值最接近下列哪個選項？ (A)12　(B)13　(C)14　(D)23　(E)24

$\boxed{\text{解析}}$：$\because \log_7 a = 11 \Rightarrow a = 7^{11}$

$\log_7 b = 13 \Rightarrow b = 7^{13}$

$\therefore \log_7(a + b) = \log_7(7^{11} + 7^{13}) = \log_7[7^{11}(1 + 7^2)] = \log_7 7^{11} + \log_7(1 + 7^2)$

$= 11 + \log_7 50 \doteq 11 + 2 = 13$

5、(C)　地震規模的大小通常用芮氏等級來表示。已知芮氏等級每增加 1 級，地震震幅強度約增加為原來的 10 倍，能量釋放強度則約增加為原來的 32 倍。現假設有兩次地震，所釋放的能量約相差 100,000 倍，依上述性質則地震震幅強度約相差幾倍？選出最接近的答案。 (A)10 倍 (B)100 倍　(C)1000 倍　(D)10000 倍 (D)100000 倍

$\boxed{\text{解析}}$：$100000 = 32^{x} \Rightarrow \log 100000 = \log 32^{x} \Rightarrow 5 = x\log 32 = x\log 2^5 = 5x\log 2 \Rightarrow 1 = x\log 2$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{\log 2} = \dfrac{1}{0.3010} \approx 3.32$

即此兩次地震級數約差 3.32 級，地震震幅強度約差$10^{3.32} \approx 10^{3} = 1000$倍

6、(A)　$3^{\frac{\log(\log 9)}{\log 3}} =$？ (A) $\log 9$　(B) $3^{\log 2}$　(C) $3^{\log 3}$　(D)9　(E)27

$\boxed{\text{解析}}$：$3^{\frac{\log(\log 9)}{\log 3}} = 3^{\log_3(\log 9)} = (\log 9)^{\log_3 3} = \log 9$　　$(\because a^{\log_b x} = x^{\log_b a})$

7、(E)　$\log x = -1.2345$，則下列何者為真？

(A) $\log x$的首數為 -1　(B) $\log x$的尾數為 0.2345

(C)小數 x 從小數點向右第 1 位出現非 0 之數字

(D)小數 x 從小數點向右第一個出現非 0 之數字爲 1　　(E)$\frac{1}{100}<x<\frac{1}{10}$

解析：$\log x=-1.2345=-2+0.7655$

$\therefore$ 首數爲 -2，尾數爲 0.7655，小數點後第二位出現非 0 之數字 k

$\because \log 5=0.6990$，$\log 6=0.7781 \Rightarrow \log 5<0.7655<\log 6$，$\therefore k=5$

$\because -2<\log x<-1$　$\therefore \frac{1}{100}<x<\frac{1}{10}$

8、(D) 根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後，t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的 $100(1-2^{-kt})\%$，其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70%的人口聽到該訊息。又設最快要 T 小時後，有 99%的人口已聽到該訊息，則 T 最接近下列哪一個選項？ (A)5 小時 (B)$7\frac{1}{2}$ 小時 (C)9 小時 (D)$11\frac{1}{2}$ 小時 (E)13 小時

解析：t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的 $100(1-2^{-kt})\%$，

3 小時之內已經有 70%的人口聽到該訊息，

$$100(1-2^{-3k})=70 \Rightarrow 1-2^{-3k}=\frac{7}{10}$$

$$\Rightarrow 2^{-3k}=\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow -3k\log 2=\log 3-1$$

$$\Rightarrow k=\frac{1-\log 3}{3\log 2}$$

又 $100(1-2^{-kT})\ge 99$，$1-2^{-kT}\ge \frac{99}{100} \Rightarrow 2^{-kT}\le \frac{1}{100} \Rightarrow -kT\log 2\le -2 \Rightarrow T\ge \frac{2}{k\log 2}$

將 $k=\frac{1-\log 3}{3\log 2}$ 代入 $\Rightarrow T\ge \frac{6}{1-\log 3}=\frac{6}{1-0.3010}\doteq 11.5$

9、(ABC) (複選)已知不等式 $1.253\times 10^{845}<7^{1000}<1.254\times 10^{845}$ 成立，請選出正確的選項。

(A)$\log_{10} 7<0.846$ (B)$\log_{10} 7>0.845$ (C)$7^{100}<5\times 10^{84}$ (D)$7^{10}<2\times 10^{8}$

解析：$\because 1.253\times 10^{845}<7^{1000}<1.254\times 10^{845}$

$\therefore 845+\log 1.253<1000\log 7<845+\log 1.254$

$$\Rightarrow 0.845+\frac{1}{1000}\log 1.253<\log 7<0.845+\frac{1}{1000}\log 1.254$$

又 $\log 7^{100}=100\log 7 \Rightarrow 84.5<100\log 7<84.6$

$\because \log 5\times 10^{84}=84+\log 5 \fallingdotseq 84.699 \Rightarrow 7^{100}<5\times 10^{84}$

同理 $\log 7^{10}=10\log 7 \Rightarrow 8.45<10\ \log 7<8.46$

$\because \log 2\times 10^{8}=8+\log 2=8.3010 \Rightarrow 7^{10}>2\times 10^{8}$

二、填充題 (每題 10 分)

1、設 $n\in\mathbb{N}$，$n>2$，則比較 $(2n)^n$ 與 n^{2n} 之大小，則較大者爲______。

答案：n^{2n}

解析：$n>2$，$\frac{n^{2n}}{(2n)^n}=\frac{n^n\cdot n^n}{2^n\cdot n^n}=(\frac{n}{2})^n>1$(比值大於 1)，　$\therefore n^{2n}>(2n)^n$，　$\therefore n^{2n}$ 較大

2、(1) $\frac{1}{3}\log_2\frac{27}{8}-\log_2 24+2\log_2\sqrt[3]{2}=$______。(2) $(\log_2 5+\log_4 125)(\log_{\sqrt{5}} 2-\log_{25} 4)=$______。

$\boxed{答案}$：(1) $-\frac{10}{3}$　(2) $\frac{5}{2}$

$\boxed{解析}$：(1) $\log_2[\sqrt[3]{\frac{27}{8}}\times\frac{1}{24}\times\left(\sqrt[3]{2}\right)^2]=\log_2(\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\times 2^{\frac{2}{3}})=\log_2[2^{(-1)+(-3)+\frac{2}{3}}]=\log_2 2^{-\frac{10}{3}}=-\frac{10}{3}$

(2) $[\log_2 5+\frac{3}{2}\log_2 5][\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_5 2-\frac{2}{2}\log_5 2]=\frac{5}{2}\log_2 5\times\log_5 2=\frac{5}{2}\log_2 2=\frac{5}{2}$

3、$\log_2\log_3 x=5$，則 x 為______位數。

$\boxed{答案}$：16

$\boxed{解析}$：$\log_2\log_3 x=5\Rightarrow\log_3 x=32$，$x=3^{32}$，$\log 3^{32}=32\times 0.4771=15.2672$　$\therefore x$ 為 16 位數

4、已知 $\log 4.37=0.6405,\ \log 4.38=0.6415$，若 $\log x=-2.3588$，則 x 之值為______。(利用內插法)

$\boxed{答案}$：4.377×10^{-3}

$\boxed{解析}$：$\log x=-2.3588=-3+0.6412$

$\log 4.370=0.6405$

$\log 4.37a=0.6412\quad ,1\le a\le 9,a\in N$

$\log 4.380=0.6415$

$\frac{a}{10}=\frac{7}{10}\qquad\because a=7$

$\log x=-3+0.6412=-3+\log 4.377=\log 4.377\times 10^{-3}\qquad\therefore x=4.377\times 10^{-3}$

5、設 $\sqrt[x]{729}=\sqrt[y]{3^{y+2}}$，且 $2^{4x+3y}=8^{xy}$，則 $(x,y)=$______。

$\boxed{答案}$：(3, 2)

$\boxed{解析}$：$\sqrt[x]{729}=\sqrt[y]{3^{y+2}}\Rightarrow 3^{\frac{6}{x}}=3^{\frac{y+2}{y}}$，$\therefore\frac{6}{x}=\frac{y+2}{y}\Rightarrow xy+2x=6y\Rightarrow-\frac{6}{x}+\frac{2}{y}=-1$

$2^{4x+3y}=8^{xy}\Rightarrow 2^{4x+3y}=2^{3xy}\Rightarrow 4x+3y=3xy\Rightarrow\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=3$

解 $\begin{cases}-\frac{6}{x}+\frac{2}{y}=-1\cdots\cdots① \\ \frac{3}{x}+\frac{4}{y}=3\cdots\cdots②\end{cases}$

①+②×2　$\frac{10}{y}=5\Rightarrow y=2,x=3$，$\therefore(x,y)=(3,2)$

6、若 11^{40} 為 42 位數，且 13^{60} 為 67 位數，則 143^{10} 為______位數。

$\boxed{答案}$：22

$\boxed{解析}$：11^{40} 為 42 位數 $\Rightarrow 41\le 40\log 11<42$，$10.25\le 10\log 11<10.5\ldots\ldots①$

13^{60} 為 67 位數 $\Rightarrow 66\le 60\log 13<67$，$11\le 10\log 13<11.1\overline{6}\ldots\ldots②$

①+② $\Rightarrow 21.25\le 10\log 143<21.\overline{6}$　$\therefore 143^{10}$ 為 22 位數

7、設 $10<x<1000$，且 $\log x$ 與 $\log\frac{1}{x}$ 的尾數相同，則 $x=$__________。

答案：$10^{\frac{3}{2}}$ 或 10^2 或 $10^{\frac{5}{2}}$

解析：$\because \log x$ 與 $\log\frac{1}{x}$ 的尾數相同，$\therefore \log x - \log\frac{1}{x} = 2\log x \in \mathbb{Z}$　(尾數抵銷只剩首數相減)

$\because$　$10 < x < 1000 \Rightarrow 1 < \log x < 3$，$\therefore 2 < 2\log x < 6$ 且 $2\log x \in \mathbb{Z}$

$\therefore 2\log x = 3$ 或 4 或 $5 \Rightarrow \log x = \frac{3}{2}$ 或 2 或 $\frac{5}{2} \Rightarrow x = 10^{\frac{3}{2}}$ 或 10^2 或 $10^{\frac{5}{2}}$

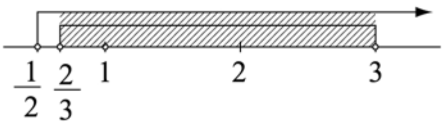
8、$x \in \mathbb{R}$，若 $\log_{2x-1}(-3x^2+11x-6)$ 恆有意義，則 x 的範圍爲________。

答案：$\frac{2}{3} < x < 3$ 且 $x \neq 1$

解析：$\because \log_{2x-1}(-3x^2+11x-6)$ 恆有意義

$$\therefore \begin{cases} 1 \neq 2x-1 > 0 \\ -3x^2+11x-6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \neq x > \frac{1}{2} \cdots\cdots ① \\ \frac{2}{3} < x < 3 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

由①, ②



得 $\frac{2}{3} < x < 3,\ x \neq 1$

9、前行政院長提出知識經濟，喊出 10 年內要讓台灣 double (加倍)，一般小市民希望第 11 年開始的薪水加倍。如果每年調薪 a %，其中 a 爲整數，欲達成小市民的希望，那麼 a 的最小值爲_______。(已知：$\log 2 \doteqdot 0.3010$)

$x=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log(1+0.01x) \doteqdot$	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374

答案：8

解析：設原有薪水 x 元，經過 10 年而在第 11 年開始薪水加倍 $\therefore x\cdot(1+a\%)^{10} > 2x$

$\Rightarrow$ $(1.0a)^{10} > 2$ $\Rightarrow$ $10\cdot\log 1.0a > \log 2$ $\Rightarrow$ $\log 1.0a > 0.03010$

由表中可得 $\log(1+0.08) = 0.0334$　$\therefore a$ 最小值取 8。

10、若 $(\frac{5^{10}}{7^{30}})$ 以小數表示時，小數點後第 m 位開始出現不爲 0 的數字 a，則 $m=$______，$a=$______。

答案：19, 4

解析：$\log(\frac{5^{10}}{7^{30}}) = \log 5^{10} - \log 7^{30} = \log(\frac{10}{2})^{10} - \log 7^{30}$

$= \log 10^{10} - \log 2^{10} - \log 7^{30} = 10 - 10\log 2 - 30\log 7 = -18.363 = -19 + 0.637$

$\therefore m = 19$，$\log 4 = 0.6020, \log 5 = 0.6990 \Rightarrow \log 4 < 0.637 < \log 5$　$\therefore a = 4$

11、若 $10^{0.8887} = 7.74$，$10^{3.8882} = 7730$，則 $10^{-2.1117} =$______，又 $10^x = 77.34$，則 $x=$______。

答案：0.007736, 1.8884

解析：由 $10^{3.8882} = 7730 \Rightarrow \frac{10^{3.8882}}{1000} = \frac{7730}{1000} \Rightarrow 10^{0.8882} = 7.730$；

又 $10^{-2.1117} = 10^{0.8883-3} = \frac{10^{0.8883}}{1000}$

利用內插、外插法：

$\log 7.74 \quad = 0.8887$

$\log 7.734 \ = a$

$\log 7.73 \quad = 0.8882$

$\log b \qquad = 0.8883$

$\therefore a = 0.8884, \quad b = 7.736$

$\therefore 10^{-2.1117} = 10^{0.8883-3} = \dfrac{10^{0.8883}}{1000} = 0.007736$

$10^x = 77.34 = 7.734 \times 10 = 10^{0.8884} \times 10 = 10^{1.8884} \quad , \therefore x = 1.8884$

12、一存款按年利率 20%複利計算，每年爲一期，則至少要______年(取整數年數)，其本利和才會超過本金的 3 倍。

答案：7

解析：本金爲 P, $P(1+20\%)^n > 3P \quad \therefore$

$n\log 1.2 > \log 3 \Rightarrow n > \dfrac{\log 3}{\log 1.2} = \dfrac{\log 3}{\log \frac{12}{10}} = \dfrac{\log 3}{\log 3 + 2\log 2 - \log 10} = 6.03...$，至少要 7 年

13、設 $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\log_a 2}{\log_2 b} + \dfrac{\log_b 2}{\log_2 c} + \dfrac{\log_c 2}{\log_2 a}$ 且 $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ b = \sqrt{2},\ c = 4$，則 $p =$______。

答案：$-\dfrac{1}{4}$

解析：$\log_a 2 = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2 = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} \log_2 2 = -2 \Rightarrow \log_2 a = -\dfrac{1}{2}$

$\log_b 2 = \log_{\sqrt{2}} 2 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = 2 \Rightarrow \log_2 b = \dfrac{1}{2}$

$\log_c 2 = \log_4 2 = \dfrac{1}{2}\log_2 2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \ \log_2 c = 2$

$\therefore \dfrac{1}{p} = \dfrac{-2}{\frac{1}{2}} + \dfrac{2}{2} + \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -4 \Rightarrow \ p = -\dfrac{1}{4}$

14、設 a,b,c 爲正整數，若 $a\log_{520} 2 + b\log_{520} 5 + c\log_{520} 13 = 3$，則 $a+b+c =$_________。

答案：15

解析：$a\log_{520} 2 + b\log_{520} 5 + c\log_{520} 13 = 3$

$\Rightarrow \ \log_{520} 2^a + \log_{520} 5^b + \log_{520} 13^c = 3$

$\Rightarrow \ \log_{520} 2^a \cdot 5^b \cdot 13^c = 3$

$\Rightarrow \ 2^a \cdot 5^b \cdot 13^c = 520^3 = (2^3 \cdot 5 \cdot 13)^3 = 2^9 \cdot 5^3 \cdot 13^3$

$\Rightarrow a = 9, b = 3, c = 3$，故 $a+b+c$ =9＋3＋3=15。

15、$\log x^2$ 之尾數與 $\log \dfrac{1}{x}$ 之尾數和爲 $\dfrac{5}{4}$，則 $\log x$ 之尾數爲______。

答案：$\dfrac{1}{4}$

$\boxed{解析}$：

設 $\log x = n+\alpha \Rightarrow \log\frac{1}{x} = -(n+\alpha)$，　$\log x^2 = 2n+2\alpha$

	$\log\frac{1}{x}$尾數	$\log x^2$尾數	
$\alpha=0$	0	0	尾數和為 $\frac{5}{4}$ (不合)
$0<\alpha<\frac{1}{2}$	$1-\alpha$	2α	$1-\alpha+2\alpha=\frac{5}{4}$　$\therefore \alpha=\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}\le\alpha<1$	$1-\alpha$	$2\alpha-1$	$1-\alpha+2\alpha-1=\frac{5}{4}$　$\therefore \alpha=\frac{5}{4}$(不合)

$\therefore \log x$ 之尾數為 $\frac{1}{4}$

16、設 10^4 的所有正因數的乘積為 n ，則 $\log n =$______。

$\boxed{答案}$：50

$\boxed{解析}$：$10^4 = 2^4\times 5^4$，共有 25 個正因數，由小而大依次設為 $a_1, a_2, \cdots, a_{25}$

$\Rightarrow a_1\times a_{25} = a_2\times a_{24} = \cdots = a_{12}\times a_{14} = 10^4$ ，且 $a_{13} = 2^2\times 5^2 = 10^2$

$\Rightarrow n = a_1\times a_2\times\cdots\times a_{25} = (10^4)^{\frac{25}{2}} = 10^{50}$ ，故 $\log n = \log 10^{50} = 50$

17、設 $n\in\mathbb{N}$，$(n+1)^n$ 為 8 位數，則 $n =$______。

$\boxed{答案}$：8

$\boxed{解析}$：$7\le\log(n+1)^n<8$　$\therefore 7\le n\log(n+1)<8$

$\because n\in\mathbb{N}$　$\therefore 7\times\log 8<7$　(不合)，$8\times\log 9 = 7.6336$，　$9\times\log 10 = 9$　(不合)　$\therefore n=8$

18、 $x\in\mathbb{R}$ ，則 $\log_3(x^2-x+1)-\log_3(x^2+x+1)$ 之極大值與極小值各為______。

$\boxed{答案}$：$1, -1$

$\boxed{解析}$：$\log_3(x^2-x+1)-\log_3(x^2+x+1) = \log_3\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

設 $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \Rightarrow (y-1)x^2+(y+1)x+(y-1)=0$ ，$\therefore y-1=0 \Rightarrow x=0, y=1$ ………………①

$y-1\ne 0, x\in\mathbb{R} \Rightarrow D=(y+1)^2-4(y-1)^2\ge 0$，$\Rightarrow (y-3)(3y-1)\le 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\le y\le 3, y\ne 1$ ………②

由①, ②可得 $\frac{1}{3}\le y\le 3$ ，$\therefore -1\le\log_3 y\le 1$,故最大值為 1，最小值為 -1

19、已知 $\log 406 = 2.6085$，$\log 0.407 = -0.3905$ ，若 $\log x = 1.6093$ ，則 $x =$______。又 $\log 40630 =$______。($\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$，$\log 7 = 0.8451$)

$\boxed{答案}$：40.68, 4.6088

$\boxed{解析}$：$\log 406 = 2.6085$　$\therefore \log 4.06 = 0.6085$

$\log 0.407 = -0.3905$，$\log 4.07 = 1+(-0.3905) = 0.6095$

內差法求　$\log 4.068 = 0.6093$　$\therefore x = 40.68$

同理 $\log 4.063 = 0.6088$　$\therefore \log 40630 = 4.6088$

20、設 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 7$，則以 a, b 表示

(1) $\log_6 \dfrac{24}{7}=$______。　(2) $\log_3 2+\log_{\sqrt{3}} 2^2+\log_{\sqrt[3]{3}} 2^3+\cdots+\log_{\sqrt[8]{3}} 2^8=$______。

答案：(1) $\dfrac{a+3-ab}{a+1}$　(2) $\dfrac{204}{a}$

解析：(1) $ab=\log_2 3\cdot\log_3 7=\log_2 7 \Rightarrow \log_6\dfrac{24}{7}=\dfrac{\log_2\frac{24}{7}}{\log_2 6}=\dfrac{\log_2 8+\log_2 3-\log_2 7}{\log_2 2+\log_2 3}=\dfrac{3+a-ab}{1+a}$

(2) $\log_3 2+\dfrac{2}{\frac{1}{2}}\log_3 2+\dfrac{3}{\frac{1}{3}}\log_3 2+\cdots+\dfrac{8}{\frac{1}{8}}\log_3 2$

$=\log_3 2+2^2\log_3 2+3^2\log_3 2+\cdots+8^2\log_3 2=204\log_3 2=204\times\dfrac{1}{\log_2 3}=\dfrac{204}{a}$

21、(1)求 $\log\dfrac{1}{250}=$______。(2)若 $\dfrac{1}{300}<(\dfrac{7}{8})^n<\dfrac{1}{250}$，則自然數 n 之值爲______。

答案：(1) -2.398　(2) 42

解析：(1) $\log\dfrac{1}{250}=\log\dfrac{4}{1000}=2\log 2-\log 1000=2\log 2-3=-2.398$

(2) $\log\dfrac{1}{300}=-\log 300=-2-\log 3=-2.4771$

$\log\dfrac{7}{8}=\log 7-\log 8=\log 7-3\log 2=-0.0579$

$\therefore -2.4771<n\times(-0.0579)<-2.398$　$\therefore 42.7>n>41.4$，$\therefore n=42$

22、設 $a=\sqrt[3]{\dfrac{4.21\times 0.013}{71.9}}$，又知 $\log 4.21=0.6243$，$\log 1.3=0.1139$，$\log 7.19=0.8567$，則

$\log a=$__________又利用下表求 $a=$_________

常用對數表

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	表尾差								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

答案：

$$\log a=\log\sqrt[3]{\frac{4.21\times 0.013}{71.9}}=\log\left(\frac{4.21\times 0.013}{71.9}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}(\log 4.21+\log 0.013-\log 71.9)$$

$$=\frac{1}{3}[0.6243+0.1139-2-1-0.8567]=-1.0395=-2+0.9605=\log 10^{-2}+\log 9.13$$

$\therefore a=9.13\times 10^{-2}=0.0913$

23、志明參加郵局零存整付之儲蓄存款，每月月初須付 10000 元，若依年利率 6%複利計算，每月為 1 期，存滿 2 年後，本利和共有多少元？

$\log 1.005=0.0021$，$\log 1.06=0.253$ ，$\log 1.12=0.0492$，$\log 1.13=0.0532$

答案：$10000\times(1+\frac{5}{1000})^{24}+10000\times(1+\frac{5}{1000})^{23}+\cdots+10000\times(1+\frac{5}{1000})^{1}$

$$=10000\times(1+\frac{5}{1000})^{1}+10000\times(1+\frac{5}{1000})^{2}+\cdots+10000\times(1+\frac{5}{1000})^{24}$$

$$=\frac{10000\times 1.005\times[(1.005)^{24}-1]}{1.005-1}=2010000\times[(1.005)^{24}-1]$$

$\log(1.005)^{24}=0.0504$

$$\begin{pmatrix}\log 1.12=0.0492\\ \log k=0.0504\\ \log 1.13=0.0532\end{pmatrix}\Rightarrow k=1.123$$

$\therefore(1.005)^{24}\doteqdot 1.123$　$\therefore$總和為 $2010000\times[1.123-1]=247230$ 元

24、若 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{4}}(2x+1)$ ，則 x 值的範圍為_______。

答案：$1<x<4$

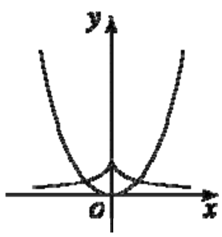
解析：原式 $\Rightarrow\log_{\frac{1}{4}}(x-1)^2>\log_{\frac{1}{4}}(2x+1)$ ；$\because 0<\frac{1}{4}<1\Rightarrow(x-1)^2<2x+1$

$\Rightarrow x^2-4x<0\Rightarrow x(x-4)<0\Rightarrow 0<x<4\cdots\cdots$①

但真數 $x-1>0$ 且 $2x+1>0\Rightarrow x>1$ 且 $x>-\frac{1}{2}\cdots\cdots$②

由①,②知 $1<x<4$

25、求方程式 $2x^2=2^{-|x|}$ 有______個相異實根。



答案：2

解析：

$$\begin{cases}y=2x^2\\ y=2^{-|x|}=\begin{cases}2^{-x}, & x\ge 0\\ 2^{x}, & x<0\end{cases}\end{cases}$$　兩圖形有 2 個相異實根。

26、設 x 的方程式 $4^x-k\cdot 2^{x+1}+(k+2)=0$ 有二個正實根，則實數 k 的範圍為______。

答案：$2\le k<3$

解析：令 $t=2^x\Rightarrow t^2-k\cdot t\cdot 2+(k+2)=0$

$\therefore t^2-2kt+(k+2)=0$ 之二根為 t_1，$t_2\Rightarrow t_1+t_2=2k$，$t_1t_2=k+2$

$\because$原 x 的方程式有二正實根，即表示 t 的方程式有大於 1 的正根

$(\because x>0$, $\therefore t=2^x>2^0=1)$

$\therefore \begin{cases}(t_1-1)+(t_2-1)>0\\(t_1-1)(t_2-1)>0\\D=(-2k)^2-4\cdot1\cdot(k+2)\ge0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2k-2>0\Rightarrow k>1\cdots\cdots①\\k+2-2k+1>0\Rightarrow k<3\cdots\cdots②\\k^2-k-2\ge0\Rightarrow k\ge2 \text{或 } k\le1\cdots\cdots③\end{cases}$

由①, ②, ③得 $2\le k<3$

27、設 α,β 爲 $100^x-7\times10^x+10=0$ 之兩根，則(1) $10^\alpha+10^\beta=$______ , (2) $\alpha+\beta=$______。

答案：(1)7　(2)1

解析：令 $t=10^x$　$\therefore t^2-7t+10=0$　$\therefore t=2$ 或 $t=5$

$\therefore 10^\alpha=2$, $10^\beta=5$　$\therefore 10^\alpha+10^\beta=7$, $10^\alpha\times10^\beta=10$　$\therefore \alpha+\beta=1$

28、解 $x^{2\log x}=\dfrac{1000}{x}$ ，則 $x=$______。

答案：10, $\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$

解析：$\log(x^{2\log x})=\log(\dfrac{1000}{x})\Rightarrow 2\log x\cdot\log x=\log1000-\log x$

令 $\log x=t$　$\therefore 2t^2=3-t$　$\therefore t=1$ 或 $-\dfrac{3}{2}$　$\therefore x=10$ 或 $\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$

29、解方程式 $2(4^x+4^{-x})-(2^x+2^{-x})-6=0$ ，則 $x=$______。

答案：±1

解析：令 $t=2^x+2^{-x}$　$\therefore t^2=4^x+4^{-x}+2$　$\therefore 2(t^2-2)-t-6=0$

$\therefore t=\dfrac{5}{2}$ 或 $t=-2$ (不合) $(\because 2^x+2^{-x}\ge2\sqrt{2^x2^{-x}}=2)$

$2^x+2^{-x}=\dfrac{5}{2}$　令 $k=2^x$　$\therefore k+\dfrac{1}{k}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow 2k^2-5k+2=0$　$\therefore k=2$ 或 $\dfrac{1}{2}$

$2^x=2$ ，$\dfrac{1}{2}$ ，　故 $x=\pm1$

31、某次實驗中培養細菌數目，1 日後增加 a 倍且已知 3 日後細菌數爲 10^6 個，$4\dfrac{1}{2}$ 日後其細菌數爲 8×10^6 個，則(1) $a=$______，(2)______日後，可使細菌達到 1.024×10^9 個。

答案：(1)3　(2)8

解析：(1)1 日後增加 a 倍　$\therefore$即增加爲 $a+1$ 倍，設原有細菌 k 個

$\therefore k\cdot(a+1)^3=10^6$ 且 $k(a+1)^{\frac{9}{2}}=8\times10^6$ ，兩式相除　$(a+1)^{\frac{3}{2}}=8$,　$\therefore a+1=4$　$\therefore a=3$

(2)又 $k\times(a+1)^n=1.024\times10^9=1024\times k(a+1)^3$, $\therefore 4^n=4^5\times(4)^3$　$\therefore n=8$

32、解 $\log_3x-6\log_x3-5=0$ ，則 $x=$______。

答案：3^6 , $\dfrac{1}{3}$

解析：令 $\log_3x=t$　$\therefore t-\dfrac{6}{t}-5=0\Rightarrow t^2-5t-6=0\Rightarrow(t-6)(t+1)=0$, $t=6$ 或 -1 , $\therefore x=3^6$ 或 $\dfrac{1}{3}$

33、(1)設 $x\in\mathbb{R}$，令 $t=2^x+2^{-x}$ ，則 t 的範圍爲______。

(2)設 $y=f(x)=(4^x+4^{-x})-3(2^x+2^{-x})+1$ 之最小值爲______。

答案：(1) $t \geq 2$　(2) -3

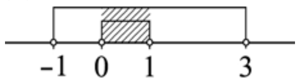
解析：(1)設 $t = 2^x + 2^{-x}$，又 $\dfrac{2^x + \frac{1}{2^x}}{2} \geq \sqrt{1}$　，　$\therefore t \geq 2$

(2) $y = (t^2 - 2) - 3t + 1 = t^2 - 3t - 1 = (t - \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4}$，但 $t \geq 2$，$\therefore$當 $t = 2$ 時，y 之最小值為 -3

34、設 $x > 0$，試解不等式：$x^{x^2-3} > (x^x)^2$。

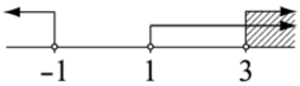
答案：$0 < x < 1$ 或 $x > 3$

解析：(1)若 $0 < x < 1$，則 $x^{x^2-3} > x^{2x} \Rightarrow x^2 - 3 < 2x$，$x^2 - 2x - 3 < 0$，$\therefore -1 < x < 3$



$\Rightarrow 0 < x < 1$........①

或(2)若 $x > 1$，則 $x^{x^2-3} > x^{2x} \Rightarrow x^2 - 3 > 2x$，$x^2 - 2x - 3 > 0$，$\therefore x > 3$ 或 $x < -1$



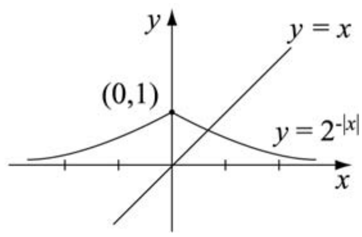
$\Rightarrow x > 3$........②

由①②可得 $0 < x < 1$ 或 $x > 3$

35、方程式 $2^{-|x|} = x$ 有幾個解？__________

答案：1

解析：



$$\begin{cases} y = x \\ y = 2^{-|x|} = \begin{cases} 2^{-x}, & x \geq 0 \\ 2^x, & x < 0 \end{cases} \end{cases}$$，

$\therefore 2^{-|x|} = x$ 有一個解

36、解方程式 $10^x - 4 \cdot 5^x - 5 \cdot 2^x + 20 = 0$。

答案：$x = 2$ 或 1

解析：$10^x - 4 \cdot 5^x - 5 \cdot 2^x + 20 = 0 \Rightarrow (2^x - 4)(5^x - 5) = 0$，$\therefore 2^x = 4$ 或 $5^x = 5$，$\therefore x = 2$ 或 1

37、設 $1 \leq x \leq 10$，求 $x^{3-2\log x}$ 的最大值與最小值。

答案：$y = x^{3-2\log x}$　$\therefore \log y = (3 - 2\log x)\log x$

令 $\log x = t$，$\log y = (3 - 2t) \cdot t = -2(t - \frac{3}{4})^2 + \frac{9}{8}$

$\because 1 \leq x \leq 10$　$\therefore 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow$　$0 \leq \log y \leq \frac{9}{8}$

$\therefore 1 \leq y \leq 10^{\frac{9}{8}}$，最大值為 $10^{\frac{9}{8}}$，最小值為 1。

38、設對任意實數 x，恆有 $(\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{2x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1}) + 1 \geq 0$，則 a 之範圍為何？

答案：$(\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{2x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1}) + 1 \geq 0 \Rightarrow (\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{2x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1}) \geq \log_{\frac{1}{3}} (\frac{1}{3})^{-1}$

對任意實數x，因爲$0<\frac{1}{3}<1$，$\frac{2x^2+ax+1}{x^2+x+1}\le 3$恆成立且真數$\frac{2x^2+ax+1}{x^2+x+1}>0$

$\frac{2x^2+ax+1}{x^2+x+1}\le 3$，$\because \forall x\in\mathbb{R}$，$x^2+x+1>0$恆成立 ($\because D<0$)

$2x^2+ax+1\le 3(x^2+x+1)\Rightarrow$移項$2x^2+ax+1>0$恆成立

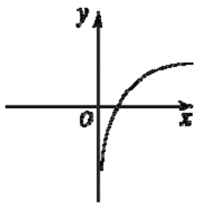
$\therefore D=a^2-8<0\quad \therefore -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$ ………①

又$x^2+(3-a)x+2\ge 0$恆成立

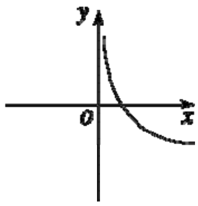
$\therefore D=(3-a)^2-8\le 0\quad \therefore 3-2\sqrt{2}\le a\le 3+2\sqrt{2}$ ………②

由①②　$3-2\sqrt{2}\le a<2\sqrt{2}$

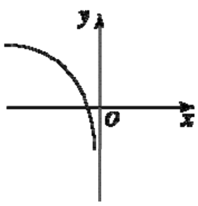
39、



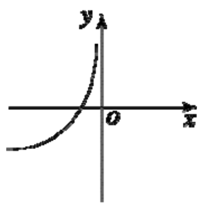
圖(一)



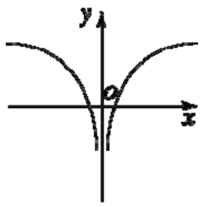
圖(二)



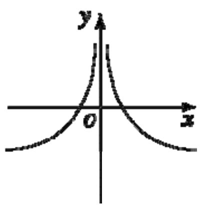
圖(三)



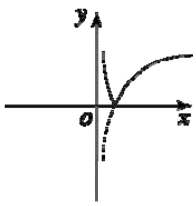
圖(四)



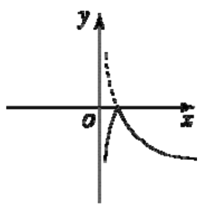
圖(五)



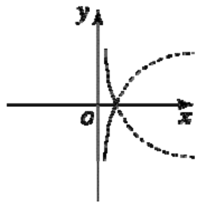
圖(六)



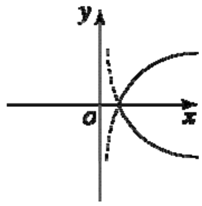
圖(七)



圖(八)



圖(九)



圖(十)

設$y=\log_a x$的圖形爲圖(一)，則

(1) $y=\log_a|x|$的圖形爲_____。　　(2) $y=-|\log_a x|$的圖形爲_____。

(3) $y=\log_{\frac{1}{a}}(-x)$的圖形爲_____。　　(4) $|y|=\log_a x$的圖形爲_____。

$\boxed{\text{答案}}$：(1) 圖(五)　(2) 圖(八)　(3) 圖(四)　(4) 圖(十)

$\boxed{\text{解析}}$：(1) $y=\log_a x$的圖形爲圖(一)

當$x>0$時$y=\log_a x$，當$x<0$時$y=\log_a(-x)$，對稱y軸，$\therefore y=\log_a|x|$的圖形爲圖(五)

(2) 當$\log_a x>0$時$y=-\log_a x$，當$\log_a x<0$時$y=\log_a x$，$\therefore y=-|\log_a x|$之圖形爲圖(八)

(3) $y=\log_{\frac{1}{a}}(-x)=-\log_a(-x)$是$y=\log_a x$以原點爲中心的對稱圖形，故其圖形爲圖(四)

(4) $|y|=\log_a x\quad \therefore \log_a x>0$，若$y>0$，則$y=\log_a x$

若$y<0$，則$y=-\log_a x$，故其圖形爲圖(十)