高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：97.10.09					
範圍	Book1 3 多項式(2)	班級	三年　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(B) 下列那一個不等式，其解集合非「無解」？

(A) $x^2+6x+10<0$ (B) $x^2+2x\le -1$ (C) $-x^2+8x>16$ (D) $-x^2+3x-5\ge 0$ (E) $-2x^2+x>5$

解析：(A) $(x+3)^2+1<0$　無解

(B) $(x+1)^2\le 0\Rightarrow x=-1$

(C) $-(x-4)^2>0$　無解

(D) $D=9-20=-11<0$　$\therefore -x^2+3x-5\ge 0$　無解

(E) $D=1-40=-39<0$　$\therefore -x^2+x>5$　無解

2、(C) 下列各方程式中，何者沒有整數解？ (A) $x^{2n+1}+1=0$ (B) $x^{2n+1}-1=0$ (C) $x^{2n}+1=0$

(D) $x^{2n}-1=0$ (E) $x^{2n+1}+x^{2n}+...+x+1=0$

解析：由牛頓定理知以下方程式若有有理根必爲整數根，且只有±1二種可能

(A) $(+1)^{2n+1}+1\ne 0$ $(-1)^{2n+1}+1=0$ 有整數解

(B) $(1)^{2n+1}-1=0$ 有整數解

(C) $(1)^{2n}+1\ne 0$ $(-1)^{2n}+1\ne 0$ 沒有整數解

(D) $1^{2n}-1=0$ 有整數解

(E) $(-1)^{2n+1}+(-1)^{2n}+\cdots+(-1)+1=0$ 有整數解

3、(B) 若 x^4+ax^2+bx+c 除以 $(x+1)(x+2)(x-3)$ 的餘式爲 x^2-x+5，求 $a+b+c=$？ (A)8 (B)–8

(C)4 (D)–4 (E)0

解析：$\because \begin{cases} f(-1)=7=1+a-b+c \\ f(-2)=11=16+4a-2b+c \\ f(3)=11=81+9a+3b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=-7 \\ c=5 \end{cases}$

$\therefore a+b+c=-6-7+5=-8$。

4、(D) 解不等式 $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\ge 0$ 之解爲 (A) $x\ge 3$ 或 $2\ge x\ge 1$ (B) $x\ge 3$ 或 $x\le 1$

(C) $1\le x\le 3$ (D) $x\ge 3$ 或 $x=2$ 或 $x\le 1$ (E) $3\ge x\ge 2$ 或 $x\le 1$

解析：$(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\ge 0\Rightarrow (x-1)(x-3)\ge 0$ 且 $x=2\Rightarrow x\ge 3$ 或 $x=2$ 或 $x\le 1$

5、(B) 關於方程式 $x^5+6x^4+12x^3+13x^2+8x+2=0$ 下列何者正確？ (A)恰有一實根 (B)恰有一有理根 (C)恰有一正根 (D)恰有一負根 (E)在 -2 與 -3 之間恰有一實根

解析：係數皆正，無正根，又 $x^5+6x^4+12x^3+13x^2+8x+2=(x+1)(x^4+5x^3+7x^2+6x+2)$

令 $g(x)=x^4+5x^3+7x^2+6x+2,$　且 $g(-3)=-7, g(-4)=26, g(-5)=147,$

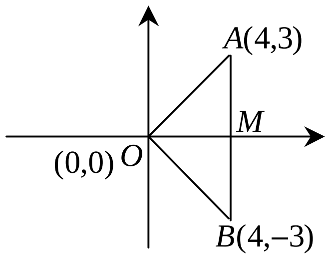
故 $g(x)$ 在 0 與 -1 之間，及 -3 與 -4 之間各有一實根，

又 $x^5+6x^4+12x^3+13x^2+8x+2=(x^2+x+1)(x^2+4x+2)(x+1)$

6、(C) 設一元二次整係數方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有一根爲 $4+3i$。若將此方程式的兩根與原點在複數平面上標出，則此三點所圍成的三角形面積爲 (A)5 (B)6 (C)12 (D)16 (E)24

解析：①$\because a, b, c$ 爲實係數，$\Rightarrow$ $4-3i$ 亦爲 $ax^2+bx+c=0$ 之一根

②



面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OM}$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 4$

$=12$

7、(A) 對於任意實數 x，$\dfrac{2x^2+kx+3k}{x^2+2x+3}>1$ 恆成立，則 k 之值不可以為下列何數？

(A)15 (B)12 (C)9 (D)6 (E)3

解析：$\because x^2+2x+3>0$ 恆成立 $(D=4-4\times 3=-8<0)$

$\therefore 2x^2+kx+3k>x^2+2x+3$ 恆成立

$\therefore x^2+(k-2)x+(3k-3)>0$ 恆成立

$\therefore D=(k-2)^2-4\times 3\times(k-1)<0 \Rightarrow k^2-16k+16<0$

$8-4\sqrt{3}<k<8+4\sqrt{3}$ $\therefore k=15$ (不合)

8、($^{AB}_{E}$) (複選)關於三次多項式 $f(x)=x^3-6x^2+1$，試問下列哪些敘述是正確的？

(A) $f(x)=0$ 有實根落在 0 與 1 之間 (B) $f(x)=0$ 有實根大於 1

(C) $f(x)=0$ 有實根小於 -1 (D) $f(x)=0$ 有實根也有虛根 (E) $f(x)=10$ 有實數解

解析：(A) $f(0)=1>0,\ f(1)=-4<0$，故 $f(x)=0$ 有實根落在 0 與 1 之間。

(B) $f(1)=-4<0,\ f(6)=1>0$，故 $f(x)=0$ 有實根大於 1。

(C) $f(x)=(x+1)(x^2-7x+7)-6$

當一實數 $r<-1$ 時，必有 $r+1<0$ 且 $r^2-7r+7>0$

使得 $f(r)=\underbrace{(r+1)}_{(負)}\underbrace{(r^2-7r+7)}_{(正)}-6<0$

即小於 -1 的實數 r 會使 $f(r)<0$，而不會使 $f(r)=0$，故 $f(x)=0$ 沒有比 -1 小的實根。

(D)三次方程式 $f(x)=0$ 有三個複數根，今已知 0 與 1 之間有一根，1 以上也有一根，那麼剩下的第三個根必為實數，不可能為虛數，因為實數係數多項方程式的虛根成對出現。

(E)因為 $f(x)=10$，即 $f(x)-10=0$ 是一個實數係數三次方程式，次數為奇數，所以至少有一實數解。

9、($^{AC}_{E}$) (複選)學生練習計算三次多項式 $f(x)$ 除以一次多項式 $g(x)$ 的餘式。已知 $f(x)$ 的三次項係數為 3 ，一次項係數為 2 。甲生在計算時把 $f(x)$ 的三次項係數錯看成 2 （其它係數沒看錯），乙生在計算時把 $f(x)$ 的一次項係數錯看成 -2（其它係數沒看錯）。而甲生和乙生算出來的餘式剛好一樣。試問 $g(x)$ 可能等於以下哪些一次式？ (A)x (B) $x-1$ (C) $x-2$ (D) $x+1$ (E) $x+2$

解析：設正確的 $f(x)=3x^3+bx^2+2x+d$ ，則

甲眼中的 $f_1(x)=2x^3+bx^2+2x+d$ ，

乙眼中的 $f_2(x)=3x^3+bx^2-2x+d$ 。

(1)若 $g(x)=x$ ，則甲算出的餘式 $=f_1(0)=d$,乙算出的餘式 $=f_2(0)=d$

(2)若 $g(x)=x-1$，則甲算出的餘式 $=f_1(1)=2+b+2+d=4+b+d$,

乙算出的餘式 $=f_2(1)=3+b-2+d=1+b+d$

(3)若 $g(x)=x-2$ ，則甲算出的餘式 $=f_1(2)=16+4b+4+d=20+4b+d$,

乙算出的餘式$=f_2(2)=24+4b-4+d=20+4b+d$

(4)若 $g(x)=x+1$，則甲算出的餘式$=f_1(-1)=-2+b-2+d=-4+b+d$,

乙算出的餘式$=f_2(-1)=-3+b+2+d=-1+b+d$

(5)若 $g(x)=x+2$ ，則甲算出的餘式$=f_1(-2)=-16+4b-4+d=-20+4b+d$,

乙算出的餘式$=f_2(-2)=-24+4b+4+d=-20+4b+d$

10、(C) 若 $f(x)=x^3+ax^2+4x-7$ 與 $g(x)=x^2+bx+5$ 之最高公因式為整係數一次式且 $a,b\in\mathbb{N}$ ，則 $a+2b=$？ (A)18 (B)20 (C)24 (D)28 (E)30

$\boxed{\text{解析}}$： $f(x)$ 與 $g(x)$ 可能的一次因式為 $x\pm1$

(1)若 $(f(x),g(x))=x-1, g(1)=0\Rightarrow b=-6$（不合）

二、填充題 (每題 10 分)

1、 設 $f(x)=x^2-(m+2)x+(5-m)$ 在 $0<x<2$ 時 $f(x)<0$ 恆成立，則 m 的範圍_______。

$\boxed{\text{答案}}$： $m\geq5$

$\boxed{\text{解析}}$： $\because f(x)$ 二次函數，開口向上

$\because$ 在 $0<x<2$ 時 $f(x)<0\Rightarrow f(0)\leq0$ 且 $f(2)\leq0$

$\therefore 5-m\leq0$ 且 $5-3m\leq0\Rightarrow m\geq5$

2、 設 $f(x)=-x^2+(a+1)x+2,\ a\in\mathbb{R}$，若方程式 $f(x)=0$ 。有一根在 -1 與 0 之間，另一根在 2 與 3 之間則 a 的範圍為_______。

$\boxed{\text{答案}}$： $0<a<\dfrac{4}{3}$

$\boxed{\text{解析}}$：由勘根定理知 $\because f(-1)\cdot f(0)<0$ 且 $f(2)\cdot f(3)<0$

$f(0)=2>0, \therefore f(-1)=-a-2+2<0\Rightarrow a>0$ ………①

$f(2)=-4+2a+2+2=2a>0$

$\therefore f(3)=-9+3a+3+2<0\ \Rightarrow a<\dfrac{4}{3}$ ………②

由①②$\Rightarrow 0<a<\dfrac{4}{3}$

3、 設集合 $A=\{x\,|\,x^2+x-6<0, x\in\mathbb{Z}\}$，集合 $B=\{x\,|\,2x^2-(3+2a)x+3a>0, x\in\mathbb{Z}\}$ 且 $A\cap B=\{-2\}$ ，則 a 範圍為______________。

$\boxed{\text{答案}}$： $-2<a\leq-1$

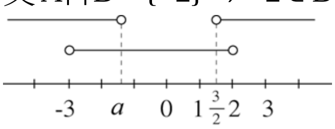
$\boxed{\text{解析}}$： $x^2+x-6<0\Rightarrow(x+3)(x-2)<0\Rightarrow-3<x<2$ ，即 $A=\{x\,|\,-3<x<2, x\in\mathbb{Z}\}$

$2x^2-(3+2a)x+3a>0\Rightarrow(2x-3)(x-a)>0$ ，即 $B=\{x\,|\,(2x-3)(x-a)>0, x\in\mathbb{Z}\}$

①若 $a>\dfrac{3}{2}\Rightarrow B=\{x\,|\,x>a, x<\dfrac{3}{2}, x\in\mathbb{Z}\}$ ， $A\cap B=\{1,0,-1,-2\}$ (不合)

②若 $a<\dfrac{3}{2}\Rightarrow B=\{x\,|\,x>\dfrac{3}{2}, x<a, x\in\mathbb{Z}\}$ ，

又 $A\cap B=\{-2\}\Rightarrow-2\in B$



$\therefore -2<a\leq-1$

4、 $f(x)=3x^{123}-7x^{12}+5x^{2}-8$ 則 $x+1$ 除 35、多項式 $f(x)$ 的各項係數和爲 11，且 $f(x)$ 除以 $x+2$ 得商式 $q(x)$, 餘式爲 5，則 $q(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式爲________ 。

$\boxed{\text{答案}}$：2

$\boxed{\text{解析}}$： $f(1)=11,\ f(x)=(x+2)q(x)+5$ ，$\therefore f(1)=3q(1)+5\Rightarrow q(1)=2$

$q(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式爲 $q(1)=2$

5、 設 $-1+\sqrt{2}i$ 爲實係數方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 之一根，若此方程式與方程式 $x^2+ax-2=0$ 恰有一個公根，則 $a=$________， $b=$________， $c=$________。

$\boxed{\text{答案}}$：1, 1, −3

$\boxed{\text{解析}}$： $x=-1+\sqrt{2}i\Rightarrow x+1=\sqrt{2}i\Rightarrow(x+1)^2=(\sqrt{2}i)^2\Rightarrow x^2+2x+3=0,\ \therefore x^2+2x+3\,\big|\,x^3+ax^2+bx+c$

設恰有一公根爲 $x=\alpha$ ，即 x^3+ax^2+bx+c 與 x^2+ax-2 之最高公因式爲 $x-\alpha$

$\therefore(x-\alpha)\,\big|\,(x^3+ax^2+bx+c)$ ， $(x-\alpha)\,\big|\,x^2+ax-2$

$\Rightarrow(x-\alpha)\,\big|\,x^3+ax^2+bx+c-x(x^2+ax-2)$ ，$\therefore(x-\alpha)\,\big|\,(b+2)x+c$

$\dfrac{b+2}{1}=\dfrac{c}{-\alpha}\ \Rightarrow\alpha=\dfrac{-c}{b+2}$ 代入 $x^2+ax-2=0$ ，得 $c^2-ac(b+2)-2(b+2)^2=0$ …..(*)

又$\because x^2+2x+3\,\big|\,x^3+ax^2+bx+c$

$$\begin{array}{llll|l}
1 & +a & +b & +c & \\
 & -2 & -2(a-2) & & -2 \\
 & & -3 & -3(a-2) & -3 \\
\hline
1 & +(a-2) & +[(b-3)-2(a-2)] & +[c-3(a-2)] &
\end{array}$$

由整除得知 $\Rightarrow b-3=2(a-2), c=3(a-2)$

代入(*) $\Rightarrow 6a^3-10a^2+38a-34=0$ ，解之 $(a-1)(3a^2-2a+17)=0$, $a=1, b=1, c=-3$

6、 解不等式： $(x-1)^6(x^2-x+3)(x+2)(x-3)<0$ ___________ 。

$\boxed{\text{答案}}$： $-2<x<3$ ，但 $x\neq1$

$\boxed{\text{解析}}$：

$(x-1)^6\geq0, x^2-x+3>0$ 恆成立($\because D<0$)

所求 $(x+2)(x-3)<0$ ，但 $x\neq1\Rightarrow -2<x<3$ ，但 $x\neq1$

7、 設 $f(x)$ 爲四次多項式，若 $f(x)$ 除以 $(x-2)^3$ 得餘式 $4x-5$， $f(x)$ 除以 $x+1$ 得餘式 18， $f(x)$ 除以 $x+2$ 得餘式 179，則 $f(2)=$________ ，又 $f(1)=$________。

$\boxed{\text{答案}}$：3, −4

$\boxed{\text{解析}}$： $f(x)$ 爲四次多項式 $\Rightarrow$ 設 $f(x)=(x-2)^3\cdot(ax+b)+4x-5$ ，

$\therefore f(2)=3$ ，又 $f(-1)=18\quad f(-2)=179$

$\therefore\begin{cases}18=-27(-a+b)-9\\179=-64(-2a+b)-13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=1\\2a-b=3\end{cases}$ ， $a=2$， $b=1$ ，$\therefore f(1)=(-1)(3)+4-5=-4$

8、 $\triangle ABC$ 之三邊長分別爲 $x-1,\ 2x-1,\ x+1$ ，則(1) x 的範圍爲________________ 。

又(2)若 $\triangle ABC$ 爲鈍角△，且最長的邊爲 $2x-1$，則 x 的範圍爲______________ 。

$\boxed{\text{答案}}$：(1) $x>\dfrac{3}{2}$, $x>\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

解析：

(1)由三角不等式(兩邊之和大於第三邊)

$$\because \begin{cases} x-1+2x-1>x+1 \\ 2x-1+x+1>x-1 \Rightarrow x>\dfrac{3}{2} \\ x+1+x-1>2x-1 \end{cases}$$

(2)若為鈍角△，則 $(2x-1)^2>(x+1)^2+(x-1)^2$ ，$\therefore 2x^2-4x-1>0$

$\therefore x>\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$ 或 $x<\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}$ $\quad \Rightarrow x>\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

(不合)($\because x>\dfrac{3}{2}$)

9、 已知 $f(x)=x^4+4x^3-32x-13=0$ 有一根 $-3-2i$，則 $f(x)=0$ 之所有根為________________。

答案：$-3\pm 2i,\ 1\pm\sqrt{2}$

解析：

令 $x=-3-2i \Rightarrow x+3=-2i$ ；兩邊平方 $x^2+6x+9=-4$ ，$x^2+6x+13=0$

$x^2+6x+13 \mid f(x) \Rightarrow$ 由綜合除法得知 $f(x)=(x^2+6x+13)(x^2-2x-1)$ ，

$\therefore f(x)=0$ 之根為：$-3\pm 2i,\ 1\pm\sqrt{2}$ 。

10、若 a 為實數，且 $f(x)=x^4+x^3+2ax^2-3x-a=0$

(1)若在區間 (0, 1) 及(−2,−1)間各有一根，求 a 之範圍____________。

又(2)若 $f(5+2i)=7$ ，則 $f(5-2i)=$____________。

答案：(1)$-3<a<-2$； (2)7

解析：

(1) 在區間 (0, 1) 及(−2,−1)間各有一根 $\Rightarrow f(0)f(1)<0,\ f(-2)f(-1)<0$

$$\begin{cases} (-a)(a-1)<0 \\ (a+2)(a+3)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>1,\ a<0 \\ -3<a<-2 \end{cases} \Rightarrow -3<a<-2$$

(2) $f(5-2i)=f(\overline{5+2i})=\overline{f(5-2i)}=\overline{7+0i}=7-0i=7$

11、設 a, b 為實數，若方程式 $x^4-8x^3+ax^2+bx-13=0$ 有一根 $2+3i$。

(1)求 a, b 之值。(2)解方程式 $x^4-8x^3+ax^2+bx-13=0$ 。

答案：(1) $a=28$；$b=-48$ (2)$x=2\pm 3i,\ 2\pm\sqrt{5}$

解析：

(1)令 $x=2+3i \Rightarrow x-2=3i$ ；兩邊平方 $x^2-4x+4=-9$ ，$x^2-4x+13=0$

設 $f(x)=x^4-8x^3+ax^2+bx-13$ ，則 $x^2-4x+13 \mid f(x)$ 由綜合除法整除知

$$\begin{array}{lllll|l} 1 & -8 & +a & +b & -13 & \\ & +4 & -16 & +4(a-29) & & +4 \\ & & -13 & +52 & -13(a-29) & -13 \\ \hline 1 & -4 & +(a-29) & +(b+4a-64) & +(-13a+364) & \end{array}$$

$$\begin{cases} b+4a-64=0 \\ -13a+364=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=28 \\ b=-48 \end{cases}$$ ，即 $f(x)=x^4-8x^3+28x^2-48x-13$

(2) $f(x)=0 \Rightarrow (x^2-4x+13)(x^2-4x-1)=0$ ，$x=2\pm 3i,\ 2\pm\sqrt{5}$ 。

12、若對於一切實數 x，恆有 $ax^2+3x+(a+4)<0$ 則實數 a 的範圍爲________。

答案：$a<-\dfrac{9}{2}$

解析：

$ax^2+3x+(a+4)<0$ 恆成立

$\therefore \begin{cases} a<0 \\ D=9-4a(a+4)<0 \Rightarrow (2a-1)(2a+9)>0 \Rightarrow a>\dfrac{1}{2} \text{ 或 } a<-\dfrac{9}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow a<-\dfrac{9}{2}$

13、設多項式 $f(x)$ 被 x^2-1 除後的餘式爲 $3x+4$，並且已知 $f(x)$ 有因式 x，若 $f(x)$ 被 $x(x^2-1)$ 除後的餘式爲 px^2+qx+r，則 $(p,q,r)=$__________。

答案：$(4,3,0)$

解析：

設 $f(x)=x(x^2-1)\cdot q(x)+a(x^2-1)+3x+4$， $f(0)=-a+4=0 \Rightarrow a=4$

$\therefore$ 餘式 $=4x^2+3x=px^2+qx+r$　　故 $(p,q,r)=(4,3,0)$。

14、解不等式 $\dfrac{x-2}{x-3}>\dfrac{x+2}{x+5}$。

答案：$x>3$ 或 $-5<x<1$

解析：由 $\dfrac{x-2}{x-3}>\dfrac{x+2}{x+5} \Rightarrow \dfrac{x-2}{x-3}-\dfrac{x+2}{x+5}>0 \Rightarrow \dfrac{(x-2)(x+5)-(x+2)(x-3)}{(x-3)(x+5)}>0 \Rightarrow \dfrac{4(x-1)}{(x-3)(x+5)}>0$，

$(x+5)(x-1)(x-3)>0 \Rightarrow x>3$ 或 $-5<x<1$。

15、設 $f(x)=x^2+4mx+5m-1$ 當 $0\le x\le 2$ 時 $f(x)>0$ 恆成立，求實數 m 的範圍。

答案：

解析：

$f(x)=(x+2m)^2-4m^2+5m-1$

(1) $-2m>2$　$\therefore f(2)>0 \Rightarrow m<-1$ 且 $13m+3>0 \Rightarrow$ 無解

(2) $0\le -2m\le 2,\ -4m^2+5m-1>0 \Rightarrow 0\ge m\ge -1$ 且 $\dfrac{1}{4}\le m\le 1 \Rightarrow$ 無解

(3) $-2m<0,\ f(0)>0 \Rightarrow m>0$ 且 $5m-1>0 \Rightarrow m>\dfrac{1}{5}$

16、試造一最低次之有理係數方程式，使其有一根爲 $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$。

答案：

解析：

令 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$，則 $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}i$

$\Rightarrow (x-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3}i)^2 \Rightarrow x^2-2\sqrt{2}x+2=-3$

$\Rightarrow x^2+5=2\sqrt{2}x \Rightarrow (x^2+5)^2=8x^2 \Rightarrow x^4+10x^2+25=8x^2$，故 $x^4+2x^2+25=0$。

17、設 $f(x)=x^3-3x^2-2x+5$，若 $g(x-1)=f(x),h(x-1)=f(x+2)$，試求出多項式 $g(x)$ 及 $h(x)$。

答案：

解析：(1) $\because g(x-1)=f(x)$

解法 I

由 $f(x)=x^3-3x^2-2x+5$ 連續綜合除法(變數變換)

$\Rightarrow f(x)=(x-1)^3-5(x-1)+1$

$\therefore g(x)=x^3-5x+1$

$$\begin{array}{l|l}
1-3-2+5 & 1 \\
\quad +1-2+4 & \\
\hline
1-2-4 & +1 \\
\quad +1-1 & \\
\hline
1-1 & -5 \\
\quad +1 & \\
\hline
1+0 &
\end{array}$$

解法 II

$g(x-1)=f(x)$

$\therefore g(x)=f(x+1)=(x+1)^3-3(x+1)^2-2(x+1)+5=x^3-5x+1$

(2) $f(x)=x^3-3x^2-2x+5$ 連續綜合除法(變數變換)

$\Rightarrow f(x)=(x-3)^3+6(x-3)^2+7(x-3)-1$

$\because h(x-1)=f(x+2)\Rightarrow f(x)=h(x-3)$

$\therefore h(x)=x^3+6x^2+7x-1$

$$\begin{array}{l|l}
1-3-2+5 & 3 \\
\quad +3-0-6 & \\
\hline
1+0-2 & -1 \\
\quad +3+9 & \\
\hline
1+3 & +7 \\
\quad +3 & \\
\hline
1+6 &
\end{array}$$

18、設 $f(x)=x^2+(k+1)x-2k$，$g(x)=x^2+(k-1)x+(6-2k)$ 已知 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式 $H(x)$ 爲一次式，則 $H(x)=$________，又 $k=$________。

答案：$x-3,-12$

解析：

$H(x)\mid f(x),\quad H(x)\mid g(x)\Rightarrow H(x)\big|f(x)-g(x)$

$\therefore H(x)\big|2x-6$　，取 $H(x)=x-3$　，$(x-3)\mid f(x)\Rightarrow f(3)=0$　，$\therefore k=-12$

19、設多項式 $f(x)=2x^4+9x^3+6x^2-11x-3$，$g(x)=3x^4+x^3-9x^2+3x+4$，有一實數 α 使 $f(\alpha)=3$ 且 $g(\alpha)=2$，則 α 之值可爲______或______。

答案：1, -2

$\boxed{\text{解析}}$：

$\because f(\alpha)=3 \quad \therefore (x-\alpha)\big| f(x)-3$ 同理 $(x-\alpha)\big| g(x)-2$

$\because HCF(\ f(x)-3, g(x)-2\ ) = (x-1)(x+2) \Rightarrow (x-\alpha) \mid (x-1)(x+2)$，

又 $f(x)-3=(x-1)(x+2)(x+3)(2x+1)$

$g(x)-2=(x-1)(x+2)(x-1)(3x+1)$

$\therefore \alpha = 1$或-2

20、利用輾轉相除法，求 $f(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$，$g(x)=x^4-x^3+3x^2-x+2$ 的最高公因式_____。

$\boxed{\text{答案}}$：x^2+1

$\boxed{\text{解析}}$：

1	1 + 1 + 2 + 1 + 1	1 − 1 + 3 − 1 + 2	
	1 − 1 + 3 − 1 + 2	× 2	
−2	2 − 1 + 2 − 1	2 − 2 + 6 − 2 + 4	1
	2 − 8 + 2 − 8	2 − 1 + 2 − 1	
	7)7 + 0 + 7	− 1 + 4 − 1 + 4	−1
	1 + 0 + 1	− 1 + 0 − 1	
		4 + 0 + 4	4
		4 + 0 + 4	
		0	

$\therefore \text{hcf} = x^2+1$

21、若兩多項式 $f(x)=2x^3-4x^2+2x+(2c+4)$ 與 $g(x)=3x^3-6x^2+2x+(3c+5)$ 的最高公因式爲一次式，則 c 之值爲________。

$\boxed{\text{答案}}$：2

$\boxed{\text{解析}}$：

設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式爲 $h(x)$，則

$h(x)\big| f(x)=2x^3-4x^2+2x+(2c+4)$

$h(x)\big| g(x)=3x^3-6x^2+2x(3c+5)$

$h(x)\big| 3f(x)-2g(x)=2x+2=2(x+1) \Rightarrow h(x)=x+1$

$(x+1) \mid f(x) \Rightarrow f(-1)=-2-4-2+2c+4=0$，$2c=4, c=2$。

22、$f(x)$，$g(x)$ 爲兩整係數多項式，其最低公倍式爲 $x^4+x^3-4x^2+2x-12$，最高公因式爲 $x+3$ 且知 $\deg f(x) > \deg g(x)$，則 $f(x)=$________，$g(x)=$________。

$\boxed{\text{答案}}$：$f(x)=x^3+3x^2+2x+6$，$g(x)=x^2+x-6$

$\boxed{\text{解析}}$：設 $f(x)=\text{hcf}\times h(x), \quad g(x)=\text{hcf}\times k(x) \Rightarrow \text{lcm}=\text{hcf}\times h(x)\times k(x)$

$$\begin{array}{r|ll} \text{hcf} & f(x) & g(x) \\ \hline & h(x) & k(x) \Leftarrow (h(x),k(x))=1 \end{array}$$

$h(x)k(x)=\dfrac{\text{lcm}}{\text{hcf}}=x^3-2x^2+2x-4=(x-2)(x^2+2)$

$\because \deg f(x) > \deg g(x)$，取 $h(x)=(x^2+2), k(x)=(x-2)$

$\therefore f(x)=(x+3)(x^2+2)=x^3+3x^2+2x+6$，$g(x)=(x+3)(x-2)=x^2+x-6$

23、求 $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ 與 $g(x)=x^3-x^2+4x-12$ 的最高公因式為________，最低公倍式為_____________________。

$\boxed{\text{答案}}$：$x-2$ ； $(x-2)(x+5)(x+1)(x^2+x+6)$

$\boxed{\text{解析}}$：利用輾轉相除法

1	$1+4-7-10$	$1-1+4-12$	
	$1-1+4-12$	$\times$ 5	
5	$5-11+2$	$5-5+20-60$	1
	$5+15-50$	$5-11+2$	
-26	$-26+52$	6 $\;6+18-60$	
	$1-2$	$1+3-10$	$1+5$
		$1-2$	
		$5-10$	
		$5-10$	
		0	

$\therefore (f(x), g(x)) = x-2$

$$[f(x), g(x)] = \frac{f(x)\cdot g(x)}{x-2} = \frac{f(x)\cdot(x-2)(x^2+x+6)}{x-2} = (x-2)(x+5)(x+1)(x^2+x+6)$$ 。

24、$k\in\mathbb{R}$，多項式 $f(x)=x^3+2x^2-x-2$，$g(x)=x^3+(k+2)x^2+(k^2-5)x+6$，

(1)若 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式為一次式時，$k=$________，

(2)若 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式 $H(x)$ 為二次式時，$k=$_______，此時 $H(x)=$_______。

$\boxed{\text{答案}}$：(1) $-2,-3$ (2) $4,(x+1)(x+2)$

$\boxed{\text{解析}}$：

$f(x)=(x+1)(x-1)(x+2)$

$g(-2)=-2k^2+4k+16=-2(k-4)(k+2)$

$g(-1)=-k^2+k+12=-(k-4)(k+3)$

$g(1)=k^2+k+4=(k+\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4}>0$

$\therefore$當 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式為一次時 $k=-2$ 或 -3

又當 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式為二次時 $k=4$，且 $H(x)=(x+1)(x+2)$

25、已知 $f(x)=x^3+ax^2-2x-4$，$g(x)=4x^3+x^2-2a^2x-2$ 最高公因式 $H(x)$ 為二次式，則 $a=$________，又 $H(x)=$________。

$\boxed{\text{答案}}$：$2, x^2-2$

$\boxed{\text{解析}}$：$H(x)=\text{hcf}(g(x), f(x)) \Rightarrow H(x) \mid (4a-1)x^2+(2a^2-8)x-14$

$H(x) \mid 7x^3+(2-a)x^2+(2-4a^2)x$ ，$\because x \nmid H(x)$

$\therefore \frac{4a-1}{7}=\frac{2a^2-8}{2-a}=\frac{-14}{2-4a^2}$， $\therefore a=2$或$-\frac{3}{2}$(不合) $\Rightarrow H(x)=x^2-2$

26、求 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ 與 $g(x)=x^3-8x^2+19x-12$ 之最低公倍式。(不必展開)

$\boxed{\text{答案}}$：$(x-4)(x^3-6x^2+11x-6)$

$\boxed{\text{解析}}$：由輾轉相除法可求得 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之最高公因式為 x^2-4x+3， $f(x)$ 與 $g(x)$ 之最低公倍式為 $\dfrac{(x^3-6x^2+11x-6)(x^3-8x^2+19x-12)}{x^2-4x+3}=(x-4)(x^3-6x^2+11x-6)$ 。