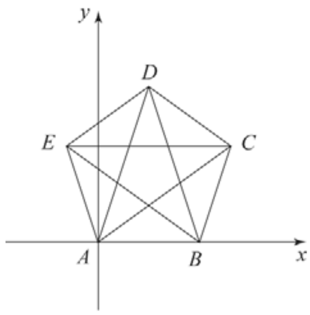
高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：97.09.18					
範圍	Book1 1-3、4 直線與複數	班級	三年 班	姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

1、(B) $z\in\mathbb{C}$，若 $z=\frac{1+iz}{3+2i}$，則 $z=$ (A)$\frac{1-i}{4}$ (B)$\frac{3-i}{10}$ (C)$\frac{1-i}{6}$ (D)$\frac{3+i}{10}$ (E)無解

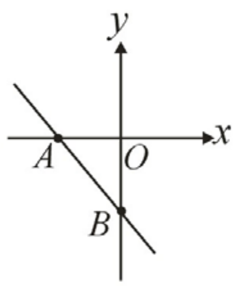
解析：$z=\frac{1+iz}{3+2i}, \therefore (3+2i)z=iz+1$, 整理後 $(3+i)z=1\Rightarrow z=\frac{1}{3+i}=\frac{3-i}{10}$



2、(C) 如圖，正五邊形 $ABCDE$ 有 5 條對角線，其中何者斜率最小？
(A) $\overline{AC}$ (B) $\overline{AD}$ (C) $\overline{BD}$ (D) $\overline{BE}$ (E) $\overline{CE}$

解析：左上至右下，斜率為負，且愈傾斜負的愈多，斜率愈小，則斜率最小者為 $\overline{BD}$

3、(A) 設 $ab>0,\ ac<0$ 則直線 $ax+by=c$ 不通過
(A)第一 (B)第二 (C)第三 (D)第四 象限

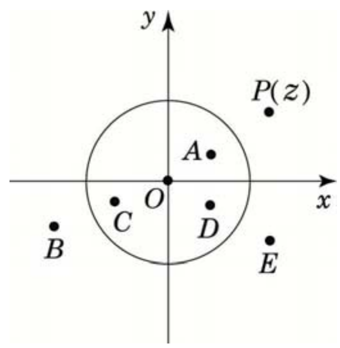


解析：

$ax+by=c$

x	$\frac{c}{a}$	0
y	0	$\frac{c}{b}$

交 x, y 兩軸分別於 $A(\frac{c}{a},0), B(0,\frac{c}{b})$，$\because ab>0,\ ac<0\ \therefore \frac{c}{a}<0,\ \frac{c}{b}<0$ 不通過第一象限。



4、(D) 如圖，複數 z 在平面上對應的點 P 在單位圓 O 的外部，問複數 $\frac{1}{z}$ 對應的點大概是哪一點？ (A)A (B)B (C)C (D)D (E)E

解析：$z=a+bi, a,b>0$，$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$，
其中 $\frac{a}{a^2+b^2}>0,\ -\frac{b}{a^2+b^2}<0$，$\frac{1}{z}$ 的對應點在第四象限
$|z|>1\Rightarrow \frac{1}{|z|}<1\Rightarrow \frac{1}{z}$ 的對應點在圓之內部，故選 D 點。

5、(C) 令 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 則以下何者錯誤？
(A) $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ (B) $1+\omega+\omega^2=0$ (C) $\omega(\omega+1)=1$ (D) $\omega^3=1$ (E) $2\omega+\omega^2=-2-\omega^2$

解析：1 的立方根 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\Rightarrow \omega^2=\overline{\omega}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1,\quad \therefore 1+\omega+\omega^2=0$
$\therefore \omega(\omega+1)=\omega^2+\omega=-1$

6、(CE) (複選)平面上有一個直角三角形，其三邊的斜率為實數m_1, m_2, m_3，並假設$m_1 > m_2 > m_3$。則下列選項哪些必定為真？

(A)$m_1m_2 = -1$　(B)$m_1m_3 = -1$　(C)$m_1 > 0$　(D)$m_2 \le 0$　(E)$m_3 < 0$

解析：直角三角形，其三邊的斜率為實數$m_1, m_2, m_3 \Rightarrow$有$m_1 \cdot m_2 = -1$,或$m_1 \cdot m_3 = -1$或$m_2 \cdot m_3 = -1$

又$m_1 > m_2 > m_3$

(1) $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_1 > 0, m_2 < 0, m_3 < 0$

(2) $m_1 \cdot m_3 = -1 \Rightarrow m_1 > 0, m_3 < 0$ ，

(3) $m_2 \cdot m_3 = -1 \Rightarrow m_1 > 0, m_2 > 0, m_3 < 0$ ，

由以上可知，$m_1 > 0$且$m_3 < 0$，

7、(DE) (複選)設$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$，則下列何者為真？

(A)$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ 且 $\beta = 0$　(B)$\alpha + \beta > 0$ 且 $\alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$ 且 $\beta > 0$

(C)$\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \gamma$ 且 $\beta = \delta$　(D)$\alpha\beta \ne 0 \Leftrightarrow \alpha \ne 0$ 且 $\beta \ne 0$

(E)$\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 且 $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ 且 $\beta = 0$

解析：(A)（╳）：反例，$\alpha = i, \beta = 1$。

(B)（╳）：反例，$\alpha = 1 + i, \beta = 1 - i$。

(C)（╳）：反例，$\alpha = 2i, \beta = 1, \gamma = 3i, \delta = 0$。

(D)（○）

(E)（○）

二、填充題 (每題 10 分)

1、 已知 i 為虛數單位，試問(1) $i^{2003} + i^{24} =$______。(2) $(1+i)^{12} =$______。

答案：(1) $1 - i$　(2) -64

解析：(1) $i^{2003} + i^{24} = i^{4\times500+3} + i^{4\times6} = i^3 + 1 = -i + 1 = 1 - i$。

(2) $(1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 2i$，$\therefore (1+i)^{12} = [(1+i)^2]^6 = (2i)^6 = -64$。

2、 $z_1 = 6 + i$，$z_2 = -4 + 6i$，則$|z_1 - z_2| =$__________。

答案：$5\sqrt{5}$

解析：$|z_1 - z_2|$表 $z_1(6,1), z_2(-4,6)$ 兩點間距離$|z_1 - z_2| = \sqrt{(6+4)^2 + (1-6)^2} = 5\sqrt{5}$

3、 $a > 0$則$\left|\dfrac{2\sqrt{3}(2-ai)}{(\sqrt{2}+i)(a-2i)}\right| =$______。

答案：2

解析：利用$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

$$\left|\frac{2\sqrt{3}(2-ai)}{(\sqrt{2}+i)(a-2i)}\right| = \frac{2\sqrt{3}|2-ai|}{|\sqrt{2}+i||a-2i|} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{a^2+4}}{\sqrt{3}\sqrt{a^2+4}} = 2$$

4、 $A(-1,3), B(4,7)$，若$\overline{AP} : \overline{BP} = 2:3$，則 P 的坐標為______或______。

答案：$(1,\frac{23}{5}),(-11,-5)$

解析：方法一：分點公式

P 爲內分點：$(\frac{(-1)\times 3+4\times 2}{2+3},\frac{3\times 3+7\times 2}{2+3})=(1,\frac{23}{5})$

P 爲外分點：$(\frac{(-1)\times 3+4\times(-2)}{(-2)+3},\frac{3\times 3+7\times(-2)}{(-2)+3})=(-11,-5)$

方法二：向量作法

(1) $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}\Rightarrow P$ 爲 $\frac{3}{5}(-1,3)+\frac{2}{5}(4,7)=(1,\frac{23}{5})$

(2) $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{-2+3}\overrightarrow{OA}+\frac{-2}{-2+3}\overrightarrow{OB}\Rightarrow$ P 爲 $3(-1,3)-2(4,7)=(-11,-5)$

5、設α,β爲方程式$x^2+6x+1=0$的二根，求$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=$______。

答案：$2\sqrt{2}i$

解析：利用根與係數的關係，$\therefore\begin{cases}\alpha+\beta=-6\\ \alpha\beta=1\end{cases}$，且$\delta=6^2-4\times1\times1=32>0\Rightarrow\alpha,\beta\in\mathbb{R},\therefore\begin{cases}\alpha<0\\ \beta<0\end{cases}$

$\therefore(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=-8$

$\therefore\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\pm\sqrt{8}i=\pm2\sqrt{2}i$（$-2\sqrt{2}i$不合），$\therefore\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2\sqrt{2}i$。

6、若 a 與 $a+2$ 爲異號的兩實數，且均爲方程式$x^2+|x|+3k=0$的解，則 $k=$______。

答案：$-\frac{2}{3}$

解析：$\because a$ 與$(a+2)$爲異號　$\therefore a+2>0, a<0$　$(\because a+2>a)$

又爲方程式的解　∴代入方程式:$\begin{cases}(a+2)^2+(a+2)+3k=0\cdots\cdots①\\ a^2-a+3k=0\cdots\cdots②\end{cases}$

則　①−②$\Rightarrow 6a=-6, a=-1$，代入②$\Rightarrow 1+1+3k=0\Rightarrow k=-\frac{2}{3}$

7、求$24-7i$的平方根，則解爲______或______。

答案：$\frac{7}{\sqrt{2}}+\frac{-1}{\sqrt{2}}i,\ \ \frac{-7}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

解析：$z^2=24-7i$，設$z=a+bi,\ z^2=(a^2-b^2)+2abi$

$$\therefore\begin{cases}a^2-b^2=24\\ 2ab=-7\\ a^2+b^2=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=\frac{49}{2}\\ b^2=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\pm\frac{7}{\sqrt{2}}\\ b=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

即$a=\frac{7}{\sqrt{2}},\ b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $a=\frac{-7}{\sqrt{2}},\ b=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow z=\frac{7}{\sqrt{2}}+\frac{-1}{\sqrt{2}}i$ 或 $z=\frac{-7}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

8、設$a\in\mathbb{R}$，若方程式$x^2+(3a+2-i)x+(2a-i)=0$有實根，試求$a=$______，另一虛根為_______。

$\boxed{答案}$：-1 ; $2+i$

$\boxed{解析}$：設實根為α，另一虛根為β

$\alpha^2+(3a+2-i)\alpha+(2a-i)=0$

$\alpha^2+3a\alpha+2\alpha+2a-(\alpha+1)i=0$

$\therefore\begin{cases}\alpha^2+3a\alpha+2\alpha+2a=0\cdots\cdots①\\ \alpha+1=0\cdots\cdots②\end{cases}$

由② $\alpha=-1$ 代入①，$1-3a-2+2a=0\Rightarrow a=-1$

又　$\alpha+\beta=-(3a+2-i)\Rightarrow -1+\beta=1+i\Rightarrow\beta=2+i$，$\therefore a=-1$，另一虛根為$2+i$。

9、 $m\in\mathbb{R},\ z=(\dfrac{m^2-5m-6}{m-2})+(\dfrac{m^2-m-6}{m+1})i$，

(1)當 $m=$______時，z 為實數；(2)當 $m=$______時，z 為純虛數。

$\boxed{答案}$：3 或-2, 6

$\boxed{解析}$：(1) $z\in\mathbb{R}$ $\therefore\dfrac{m^2-m-6}{m+1}=0\Rightarrow m^2-m-6=0,(m-3)(m+2)=0\Rightarrow$ $m=3$ 或 -2

(2)z 為純虛數$\dfrac{m^2-5m-6}{m-2}=0$ 且 $\dfrac{m^2-m-6}{m+1}\neq0$, $m=6$ 或 -1(不合)

10、兩條直線L_1: $(11-3m)x+(m-1)y=1, L_2$: $(2m-1)x+5y=9$

(1)若$L_1 // L_2$則$m=$______，(2)若$L_1\perp L_2$則$m=$______。

$\boxed{答案}$：(1) $3,-9$　　　(2) $\dfrac{15\pm\sqrt{129}}{6}$

$\boxed{解析}$：(1) $L_1 // L_2$，$-\dfrac{11-3m}{m-1}=-\dfrac{2m-1}{5},\therefore m^2+6m-27=0$，$(m+9)(m-3)=0, m=3或-9$

(2)$\because L_1\perp L_2$，$(-\dfrac{11-3m}{m-1})(-\dfrac{2m-1}{5})=-1$，$(11-3m)(2m-1)=-5(m-1)$，

$3m^2-15m+8=0, m=\dfrac{15\pm\sqrt{129}}{6}$

11、(1)L 為過 $(3,2)$ 且斜率$-\dfrac{1}{2}$之直線，則 L 之方程式為______。

(2)直線 M 與 x 軸交於 $(2,0)$ 與 y 軸交於 $(0,-3)$，則 M 之方程式為______。

$\boxed{答案}$：(1) $y=\dfrac{-1}{2}x+\dfrac{7}{2}$　　(2) $3x-2y=6$

$\boxed{解析}$：(1)點斜式 $y-2=-\dfrac{1}{2}(x-3)$ $\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$

(2)截距式 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-3}=1$ $\therefore 3x-2y=6$

12、直線L過點$(-2,3)$且與直線$3x+4y-5=0$平行，則L之直線方程式為________________。

$\boxed{答案}$：$3x+4y-6=0$

解析：直線$3x+4y-5=0 \Rightarrow m=-\frac{3}{4}$

直線L過點$(-2,3)$且與直線$3x+4y-5=0$平行$\Rightarrow y-3=-\frac{3}{4}(x+2)$，即$3x+4y-6=0$

13、設$A(2,-5)$，直線$L: x-2y+3=0$，則由點A作直線L的垂直線的垂足坐標爲___________。

答案：$(-1,1)$

解析：直線$L: x-2y+3=0 \Rightarrow m=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$，

設所求$L_1 \perp L$，則$m_{L_1}=-2 \Rightarrow L_1: y+5=-2(x-2)$，$\therefore 2x+y=-1$

$\therefore$解聯立$\begin{cases} x-2y=-3 \\ 2x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$，$\therefore$垂足坐標爲$(-1,1)$。

14、二直線L_1: $kx-2y=3k-2, L_2$: $3x+(k-5)y=25-6k$,

(1)當$k=$______時，$L_1 // L_2$，　(2)當$k=$______時，$L_1=L_2$，

(3)當$k\neq$______時，L_1與L_2相交，　(4)當$k=$______時，$L_1 \perp L_2$。

答案：(1)2, 3　(2)3　(3)2, 3　(4) -10

解析：(1) $L_1 // L_2 . \therefore \frac{k}{3}=\frac{-2}{k-5} . \therefore k^2-5k+6=0 . \therefore k=2$ 或 3

(2) $k=2, L_1: 2x-2y=4, L_2: 3x-3y=13$(平行)

$k=3, L_1: 3x-2y=7, L_2: 3x-2y=7$(重合)$. \therefore k=3$

(3) L_1與L_2相交，則$\frac{k}{3}\neq\frac{-2}{k-5} . \therefore k\neq 2$ 且 $k\neq 3$

(4) $L_1 \perp L_2$, 則 $3k-2(k-5)=0 \quad \therefore k=-10$

15、$\triangle ABC$中，$A(1,2), B(3,-2), C(a,a)$，若$\triangle ABC$爲直角$\triangle$，

(1)若$\angle A$爲直角時，$a=$______，(2)若$\angle C$爲直角時，$a=$______。

答案：(1) 3　(2)$\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$

解析：(1) $m_{AB}\cdot m_{AC}=-1$，$\frac{-2-2}{3-1}\cdot\frac{(a-2)}{(a-1)}=-1, \therefore a=3$

(2) $m_{BC}\cdot m_{AC}=-1$，$\frac{(a+2)}{(a-3)}\cdot\frac{(a-2)}{(a-1)}=-1, \therefore 2a^2-4a-1=0$，$\therefore a=\frac{4\pm\sqrt{16+8}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$

16、設一直線經過$(2,-3)$且在兩軸上之截距乘積爲 3，則其直線方程式爲______。(答案有二個)

答案：$x+\frac{y}{3}=1, \ -\frac{x}{2}-\frac{2y}{3}=1$

解析：設L : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \ \frac{2}{a}+\frac{-3}{b}=1$，又$ab=3$

$$\begin{cases} ab=3 \Rightarrow b=\dfrac{3}{a} \\ \dfrac{2}{a}+\dfrac{-3}{b}=1 \Rightarrow \dfrac{2}{a}-a=1 \Rightarrow a^2+a-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1,-2 \\ b=3,-\dfrac{3}{2} \end{cases}，$$

得 $(a,b)=(1,3)$ 或 $(-2,-\frac{3}{2})$，$\therefore L$ 為 $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}=1$ 或 $\frac{x}{-2}+\frac{-2y}{3}=1$

17、一直線 L 與二直線 $2x+3y=3, x+5y=2$ 分別交於 A, B 兩點，且原點恰為 $\overline{AB}$ 的中點，則 L 的方程式為______。

答案：$y=-\frac{1}{3}x$

解析：$\overline{AB}$ 之中點必在 L 上，故設 $L: y=mx$，分別與兩直線解交點 A, B 兩點，

$$\begin{cases} 2x+3y=3 \\ y=mx \end{cases} \Rightarrow A(\frac{3}{2+3m},\frac{3m}{2+3m})$$

$$\begin{cases} x+5y=2 \\ y=mx \end{cases} \Rightarrow B(\frac{2}{1+5m},\frac{2m}{1+5m})$$

$\overline{AB}$ 的中點恰為原點 $\Rightarrow \frac{3}{2+2m}+\frac{2}{1+5m}=0, \quad m=-\frac{1}{3}$，故 L: $y=-\frac{1}{3}x$

18、求過 $L_1: 3x-y+1=0, L_2: x+y+3=0$ 之交點，又過 $(1,1)$ 之直線方程式為______。

答案：$3x-2y-1=0$

解析：設直線為 $(3x-y+1)+k(x+y+3)=0$，$(1,1)$代入得 $k=-\frac{3}{5}$ $\therefore$直線方程式為 $3x-2y-1=0$

19、不論 k 為任意實數，直線 $(3k+7)x+(7k+3)y=12k+8$ 恆是一定點，則此定點為__________，又在坐標平面上，有一條直線 M，通過此一定點卻無法找到一實數 k，使 M 以$(3k+7)x+(7k+3)y=12k+8$ 形式表示之，試問此直線 M 之方程式為________________。

答案：$(\frac{1}{2},\frac{3}{2}),\ 3x+7y-12=0$

解析：$(3k+7)x+(7k+3)y=12k+8 \Rightarrow$ 整理後，直線系 $k(3x+7y-12)+(7x+3y-8)=0$ 表過二直線 $3x+7y-12=0$，$7x+3y-8=0$ 交點的任一直線；

$$\begin{cases} 3x+7y-12=0 \\ 7x+3y-8=0 \end{cases} \quad \therefore x=\frac{1}{2}, y=\frac{3}{2}$$

$k(3x+7y-12)+(7x+3y-8)=0$，對於 $\forall k\in\mathbb{R}$ 無法表示方程式 $3x+7y-12=0$

20、設 $1-2i+3i^2-4i^3+\cdots-60i^{59}=a+bi$，$a,b\in\mathbb{R}$，則 $a=$______, $b=$______。

答案：$-30, 30$

解析：$1-2i-3+4i+5-\cdots+60i=(1-3+5-\cdots-59)+(-2+4-6+8-\cdots+60)i=-30+30i$