高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：97.09.11					
範圍	Book1 1-1、2 數	班級	三年 班	姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 5 分)

1、(E) 設八位數 $3174a9b4$ 為 72 之倍數，則 a 之值可為

(A)1 (B)3 (C)5 (D)7 (E)9

解析：若 $3174a9b4$ 為 72 之倍數，又 $72=8\times9$，

$\because 3174a9b4$ 為 8 的倍數(末三位)，$\therefore b=0$ 或 4 或 8

$\because 3174a9b4$ 為 9 的倍數(數字和)，$\therefore 9|28+a+b$，$\therefore a+b=8$ 或 $a+b=17$

$\therefore (a,b)=(8,\ 0),(4,\ 4),(0,\ 8),(9,\ 8)$

2、(B) 設 $n\in\mathbb{N}$，若 $1\le n\le 200$ 且 $\gcd(n,\ 12)=2$，則合於條件之 n 值共

(A)16 (B)33 (C)50 (D)67 (E)100 個

解析：$1\le n\le 200$，又 $\gcd(n,\ 12)=2$

$\therefore$ 令 $n=2k,\ \ 1\le k\le 100,\ \ \gcd(k,\ 6)=1$

1～100 中，去除 2 倍數 50 個，3 倍數 33 個，重複 6 倍數 16 個

$\therefore 100-50-33+16=33$

3、(D) 設 $a,b\in\mathbb{N}$，且 a 除以 7 餘 3，b 除以 7 餘 2，則 a^3b 除以 7 的餘數為

(A)1 (B)2 (C)4 (D)5 (E)6

解析：

$$\begin{cases} a\div 7\cdots\cdots 3 \\ a^3\div 7\Rightarrow 3^3\div 7\cdots\cdots 6\Rightarrow \therefore a^3b\div 7\Rightarrow (3^3\times 2)\div 7\cdots\cdots 5 \\ b\div 7\cdots\cdots 2 \end{cases}$$

4、(B) 設 $a>b>0, x>y>0$，比較 $A=\dfrac{a}{b}, B=\dfrac{a+x}{b+x}, C=\dfrac{a+y}{b+y}$ 之大小時其結果為

(A) $A>B>C$ (B) $A>C>B$ (C) $B>C>A$ (D) $B>A>C$ (E) $C>B>A$

解析：$a>b>0,\ \therefore \dfrac{a}{b}>1$，假分數越加越小 $\Rightarrow \dfrac{a}{b}>\dfrac{a+y}{b+y}>\dfrac{a+x}{b+x},\ \therefore A>C>B$

5、(C) 設 $a,b\in\mathbb{R}$，使 $|a+b|=|a|+|b|$ 的充要條件為

(A) $a>0$ 且 $b>0$ (B) $a<0$ 且 $b=0$ (C) $ab\ge 0$ (D) $ab=0$ (E) $ab\le 0$

解析：$|a+b|=|a|+|b|$ 之充要條件 $ab\ge 0$ (a,b 同號或至少有一為 0)

6、(BCD) (複選)下列敘述何者正確？ (A) $0.3\overline{43}$ 不是有理數 (B) $0.\overline{34}>\dfrac{1}{3}$ (C) $0.\overline{34}>0.343$

(D) $0.\overline{34}<0.35$ (E) $0.\overline{34}>0.3\overline{43}$

解析：(A)（╳）：$0.3\overline{43}=\dfrac{340}{990}=\dfrac{34}{99}$ 為有理數。

(B)（○）：$0.\overline{34}=\frac{34}{99}>\frac{33}{99}=\frac{1}{3}$ 。

(C)（○）：$0.\overline{34}=0.3434\cdots>0.343$ 。

(D)（○）：$0.\overline{34}=0.3434\cdots<0.35$ 。

(E)（╳）：$0.\overline{34}=0.3434\cdots=0.3\overline{43}=0.34343\cdots$ 。

7、($\overset{\text{AB}}{\text{E}}$) 設$a, b, c\in \mathbb{N}$ ，下列敘述何者正確？

(A)若 $(ka)\big|(kb)$ ，則$a\big|b$

(B)若$a\big|(b,c)$，則a爲 $(b+c)$ 的因數

(C)設$a=bq+r, q\in \mathbb{Z}, 0\le r<b$，則 $(a, b)=(q, r)$

(D)設$a=bc$，則不大於a且與a互質的自然數有 $(b-1)(c-1)$ 個

(E)若 $(a, b)=[a, b]$，則$a=b$

二、填充題 (每題 10 分)

1、設$m\in\mathbb{N}$且$2m-5$可以整除$3m+25$，則$m=$______。(答案不止一個)

答案：2,3,5,9,35

解析：$2m-5\big|3m+25$ 又 $2m-5\big|2m-5$

$\therefore 2m-5\big|2(3m+25)-3(2m-5)$

$\therefore 2m-5\big|65, \therefore 2m-5=\pm1,\ \pm5,\ \pm13,\ \pm65$

$\therefore m=2,\ 3,\ 5,\ 9,\ 35$

2、設a,b爲有理數，且滿足$4a+3\sqrt{5}+b=2a\sqrt{5}+1-2b\sqrt{5}$ ，求數對 $(a,b)=$__________。

答案：$(\frac{1}{2},-1)$

解析：$4a+3\sqrt{5}+b=2a\sqrt{5}+1-2b\sqrt{5}$

$(4a+b-1)+(-2a+2b+3)\sqrt{5}=0$

$$\begin{cases}4a+b-1=0\\-2a+2b+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-1\end{cases}$$

3、設$a,b,c\in\mathbb{Z}$且$3|a+5|+4|b-1|+|c-3|=2$ ，求數對$(a,b,c)=$________或________。

答案：$(-5,1,1)$ ； $(-5,1,5)$

解析：$\because a,b,c\in\mathbb{Z}, \therefore |a+5|, |b-1|, |c-3|\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\therefore\begin{cases}|a+5|=0\\|b-1|=0\\|c-3|=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-5\\b=1\\c=1\text{或}5\end{cases}$$

$\therefore$數對$(a,b,c)=(-5,1,1)$或$(-5,1,5)$ 。

4、設$\sqrt{17+2\sqrt{72}}$的整數部分爲 a，小數部分爲 b，則$\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}=$______。

$\boxed{\text{答案}}$：$\frac{7-3\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\text{解析}}$：$\sqrt{17+2\sqrt{72}}=\sqrt{9}+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}=5.\sim$，

整數部分爲 5，小數部分$b=(3+2\sqrt{2})-5=2\sqrt{2}-2$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}&=\frac{1}{2\sqrt{2}-2}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\\&=\frac{2\sqrt{2}+2}{(2\sqrt{2})^2-2^2}+\frac{3-2\sqrt{2}}{3^2-(2\sqrt{2})^2}\\&=\frac{2\sqrt{2}+2}{4}+\frac{3-2\sqrt{2}}{1}\\&=\frac{7-3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

5、設$x,y\in\mathbb{R}$且$-2\le x\le 5$, $3\le y\le 9$，求下列各式之有效範圍：

(1)$x-y$的範圍爲____________。(2)$\frac{x}{y}$的範圍爲____________。

$\boxed{\text{答案}}$：(1)$-11\le x-y\le 2$　　(2)$-\frac{2}{3}\le\frac{x}{y}\le\frac{5}{3}$

$\boxed{\text{解析}}$：

(1)$\because -2\le x\le 5$

$3\le y\le 9\Rightarrow -9\le -y\le -3$

$\therefore -11\le x-y\le 2$。

(2) $\because -2\le x\le 5$

$\frac{1}{9}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{3}$

$-\frac{2}{3}\le\frac{x}{y}\le\frac{5}{3}$

6、不等式$|2x-1|<5$的解爲_______。

$\boxed{\text{答案}}$：$-2<x<3$

$\boxed{\text{解析}}$：

$-5<2x-1<5$

$-4<2x<6$

$-2<x<3$

7、$x\in\mathbb{N}$, $x|3528$且$588|x$，則 x 之所有可能解的總和爲___________。

$\boxed{\text{答案}}$：7056

8、設$a,b,q_1,q_2,q_3\in\mathbb{N}$且滿足$\begin{cases}a=bq_1+4098\\b=4098q_2+582\\4098=582q_3+24\end{cases}$，求 a,b 的最大公因數爲______。

答案：6

解析：$(a,b)=(b,4098)=(4098,582)=(582,24)=6$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 582 & 24 \\ \hline 3 & 291 & 12 \\ \hline & 97 & 4 \end{array}$$

9、設 $n\in\mathbb{N}$ 且 $\dfrac{3n+17}{2n-3}\in\mathbb{N}$，求 $n=$_________。

答案：2 或 23

解析：

$\because 2n-3\mid 2n-3,\ 2n-3\mid 3n+17\Rightarrow 2n-3\mid 2(3n+17)-3(2n-3)=43$

$\therefore 2n-3=1$ 或 43，$\therefore n=2$ 或 23。

10、設 $x\in\mathbb{R}$，求 $f(x)=|x+1|+|x-3|$ 的最小值為______，此時之 x 範圍為_________

答案：$4\,;-1\le x\le 3$

解析：

$f(x)=|x+1|+|x-3|=|x+1|+|3-x|\ge|x+1+3-x|=4$，$\therefore f(x)$ 之最小值為 4。

等號成立於 $(x+1)(3-x)\ge 0\Rightarrow(x+1)(x-3)\le 0\Rightarrow -1\le x\le 3$。

11、設 $x\in\mathbb{N}$，以 x 除 1206 餘 10，以 x 除 953 餘 17，則 x 之值為______。(答案不止一個)

答案：26,52

解析：

$1206-10=1196,\ 953-17=946$

$x\mid 1196,\ \ x\mid 936\Rightarrow x\mid 52\Rightarrow x=1,\ 2,\ 4,\ 13,\ 26,\ 52$，但餘數為 17，故 $x=26$ 或 52。

12、設 $a,b\in\mathbb{N}$ 且滿足 $ab-8a-2b=-29$，則 $a+b=$______。

答案：22

解析：

原式 $\Rightarrow a(b-8)-2(b-8)=-29+16$

$\therefore(a-2)(b-8)=-13$

$\therefore\begin{cases}a-2=-1\\ b-8=13\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-2=13\\ b-8=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-2=1\\ b-8=-13\end{cases}$（不合）或 $\begin{cases}a-2=-13\\ b-8=1\end{cases}$（不合）

$\therefore\begin{cases}a=1\\ b=21\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=15\\ b=7\end{cases}$，$\therefore a+b=22$。

13、(1)解方程式 $|x+5|+|x-2|=9$ 則其解為______。

(2)解不等式 $|x+5|+|x-2|\le 9$ 則其解為______。

(3)設 $f(x)=|x+5|+|x-2|$ 則 $f(x)$ 之最小值為______。

答案：(1)3、-6　(2) $-6\le x\le 3$　(3) 7

$\boxed{\text{解析}}$：

(1) $x \ge 2$ 時 $\Rightarrow (x+5)+(x-2)=9$,$2x+3=9, \therefore x=3$

$-5<x<2$ 時,$(x+5)-(x-2)=9 \Rightarrow 7=9$ 無解，

$x \le -5$ 時 , $-(x+5)-(x-2)=9,\ x=-6$

(2) $x \ge 2$ 時 $\Rightarrow (x+5)+(x-2) \le 9$, $x \le 3 \Rightarrow 2 \le x \le 3$……①

$-5<x<2$ 時 ,$(x+5)-(x-2) \le 9 \Rightarrow 7 \le 9$ 恒成立 $\therefore -5<x<2$ …..②

$x \le -5$ 時 , $-(x+5)-(x-2) \le 9,\ x \ge -6$……③

由①②③ $\Rightarrow -6 \le x \le 3$

(3) $x \ge 2$ 時, $f(x)=(x+5)+(x-2)=2x+3 \ge 7$

$-5<x<2$ 時 ,$f(x)=(x+5)+(2-x)=7$

$x \le -5$ 時,$f(x)=-(x+5)+(2-x)=-3-2x \ge 7 \therefore f(x) \ge 7$ 最小値爲7

14、若一個三位正整數，其各位數字和爲 13，且被 35 整除，求出合於條件之所有三位正整數。

$\boxed{\text{答案}}$175，490，805

$\boxed{\text{解析}}$：

設此三位正整數，百位數字爲 x，十位數字爲 y，個位數字爲 z，又 $x+y+z=13$

$$\text{又此數爲 35 的倍數} \Rightarrow z=0 \Rightarrow x+y=13 \Rightarrow \begin{cases} 490 \\ 580 \\ 670 \\ 760 \\ 850 \\ 940 \end{cases} \text{驗算只有490(合)}$$

$$z=5 \Rightarrow x+y=8 \Rightarrow \begin{cases} 805, 445 \\ 715, 355 \\ 625, 265 \\ 535, 175 \end{cases} \text{驗算只有805, 175(合)}$$

15、我國陰曆以天干「甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸」，地支「子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥」紀年，即甲子、乙丑、丙寅、丁卯、……、癸酉、甲戌、乙亥、……、癸未、甲申、……。譬如西元 2001 年就是「辛巳」年。問

(1)一週期__________年(俗稱 60 年爲一甲子）

(2)西元 3000 年陰曆紀年是甚麼年？

(3)離西元 2001 年最近的「丙辰」年是西元幾年？

$\boxed{\text{答案}}$：(1)60 (2) 庚申 (3)1976

$\boxed{\text{解析}}$：

(1)天干 10 年一輪，地支 12 年一輪，10 和 12 的最小公倍數爲 60，每 60 年爲一周期。

(2)把天干從 1 到 10 逐一編號，地支從 1 到 12 逐一編號，西元 2001 年的「辛巳」爲(8, 6)。

$$3000-2001=999 \text{ 。} \begin{cases} 999 \div 10 = 99......9 \\ 999 \div 12 = 83......3 \end{cases}$$

西元 3000 年的陰曆紀元就是$(8+9,6+3)=(17,9)\Rightarrow(7,9)\Rightarrow$「庚申」。

(3)設 x 年後爲「丙辰」年，即(3, 5)年，而 2001 年是(8, 6)年。

所以$8+x=10a+3, 6+x=12b+5$。

取$a=4, b=3$，$x=10\times4-5=35$,即 2001+35=2036 年是丙辰。

$60-35=25$,當然 25 年前即$2001-25=1976$也是丙辰年。

16、設 a, b 皆爲正整數，$a<b$，a 不是 b 的因數。若$\gcd(a,\ b)=29,\ \mathrm{lcm}[a,\ b]=10440$，試求 a, b 之值。

$\boxed{答案}$：$a=145,\ \ b=2088$或$a=232,\ \ b=1305$或$a=261,\ \ b=1160$

$\boxed{解析}$：$\gcd(a,\ b)=29$，令$a=29h,\ b=29k$，其中　$1<h<k$ 且 $h,\ k$ 互質。

$\mathrm{lcm}[a,\ b]=29hk=10440$ ………… (1)

$$hk=\frac{10440}{29}=360=5\times72=8\times45=9\times40\cdots\cdots(2)$$

由(1), (2)得$h=5,\ \ k=72$或$h=8,\ \ k=45$或$h=9,\ \ k=40$

故$a=145,\ \ b=2088$或$a=232,\ \ b=1305$或$a=261,\ \ b=1160$