高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：98.06.10.					
範圍	3-3 期望值	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

( ) 1. 擲 3 個硬幣，出現 3 正面可得 12 元，2 正面可得 8 元，一正面可得 4 元，爲了公平起見，出現三反面時，應賠多少元? (1)20 元． (2)24 元． (3)36 元． (4)40 元． (5)48 元．

解答 5

解析 投 3 個硬幣，其樣本空間元素個數 $n(S)=2^3=8$，設出現三反面應賠 x 元，則

得款數	12	8	4	$-x$
機率 p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

公平即期望值 $E=0$ $\Rightarrow 12\times\frac{1}{8}+8\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+(-x)\times\frac{1}{8}=0$ ，$x=48$，即賠 48 元

( ) 2. (複選)投擲一公正硬幣 n 次（$n\in N$），出現正面次數的期望值爲 E_n，下列何者正確?

(1) $E_2=1$． (2) $E_4=2$． (3) $E_8=4$． (4) $E_{10}=8$． (5) $E_n=2^{\frac{n}{2}-1}$．

解答 123

解析 $E_1=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

$E_2=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=2\times\frac{1}{2}$

$E_3=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=3\times\frac{1}{2}$

⋮

$\therefore\ E_n=nE_1=\frac{n}{2}\ \Rightarrow\ E_2=1,\ E_4=2,\ E_8=4,\ E_{10}=5$

( ) 3. (複選)投擲公正骰子 n 個（$n\in N$），點數和的期望值爲 E_n，下列何者正確?

(1) $E_2=7$． (2) $E_4=14$． (3) $E_8=28$． (4) $E_{10}=35$． (5) $E_{2n}=7n$．

解答 12345

解析 $E_1=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$，

又 $E_n=nE_1=\frac{7n}{2}$，$\therefore\ E_2=7,\ E_4=14,\ E_8=28,\ E_{10}=35,\ E_{2n}=7n$

二、填充題 (每題 10 分)

1. 一袋中有 1 號球 1 個，2 號球 2 個，3 號球 3 個，4 號球 4 個，

(1)從袋中任取一球，若取到 k 號球可得 $5-k$ 元，則此試驗得獎金的期望值爲________元．

(2)從袋中一次取兩球，取到的號碼和爲 k 時，可得 $10-k$ 元，則此試驗得獎金的期望值爲 _____元．

解答 (1) 2; (2) 4

解析 (1)袋中球的總數 $=1+2+3+4=10$，此試驗得獎金的機率分布如下

獎金 X	4	3	2	1
機率	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

故得獎金的期望值 $E(X)=4\times\frac{1}{10}+3\times\frac{2}{10}+2\times\frac{3}{10}+1\times\frac{4}{10}=2$（元）

即平均值 $5-\frac{1\times1+2\times2+3\times3+4\times4}{1+2+3+4}=2$

(2)一次取兩球，設此試驗得獎金的金額為 X 元，

則機率分布如右

X	7	6	5	4	3	2
機率	$\frac{2}{C_2^{10}}$	$\frac{4}{C_2^{10}}$	$\frac{10}{C_2^{10}}$	$\frac{11}{C_2^{10}}$	$\frac{12}{C_2^{10}}$	$\frac{6}{C_2^{10}}$

故得獎金的期望值 $E(X)=7\times\frac{2}{45}+6\times\frac{4}{45}+5\times\frac{10}{45}+4\times\frac{11}{45}+3\times\frac{12}{45}+2\times\frac{6}{45}=\frac{180}{45}=4$（元）

即平均值 $10-\frac{1\times1+2\times2+3\times3+4\times4}{1+2+3+4}\times2=4$

2. 一盒子中有 5 個紅球，3 個白球，且每球被取的機率相同，

(1)若一次取一球，則取到白球個數的期望值為____________.

(2)若一次取三球，則取到白球個數的期望值為____________.

解答 (1) $\frac{3}{8}$;(2) $\frac{9}{8}$

解析 (1)一次取一球，取到白球的機率 $=\frac{3}{8}$，所以取到白球個數的期望值 $=1\times\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$

(2)取到白球個數的機率分布如下

個數	0	1	2	3
機率	$\frac{C_3^5}{C_3^8}$	$\frac{C_1^3\times C_2^5}{C_3^8}$	$\frac{C_2^3\times C_1^5}{C_3^8}$	$\frac{C_3^3}{C_3^8}$

取到白球個數的期望值 $E(X)=1\times\frac{C_1^3\times C_2^5}{C_3^8}+2\times\frac{C_2^3\times C_1^5}{C_3^8}+3\times\frac{C_3^3}{C_3^8}$

$=\frac{30}{56}+2\times\frac{15}{56}+3\times\frac{1}{56}=\frac{9}{8}$，即平均值 $\frac{3}{8}\times3=\frac{9}{8}$

3. 一盒子中有 5 個球，球上分別編號為 1，2，3，4，5，且每球被取的機率相同，

(1)若一次取兩球，則兩球中編號較大者的期望值為____________.

(2)若一次取兩球，則兩球編號差之平方的期望值為____________.

解答 (1) 4;(2) 5

解析 (1)設取到的數中，較大的數為 X，則 X 的機率分布如下

X	1	2	3	4	5
機率	$\frac{0}{C_2^5}$	$\frac{1}{C_2^5}$	$\frac{2}{C_2^5}$	$\frac{3}{C_2^5}$	$\frac{4}{C_2^5}$

取到較大編號數的數值期望值 $E(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{4}{10}=4$

(2)設取到的兩數編號差的平方為 X，則機率分布如下

X	1	4	9	16
機率	$\frac{4}{C_2^5}$	$\frac{3}{C_2^5}$	$\frac{2}{C_2^5}$	$\frac{1}{C_2^5}$

期望值 $E(X)=1\times\frac{4}{10}+4\times\frac{3}{10}+9\times\frac{2}{10}+16\times\frac{1}{10}=5$

4. 一袋中有 10 元硬幣 3 個，5 元硬幣 x 個，每個硬幣被取的機會相同，

(1)若從中取一個硬幣時，取得金額的期望值爲 8 元，則 $x=$ ____________ .

(2)若 $x=4$，則從中取兩個硬幣可得的金額之期望值爲____________ 元．

解答 (1) 2;(2) $\frac{100}{7}$

解析 (1)期望值 $E(X)=8=10\times\frac{3}{x+3}+5\times\frac{x}{x+3}$，即 $8x+24=30+5x$，所以 $x=2$

即平均值 $\frac{10\times3+5x}{3+x}=8\Rightarrow 8x+24=30+5x$，所以 $x=2$

(2)期望值 $E(X)=20\times\frac{C_2^3}{C_2^7}+15\times\frac{C_1^3C_1^4}{C_2^7}+10\times\frac{C_2^4}{C_2^7}=20\times\frac{1}{7}+15\times\frac{4}{7}+10\times\frac{2}{7}=\frac{100}{7}$（元）

即平均值 $\frac{10\times3+5\times4}{3+4}\times2=\frac{100}{7}$

5. 設擲一骰子三次，則

(1)出現 6 點次數的期望值爲____________ ． (2)出現質數點次數的期望值爲____________ .

解答 (1) $\frac{1}{2}$;(2) $\frac{3}{2}$

解析 (1)擲一骰子三次，設 X 表示出現 6 點的次數，則其機率分布

X	0	1	2	3
機率	$\frac{125}{216}$	$\frac{3\times5^2}{216}$	$\frac{3\times5}{216}$	$\frac{1}{216}$

期望值 $E(X)=1\times\frac{75}{216}+2\times\frac{15}{216}+3\times\frac{1}{216}=\frac{108}{216}=\frac{1}{2}$，即平均值 $\frac{1}{6}\times3=\frac{1}{2}$

(2)設出現質數點的次數以 X 表示，則其機率分布

X	0	1	2	3
機率	$\frac{27}{216}$	$\frac{3\times27}{216}$	$\frac{3\times27}{216}$	$\frac{27}{216}$

期望值 $E(X)=1\times\frac{81}{216}+2\times\frac{81}{216}+3\times\frac{27}{216}=\frac{324}{216}=\frac{3}{2}$，即平均值 $\frac{3}{6}\times3=\frac{9}{2}$

6. 根據統計資料得知，一個 50 歲的人，在一年內存活的機率爲 98.5%，今有一個 50 歲的人參加一年期保險額度爲五十萬元的人壽保險，須繳保費一萬元，則保險公司獲利的期望值爲____________ .

解答 2500（元）

解析 保險公司獲利的期望值 $=98.5\%\times10000+1.5\%\times(10000-500000)=2500$（元）

7. 將 3 個球投入 3 個盒子裡，每次投一個球，連續投 3 次，則

(1)每個盒子裡都有球的機率爲____________，(2)空盒子個數的期望值爲____________ .

解答 (1) $\frac{2}{9}$;(2) $\frac{8}{9}$

解析 (1)3 個球投入 3 個盒子，每次一球，每個盒子都有球的機率 $=\frac{3!}{3^3}=\frac{2}{9}$

(2)設空盒子數爲 X，則 X 的機率分布如下

X	0	1	2
機率	$\dfrac{6}{27}$	$\dfrac{3\times(2^3-2)}{27}$	$\dfrac{3}{27}$

空盒子數的期望值 $=1\times\dfrac{3\times6}{27}+2\times\dfrac{3}{27}=\dfrac{24}{27}=\dfrac{8}{9}$

8. 擲三粒骰子一次，須先付 10 元，若出現點數均相同時，可得 120 元；點數成等差時，可得 30 元，求
   (1)此遊戲是否有利? ____________．（答有利或不利）
   (2)要使遊戲公平，應將出現點數成等差時可得 30 元，更改爲____________元．

$\boxed{\text{解答}}$ (1)不利;(2) 40

$\boxed{\text{解析}}$ (1) $E=120\times\dfrac{6}{6^3}+30\times\dfrac{6\times3!}{6^3}=\dfrac{10}{3}+5=\dfrac{25}{3}<10$，故不利

(2) $120\times\dfrac{6}{6^3}+x\times\dfrac{6\times3\,!}{6^3}=10\quad\Rightarrow\quad x=40$

9. A 袋中有 100 元 5 張，10 元 3 張，1 元 4 張，B 袋中有 10 元鈔票 10 張，
   (1)自 A 袋中任取二張，其期望值爲____________．
   (2)自 A 袋中取一張放入 B 袋，再自 B 袋取二張，求期望值爲____________．

$\boxed{\text{解答}}$ (1) 89;(2) $\dfrac{289}{11}$

$\boxed{\text{解析}}$ (1) $E=2(100\times\dfrac{5}{12}+10\times\dfrac{3}{12}+1\times\dfrac{4}{12})=89$，即平均值 $\dfrac{100\times5+10\times3+1\times4}{5+3+4}\times2=89$

(2) $E=2(\dfrac{89}{2}\times\dfrac{1}{11}+10\times\dfrac{10}{11})=2\times\dfrac{289}{22}=\dfrac{289}{11}$，即平均值 $\dfrac{10\times10+\dfrac{89}{2}\times1}{10+1}\times2=\dfrac{289}{11}$

10. 袋中 1 號球 1 個，2 號球 2 個，3 號球 3 個，…，n 號球 n 個（$n\in N$），取到 k 號球得 k 元（$1\le k\le n$），假設任取一球得錢的期望值爲 E_n 元，(1) $E_{10}=$____________． (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{E_n}{n}=$____________．

$\boxed{\text{解答}}$ (1) 7; (2) $\dfrac{2}{3}$

$\boxed{\text{解析}}$ (1) $E_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\times\frac{k}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n+1}{3}$

即平均值 $\dfrac{1^2+2^2+3^2+......+n^2}{1+2+3+.....+n}=\dfrac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2n+1}{3}$，故 $E_{10}=\dfrac{2\times10+1}{3}=7$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{E_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{3}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n}=\frac{2}{3}$

11. 袋中有鈔票 1000 元 4 張，500 元 3 張，100 元 3 張，每張被取到的機會相等，今任取 3 張，則所得錢數的期望值爲____________元．

$\boxed{\text{解答}}$ 1740 元

$\boxed{\text{解析}}$ 任取 3 張錢數之期望值是任取一張錢數期望值之 3 倍

$\Rightarrow$ 所求期望值$=3\times(1000\times\frac{4}{10}+500\times\frac{3}{10}+100\times\frac{3}{10})=1740$

12. (1)投擲一公正的骰子一次，則出現點數的期望值 $=$＿＿＿＿＿＿；

(2)同時投擲兩公正的骰子，則出現點數和的期望值 $=$＿＿＿＿＿＿．

解答 (1)$\frac{7}{2}$;(2)7

解析 (1)

點數	1	2	3	4	5	6
機率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

投擲一公正骰子出現點數的期望值爲

$1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$

即平均值$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{7}{2}$

(2)《方法 1》

投擲兩公正骰子

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
機率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

投擲兩公正骰子點數和期望值

$=2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+$

$10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}=\frac{252}{36}=7$

《方法 2》利用(1)的結果，投擲兩公正骰子點數和的期望值 $=\frac{7}{2}\times2=7$

13. 投擲三個均勻的硬幣一次，若出現三正面得 8 元，二正面得 3 元，一正面得 1 元，爲使賭局公平，出現三反面應賠＿＿＿＿＿＿元．

解答 20

解析 投擲三硬幣，出現三反面賠x元，則$8\times\frac{1}{8}+3\times\frac{C_2^3}{8}+1\times\frac{C_1^3}{8}+(-x)\times\frac{1}{8}=0$

$\Rightarrow$ $x=8+9+3=20$

14. 若擲一均勻硬幣三次，每出現一次正面可得 10 元，一次反面賠 4 元，則所得金額的期望值爲＿＿元．

解答 9 元

解析 $3\times[10\times\frac{1}{2}+(-4)\times\frac{1}{2}]=9$，即平均值$\frac{10+(-4)}{2}\times3=9$

15. 6 個不同的球，任意放入 3 個不同的箱子，每箱個數不限，

(1)恰有一個空箱子的機率爲＿＿＿＿＿＿． (2)空箱子個數的期望值爲＿＿＿＿＿＿．

解答 (1)$\frac{62}{243}$;(2)$\frac{64}{243}$

解析 6 個不同的球，放入 3 個不同箱子，每箱個數不限

(1)恰有一個空箱子 $\Rightarrow$ 任意一個箱子爲空箱，共餘每箱至少 1 個

所求機率$=\frac{C_1^3\times(2^6-2)}{3^6}=\frac{3\times62}{729}=\frac{62}{243}$

(2)恰有二個空箱子之機率$=\dfrac{C_2^3\times 1}{3^6}=\dfrac{1}{243}$

所求空箱子個數的期望值$=1\times\dfrac{62}{243}+2\times\dfrac{1}{243}=\dfrac{64}{243}$

16. 某次考試中，有一部分試題採用多重選擇題，每題有五個敘述，其中正確的敘述可能不只一個，但也可能一個也沒有，必須完全選對才得 5 分，否則倒扣S分．某考生決定靠運氣瞎猜，而此部分得分期望值爲 0，若他對單獨一題猜對的機率爲P，則(1) $P=$____________，(2) $S=$____________．

解答　(1) $\dfrac{1}{32}$;(2) $\dfrac{5}{31}$

解析　每題有 5 個敘述，其猜答方式有$2^5=32$種，答對只有一種方式，故$P=\dfrac{1}{32}$

又答對得 5 分，答錯倒扣S分而得期望值爲 0　∴　$5\times\dfrac{1}{32}+(-S)\times\dfrac{31}{32}=0\Rightarrow S=\dfrac{5}{31}$

17. 某人投擲兩公正骰子，出現點數和爲 7 時，可得 1000 元，並獲得繼續投擲的權利，若再出現點數和爲 7 時，再得 1000 元，又可繼續投擲．如此繼續下去，直到擲出點數和不爲 7 時，才停止，則此人得獎金的期望值=____________元．

解答　200

解析　每人投擲出現點數和爲 7 的情形有(1，6)，(2，5)，(3，4)，(4，3)，(5，2)，(6，1)

∴　出現點數和爲 7 的機率$=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

故得獎金的期望值爲 $\underbrace{1000\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}}^{(一次點數和 7)}+\underbrace{2000\times(\dfrac{1}{6})^2\times\dfrac{5}{6}}^{(二次點數和 7)}+\underbrace{3000\times(\dfrac{1}{6})^3\times\dfrac{5}{6}}^{(三次點數和 7)}+\overset{\cdots\cdots\cdots}{\ldots}$

$=1000\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}\times[1+2\times(\dfrac{1}{6})+3\times(\dfrac{1}{6})^2+\ldots]=\dfrac{1250}{9}\times\dfrac{1}{(1-\dfrac{1}{6})^2}=200$

18. 將 5 個大小形狀相同，顏色不同的球，全投入 3 個不同的袋子中，則
(1)每個袋子中均有球的機率爲____________．　(2)空袋子個數的期望值爲____________個．

解答　(1) $\dfrac{50}{81}$;(2) $\dfrac{32}{81}$

解析　5 個不同顏色的球放入 3 個不同的袋子中，其放入法有$3^5=243$種

(1)每個袋子均有球，依個數安排可分成兩類$\begin{cases}(3,1,1)\\(2,2,1)\end{cases}$

放法有$C_3^5\times C_1^2\times C_1^1\times\dfrac{3\,!}{2\,!}+C_2^5\times C_2^3\times C_1^1\times\dfrac{3!}{2!}=60+90=150$，所求機率爲$\dfrac{150}{243}=\dfrac{50}{81}$

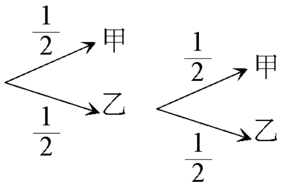
(2)∴　空袋子個數的期望值　$=0\times\dfrac{150}{243}+1\times\dfrac{90}{243}+2\times\dfrac{3}{243}=\dfrac{96}{243}=\dfrac{32}{81}$

空袋子個數	0	1	2
機　　率	$\dfrac{150}{243}$	$\dfrac{90}{243}$	$\dfrac{3}{243}$

19. 甲、乙兩人下棋，兩人棋力相當，規定先勝 3 局者可得獎金 1000 元，但每次對局均須分出勝負，不許和局．今兩人進行到甲勝 2 局，乙勝 1 局時，比賽因故停止，依公平的原則，來分此 1000 元獎金，則甲應得____________元．

解答　750

解析　若比賽不終止，繼續比到先勝 3 局才停，其情形有

（甲勝 2 局，乙勝 1 局）

∴　甲先勝 3 局的機率$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，故甲應得$1000\times\frac{3}{4}=750$元

20. 某人參加保齡球賽，每場比賽得勝機率爲$\frac{1}{3}$，失敗機率爲$\frac{2}{3}$．今參加五場比賽，規定勝一場可得獎金 1000 元，敗一場罰款 400 元，則

(1)此人至少贏得 3000 元的機率爲____________．　(2)此人獲得獎金的期望值爲____________．

解答　(1)$\frac{11}{243}$;(2)$\frac{1000}{3}$元

解析　(1)此人至少贏 3000 元，則五場比賽中須勝 4 場輸 1 場或勝 5 場

∴　至少贏 3000 元的機率$=C^5_4(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})+C^5_5(\frac{1}{3})^5=\frac{10+1}{243}=\frac{11}{243}$

(2)

比賽結果	5 勝	4 勝 1 負	3 勝 2 負	2 勝 3 負	1 勝 4 負	5 負
所得款額	5000	3600	2200	800	-600	-2000
機率	$(\frac{1}{3})^5$	$C^5_4(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})$	$C^5_3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2$	$C^5_2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3$	$C^5_1(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^4$	$(\frac{2}{3})^5$

期望值 $=5000\times(\frac{1}{3})^5+3600\times C^5_4\times(\frac{1}{3})^4\times(\frac{2}{3})+2200\times C^5_3\times(\frac{1}{3})^3\times(\frac{2}{3})^2+$

$800\times C^5_2\times(\frac{1}{3})^2\times(\frac{2}{3})^3-600\times C^5_1\times(\frac{1}{3})\times(\frac{2}{3})^4-2000\times(\frac{2}{3})^5=\frac{1000}{3}$（元）

期望值即平均值知所求爲$[1000\times\frac{1}{3}+(-400)\times\frac{2}{3}]\times 5=\frac{1000}{3}$

21. 某人投籃命中率爲 0.4，若讓他連續投籃直到中了才停止，則其投籃次數的期望值 $=$____________次．

解答　$\frac{5}{2}$

解析　因每次投籃命中率爲 0.4，不中的機率爲 0.6，而命中後即停止

故投籃次數期望值$=0.4+2\times(0.6)\times(0.4)+3\times(0.6)^2\times(0.4)+\ldots=(0.4)\times\frac{1}{(1-0.6)^2}=\frac{5}{2}$（次）

22. 擲 4 個公正硬幣，若出現四個正面，可得 20 元，三個正面可得 15 元，二個正面可得 10 元，一個正面可得 5 元，則爲使賭局公平起見，得四個反面應付____________元才公平．

解答　160

解析　擲 4 個公正硬幣，出現

4 個正面的機率$C^4_4(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$；　3 個正面的機率$C^4_3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^1=\frac{4}{16}$，

2 個正面的機率$C^4_2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2=\frac{6}{16}$，　1 個正面的機率 $C^4_1(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^3=\frac{4}{16}$，

4 個反面的機率$C^4_0(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$

設出現 4 反面應付 x 元，爲求賭局公平　$\Rightarrow$　期望值$=0$

$$\Rightarrow \quad 20\times\frac{1}{16}+15\times\frac{4}{16}+10\times\frac{6}{16}+5\times\frac{4}{16}+(-x)\times\frac{1}{16}=0$$

$$\Rightarrow \quad x=20+60+60+20=160\text{元}$$

23. 甲、乙二人下棋爲賭，約定先贏 3 局者勝，敗者付給勝者 1000 元，已知甲、乙二人棋藝相等，現於甲勝 2 局、乙勝 1 局時，比賽因故中止且決定不再比賽，如按機率處理，乙應付給甲____________元才合理．

解答　500

解析　在甲勝 2 局，乙勝 1 局時，繼續比賽，則

$$\text{甲勝的機率}=\underset{(\text{甲})}{\frac{1}{2}}+\underset{(\text{乙，甲})}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{4} \qquad \text{乙勝的機率}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$\therefore$ 甲得款額的期望值$1000\times\frac{3}{4}+(-1000)\times\frac{1}{4}=500$，故乙應給甲 500 元才算合理

24. 一袋中有 10 個樣品，其中有 2 個不良品．今自袋中任取一個樣品，取得良品則放回，直到取到不良品才停止，試求所取樣品次數的期望值爲____________．

解答　5 次

解析　每次取出良品的機率$=\frac{4}{5}$，不良品的機率$=\frac{1}{5}$

$$\therefore \quad \text{期望值}E=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+3\times(\frac{4}{5})^2\times(\frac{1}{5})+4\times(\frac{4}{5})^3\times(\frac{1}{5})+\ldots$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{5}E=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+2\times(\frac{4}{5})^2\times(\frac{1}{5})+3\times(\frac{4}{5})^3\times(\frac{1}{5})+4\times(\frac{4}{5})^4\times(\frac{1}{5})+\ldots$$

$$\text{兩式相減得}\frac{1}{5}E=1\times\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+(\frac{4}{5})^2\times\frac{1}{5}+(\frac{4}{5})^3\times\frac{1}{5}+\ldots=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{4}{5}}=1\Rightarrow \quad E=5\text{次}$$

25. 袋中有編號 1，2，3 的三個白球，編號 1，2，3，4 的四個紅球，編號 1，2，3，4，5 的五個黑球，今任意抽取兩球且每球被取中的機率相等，求

(1)兩球不同色的機率爲____________．　(2)兩球號碼和的期望值爲____________．

解答　(1)$\frac{47}{66}$;(2)$\frac{31}{6}$

解析

$$\begin{cases}\text{白}：1,2,3\\ \text{紅}：1,2,3,4\\ \text{黑}：1,2,3,4,5\end{cases}$$

(1) 白紅　紅黑　黑白

$$\frac{C_1^3C_1^4+C_1^4C_1^5+C_1^5C_1^3}{C_2^{12}}=\frac{12+20+15}{66}=\frac{47}{66}$$

$$(2)[\frac{(1+2+3)+(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5)}{12}]\times 2=\frac{31}{6}$$

26. 擲三個骰子一次，若點數最大爲 x，求(1)$x=6$ 的機率爲_________．　(2)求 x 的期望值爲__________．

解答　(1)$\frac{91}{216}$;(2)$\frac{119}{24}$

解析 (1) $\dfrac{6^3-5^3}{6^3}=\dfrac{91}{216}$

(2) $1\times\dfrac{1}{216}+2\times\dfrac{2^3-1}{216}+3\times\dfrac{3^3-2^3}{216}+4\times\dfrac{4^3-3^3}{216}+5\times\dfrac{5^3-4^3}{216}+6\times\dfrac{6^3-5^3}{216}$

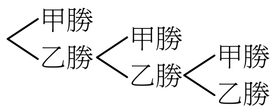
$=\dfrac{1}{216}+\dfrac{14}{216}+\dfrac{57}{216}+\dfrac{148}{216}+\dfrac{305}{216}+\dfrac{546}{216}=\dfrac{119}{24}$

27. 甲、乙二人網球比賽，約定先贏 3 局者勝，敗者應付給勝者 4000 元．若已知甲、乙二人實力相當，現於甲勝 2 局時因故不能繼續比賽，如按機率處理，乙應付給甲__________元．

解答 3000

解析 $P(\text{甲勝})=\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{7}{8}$，$P(\text{乙勝})=(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{1}{8}$

$E(\text{甲})=4000\times\dfrac{7}{8}+(-4000)\times\dfrac{1}{8}=3000$（元）



28. 五骰子投擲一次，若五骰子同點，則可得 1200 元，若恰四骰子同點，則可得 600 元，則投擲一次之期望值為__________元．

解答 $\dfrac{25}{2}$

解析

獎金	1200	600
機率	$6\times(\dfrac{1}{6})^5$	$C_1^6\times C_1^5\times\dfrac{5!}{4!}\times(\dfrac{1}{6})^5$

xxxxy

$\therefore$ 期望值為 $1200\times(\dfrac{1}{6})^4+600\times\dfrac{25}{6^4}=\dfrac{25}{2}$ 元

29. 袋中有 2 個紅球，4 個白球，5 個黃球，每球被取的機會相同，從袋中一次取出三球，則得黃球個數的期望值為何?

解答 $\dfrac{15}{11}$ 個

解析 設取出三球中，取到黃球個數以 X 表示，則其機率分布如下（黃球 5 個，非黃球 6 個）

X	0	1	2	3
機率	$\dfrac{C_3^6}{C_3^{11}}$	$\dfrac{C_1^5C_2^6}{C_3^{11}}$	$\dfrac{C_2^5C_1^6}{C_3^{11}}$	$\dfrac{C_3^5}{C_3^{11}}$

所以取到黃球個數的期望值 $E(X)=1\times\dfrac{75}{C_3^{11}}+2\times\dfrac{60}{C_3^{11}}+3\times\dfrac{10}{C_3^{11}}=\dfrac{225}{165}=\dfrac{15}{11}$（個）

期望值即平均值知所求為 $\dfrac{5}{2+4+5}\times3=\dfrac{15}{11}$

30. 同時擲三粒骰子，如果恰有兩粒點數相同時，可得 200 元獎金，三粒點數都相同時，可得 500 元獎金，其餘的都沒獎金，求此試驗得獎金的期望值。

解答 $\dfrac{875}{9}$ 元

解析 設得獎金的金額以 X 表示，則其機率分布

X	0	200	500
機率	$\dfrac{120}{216}$	$\dfrac{6\times5\times3}{216}$	$\dfrac{6}{216}$

期望值 $E(X)=200\times\dfrac{90}{216}+500\times\dfrac{6}{216}=\dfrac{21000}{216}=\dfrac{875}{9}$ （元）