高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：98.05.27.
範圍	2-6 遞迴數列	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

( ) 1. 設數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=1$及遞迴關係式$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}$，n爲正整數，則$\sum_{k=1}^{40}a_k=$

(1)$\left(\frac{1}{2}\right)^{40}$ (2)$\frac{1850}{4}$ (3) 430 (4)210 (5)60．

解答 3

解析 $\because a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}$ 且 $a_1=1$，$\therefore a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}$，

表示$\langle a_n\rangle$爲首項 1，公差$\frac{1}{2}$的等差數列，$\sum_{k=1}^{40}a_k=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{40}=\frac{40\times\left(2+39\times\frac{1}{2}\right)}{2}=430$．

( ) 2. (複選)數列$\langle a_n\rangle$中，$a_1=1$ 且 $a_{k+1}=a_k+2$，則

(1) $a_2=3$ (2) $S_2=4$ (3) $S_3=8$ (4) $S_4=16$ (5) $S_n=n^2$．

解答 1245

解析 $a_{k+1}-a_k=2$ 表示$\langle a_n\rangle$爲首項 1，公差 2 的等差數列，

$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$，$S_n=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=\frac{n[1+(2n-1)]}{2}=n^2$，

故 $a_2=3$，$S_2=4$，$S_3=9$，$S_4=16$，$S_n=n^2$．

( ) 3. (複選)數列$\langle a_n\rangle$的遞迴關係式如下：$a_1=3$ 且 $a_n=a_{n-1}+(3n-1)$，n爲正整數且$n\geq 2$，則下列何者正確？ (1) $a_2=8$ (2) $a_3=16$ (3) $a_4=24$ (4) $a_n=2n^2+n-2$ (5) $a_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$．

解答 125

解析 $\because a_n=a_{n-1}+(3n-1)$，

$$\begin{aligned}
\therefore a_2&=a_1+3\times2-1=3+6-1=8\\
a_3&=a_2+3\times3-1=8+9-1=16\\
a_4&=a_3+3\times4-1=16+12-1=27\\
&\vdots\\
+)\,a_n&=a_{n-1}+3\cdot n-1\\
\hline
a_n&=a_1+3(2+3+\cdots\cdots+n)-(n-1)\cdot1=3\times(1+2+3+\cdots\cdots+n)-(n-1)\\
&=3\times\frac{n(n+1)}{2}-(n-1)=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1
\end{aligned}$$

( ) 4. (複選)數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=1$ 且 $a_{n+1}=a_n+3n^2$，n爲自然數，下列何者爲真？

(1) $a_n=1+\frac{n(n-1)(2n-1)}{2}$ (2) $a_n=1+\frac{n(n+1)}{3}$ (3) $a_n<a_{n+1}$ (4) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ (5) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=1$．

解答 135

解析 (1)○：$\because a_{n+1}=a_n+3n^2$，

$\therefore a_2=a_1+3\times1^2$

$a_3=a_2+3\times2^2$

$$\vdots$$

$$+)a_n = a_{n-1} + 3\times(n-1)^2$$

$$a_n = a_1 + 3\left[1^2 + 2^2 + \cdots\cdots + (n-1)^2\right] = 1 + 3\times\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} = 1 + \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{2}.$$

(3)○：$\because a_{n+1} = a_n + 3n^2 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 3n^2 > 0$， $\therefore a_n < a_{n+1}$.

(4)✕：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(5)○：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^3} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2n^3}\right] = 1$.

(　　) 5. (複選)數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1 = \sqrt{2}$且$a_{n+1} = 2^n a_n$， n爲正整數，則下列何者爲真？

(1) $a_2 = 2\sqrt{2}$　(2) $a_3 = 8$　(3) $a_4 = 64\sqrt{2}$　(4) $a_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$　(5) $a_n = 2^{\frac{n^2-n+1}{2}}$.

解答　135

解析　(1)○：　$a_2 = 2^1\cdot a_1 = 2\sqrt{2}$.

(2)✕：　$a_3 = 2^2\cdot a_2 = 4\left(2\sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2}$.

(3)○：　$a_4 = 2^3\cdot a_3 = 8\left(8\sqrt{2}\right) = 64\sqrt{2}$.

(4)✕

(5)○：$a_2 = 2^1\cdot a_1$

$a_3 = 2^2\cdot a_2$

$$\vdots$$

$$\times)a_n = 2^{n-1}\cdot a_{n-1}$$

$$a_n = 2^1\times 2^2\times\cdots\cdots\times 2^{n-1}\cdot a_1 = 2^{1+2+\cdots\cdots+(n-1)}\cdot\sqrt{2} = 2^{\frac{(n-1)\cdot n}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{n^2-n}{2}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{n^2-n+1}{2}}.$$

(　　) 6. 數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1 = 2$且$a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$，則$a_{1000}$的值爲　(1)2　(2) -1　(3) $\frac{1}{2}$　(4)0　(5) -2 .

解答　1

解析　$a_1 = 2$， $a_2 = -1$， $a_3 = \frac{1}{2}$， $a_4 = 2$， $a_5 = -1$， $a_6 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2,\ -1,\ \frac{1}{2}$,............... 每 3 個一循環，

由循環性知，$1000 \div 3 = 333\cdots 1$，故$a_{1000} = 2$.

二、填充題　(每題 10 分)

1. 數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1 = 1$且$a_{n+1} = 2a_n + 1$， n爲自然數，則$a_{12} =$____________ .

解答　4095

解析　$\because a_{n+1} = 2a_n + 1$,

$\therefore\ a_2 = 2a_1 + 1 = 2 + 1$,

$a_3 = 2a_2 + 1 = 2\times(2+1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$,

$a_4 = 2a_3 + 1 = 2\times\left(2^2 + 2 + 1\right) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$,

$$a_{12} = 2^{11} + 2^{10} + \cdots\cdots + 2 + 1 = \frac{1\times\left(2^{12}-1\right)}{2-1} = 4095 \Leftarrow \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}\text{ 等比級數公式}$$

2. 數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1 = 2$且$a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$， n爲正整數，則$a_{10} =$____________ .

解答 $\frac{1}{5}$

解析 $a_2=\frac{1}{2}\times a_1$，

$a_3=\frac{2}{3}\times a_2$，

……，

$a_{10}=\frac{9}{10}\times a_9$

$\Rightarrow a_{10}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\cdots\times\frac{9}{10}\times a_1=\frac{1}{10}\times 2=\frac{1}{5}$.

3. 數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=1$且$a_{n+1}=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$， n爲自然數，求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=$__________ .

解答 3

解析 $\because a_{n+1}=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$

$\therefore a_2=a_1=1$，

$a_3=a_1+a_2=1+1=2$，

$a_4=a_1+a_2+a_3=1+1+2=4$，

$a_5=a_1+a_2+a_3+a_4=1+1+2+4=8$，

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots\cdots=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+2=3$.

4. 有一數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=1$且$a_{n+1}=a_n+2n+1$，求$\sum_{k=1}^{10}a_k=$__________ .

解答 385

解析 $\because a_{n+1}=a_n+2n+1$，

$\therefore a_2=a_1+2\times1+1=1+3$，

$a_3=a_2+2\times2+1=1+3+5$，

$a_4=a_3+2\times3+1=1+3+5+7$，

可推得$a_n=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$， $\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=1^2+2^2+\cdots\cdots+10^2=\frac{10\times11\times21}{6}=385$.

5. 已知數列$\langle a_n\rangle$定義爲$\begin{cases}a_1=3\\ a_{n+1}=a_n+2n\end{cases}$， n爲正整數，求$a_{100}=$__________ .

解答 9903

解析 $\because a_{n+1}=a_n+2n$，

$\therefore a_2=a_1+2\times1$

$a_3=a_2+2\times2$

$\vdots$

$\vdots$

$+)a_n=a_{n-1}+2\times(n-1)$

$a_n=a_1+2\left[1+2+\cdots\cdots+(n-1)\right]=3+2\times\frac{(n-1)\cdot n}{2}=n^2-n+3$，

$\therefore a_{100}=100^2-100+3=9903$.

6. 數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=2$， $a_2=3$且$a_{n+2}=3a_{n+1}+a_n$， n爲正整數，求$a_4=$__________ .

解答　36

解析　$\because a_{n+2}=3a_{n+1}+a_n$，$\therefore a_3=3a_2+a_1=3\times3+2=11$，$a_4=3a_3+a_2=3\times11+3=36$．

7. *Fibonacci* 數列$\langle a_n\rangle$定義為$\begin{cases}a_1=1,\ a_2=1\\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\end{cases}$，請問第一個滿足$a_n=n^2$（其中$n$為正整數且$n>2$）的

$n=$__________．

解答　12

解析　$\because a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，

$\therefore a_3=a_2+a_1=1+1=2$，

$a_4=a_3+a_2=2+1=3$，

$a_5=a_4+a_3=3+2=5$，

$a_6=a_5+a_4=5+3=8$，

$a_7=a_6+a_5=8+5=13$，

$a_8=a_7+a_6=13+8=21$，

$a_9=a_8+a_7=21+13=34$，

$a_{10}=a_9+a_8=34+21=55$，

$a_{11}=a_{10}+a_9=55+34=89$，

$a_{12}=a_{11}+a_{10}=89+55=144=12^2$，$\therefore n=12$．

8. 數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=2$，$a_2=1$且$a_n=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$，$n\ge2$，求$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=$__________．

解答　4

解析　$\because a_n=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$，$\therefore {a_n}^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$，表$a_n$為$a_{n-1}$，$a_{n+1}$的等比中項，即數列$\langle a_n\rangle$為等比數列，

$\because a_1=2$，$a_2=1$，$\therefore r=\dfrac{1}{2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots=\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{2}}=4$．

9. 數列$\langle a_n\rangle$中，滿足$a_1=\sqrt{2}$且$a_n=\sqrt{2a_{n-1}}$，n為正整數且$n\ge2$，求$\lim_{n\to\infty}a_n$之值為__________．

解答　2

解析　$\because a_n=\sqrt{2a_{n-1}}$，$\therefore a_2=\sqrt{2a_1}=\sqrt{2\sqrt{2}}$，$a_3=\sqrt{2a_2}=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$，……，

設$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\cdots}}}=x$，則$\sqrt{2x}=x$，平方$\Rightarrow 2x=x^2\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow x=2$或$0$（不合），

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=2$．

10. 有一數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=0$且$a_{n+1}=a_n+3n+3$，n為正整數，則$a_{26}=$__________．

解答　1050

解析　$\because a_{n+1}=a_n+3n+3$，

$\therefore a_2=a_1+3\times1+3$

$a_3=a_2+3\times2+3$

$\vdots$

$+)\,a_{26}=a_{25}+3\times25+3$

$a_{26}=a_1+3(1+2+\cdots\cdots+25)+25\times3=0+3\times\dfrac{25\times26}{2}+75=1050$．

11. 設一數列$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式滿足$a_1=1$且$a_{n+1}=a_n+(-1)^n\times n^2$， n爲正整數，求$a_9=$____________ .

解答 37

解析
$$
\begin{aligned}
&a_2=a_1+(-1)(1^2)=a_1-1^2\\
&a_3=a_2+(-1)^2(2^2)=a_2+2^2\\
&a_4=a_3+(-1)^3(3^2)=a_3-3^2\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_9=a_8+(-1)^8(8^2)=a_8+8^2\\
\hline
&a_9=a_1-1^2+2^2-3^2+\cdots\cdots+8^2=(2^2+4^2+6^2+8^2)-(3^2+5^2+7^2)=37
\end{aligned}
$$
.

12. 數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+3)}$且$n$爲正整數，若$a_1=\dfrac{1}{3}$，則$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$____________ .

解答 $\dfrac{3}{4}$

解析
$$
\begin{aligned}
&a_2=a_1+\frac{1}{2\times 4}\\
&a_3=a_2+\frac{1}{3\times 5}\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_n=a_{n-1}+\frac{1}{n\times(n+2)}\\
\hline
&a_n=a_1+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+2)}\\
&\quad=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+2)}\\
&\quad=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)
\end{aligned}
$$
$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-0-0\right)=\dfrac{3}{4}$.

13. 有一數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_1=1$且$a_{n+1}=1+\dfrac{2a_n}{3}$， n爲正整數，求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3-a_n)=$____________ .

解答 6

解析 方法一：設$a_{n+1}-k=\dfrac{2}{3}(a_n-k)\Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{k}{3},\quad k=3$

即$a_{n+1}-3=\dfrac{2}{3}(a_n-3)$

$$
\begin{aligned}
&a_2-3=\frac{2}{3}(a_1-3)\\
&a_3-3=\frac{2}{3}(a_2-3)\\
&a_4-3=\frac{2}{3}(a_3-3)\\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

$$\times) a_n - 3 = \frac{2}{3}(a_{n-1} - 3)$$

$$a_n - 3 = (\frac{2}{3})^{n-1}(a_1 - 3) \Rightarrow a_n = -2(\frac{2}{3})^{n-1} + 3$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(3 - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2 + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{2}{1-\frac{2}{3}} = 6$$

方法二：

$\because a_{n+1} = 1 + \frac{2}{3}a_n \cdots\cdots①$

$\therefore a_n = 1 + \frac{2}{3}a_{n-1} \cdots\cdots②$

$① - ② \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3}(a_n - a_{n-1})$

而 $a_1 = 1$， $a_2 = 1 + \frac{2}{3}a_1 = \frac{5}{3}$， $a_2 - a_1 = \frac{2}{3}$，

表示數列 $\langle a_{n+1} - a_n \rangle$ 爲首項 $\frac{2}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ 的等比數列，

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots\cdots + (a_n - a_{n-1})$$

$$= 1 + \frac{\frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]}{1 - \frac{2}{3}} = 1 + 2\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(3 - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{1-\frac{2}{3}} = 6 .$$

14. (1)數列 $\langle a_n \rangle$ 中， $a_1 = 1$ 且 $2a_{n+1} = a_n + 2$ ， n 爲正整數，則 $a_n =$＿＿＿＿＿＿．(2)承(1)，則 $\lim_{n\to\infty} a_n =$＿＿＿＿＿＿．

解答　(1) $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$；　(2)2

解析　$a_1 = 1$， $2a_{n+1} = a_n + 2 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$，

設 $(a_{n+1} - k) = \frac{1}{2}(a_n - k) \Rightarrow k = 2$

$$\therefore a_2 - 2 = \frac{1}{2}(a_1 - 2)$$

$$a_3 - 2 = \frac{1}{2}(a_2 - 2)$$

$$\vdots$$

$$\times) a_n - 2 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 2)$$

$$a_n - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times (-1)$$

$$\therefore a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 2 .$$

15. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 2$， $a_2 = 5$， 且 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$， n 是任意自然數，試求

(1) a_3，a_4，a_5．(2)第n項a_n（用n的式子表示）．(3) $\sum_{k=1}^{50} a_k = ?$

解答　(1) $a_3 = 8$，$a_4 = 11$，$a_5 = 14$;(2) $3n-1$;(3)3775

解析　由$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$，經整理$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$，$n$是任意自然數，故此數列爲等差數列，其公差爲$a_2 - a_1 = 3$，

(1) $a_3 = 5+3 = 8$，$a_4 = 8+3 = 11$，$a_5 = 11+3 = 14$．

(2) $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + 3\times(n-1) = 3n-1$．

(3) $\sum_{k=1}^{50} a_k = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{50} = \dfrac{50(4+49\times 3)}{2} = 3775$．

16. 設數列$\langle a_n \rangle$的首項$a_1 = 6$且滿足遞迴關係式$a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + 2$，$n$爲正整數，試求

(1)一般項a_n（以n表示）．(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$．

解答　(1) $8 - 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$；　(2)8

解析　(1)$\because a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + 2 \cdots\cdots$①

$a_n = \dfrac{3}{4}a_{n-1} + 2 \cdots\cdots$②

①－② $\Rightarrow a_{n+1} - a_n = \dfrac{3}{4}(a_n - a_{n-1})$，$n \ge 2$，

又$a_2 = \dfrac{3}{4}a_1 + 2 = \dfrac{3}{4}\times 6 + 2 = \dfrac{13}{2}$，又$a_2 - a_1 = \dfrac{13}{2} - 6 = \dfrac{1}{2}$，

表示數列$\langle a_{n+1} - a_n \rangle$爲首項$\dfrac{1}{2}$，公比$\dfrac{3}{4}$的等比數列，

故$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots\cdots + (a_n - a_{n-1})$

$$= 6 + \frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{3}{4}} = 6 + 2\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right] = 8 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[8 - 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\right] = 8$．

17. 設數列$\langle a_n \rangle$的前兩項$a_1 = 1$，$a_2 = 4$，且滿足遞迴關係式$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$，$n \ge 3$．求$a_5$，$a_6$與$a_7$的值．

解答　$a_5 = 101$，$a_6 = 304$，$a_7 = 911$

解析　遞迴關係式$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$，$n \ge 3$且$a_1 = 1$，$a_2 = 4$．

所以$a_3 = 2a_2 + 3a_1 = 8 + 3 = 11$；

$a_4 = 2a_3 + 3a_2 = 22 + 12 = 34$；

$a_5 = 2a_4 + 3a_3 = 68 + 33 = 101$；

$a_6 = 2a_5 + 3a_4 = 202 + 102 = 304$；

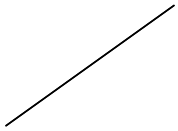
$a_7 = 2a_6 + 3a_5 = 608 + 303 = 911$．

18. 平面上n條直線，任兩條不平行，任三條不共點，此n條直線將平面分割成a_n個區域，則(1)求a_1，a_2，a_3，a_4．(2)寫出$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式．(3)求第n項a_n（以n表示）．

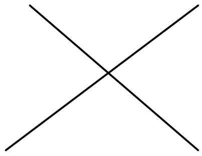
$\boxed{\text{解答}}$ (1) $a_1=2$， $a_2=4$， $a_3=7$， $a_4=11$;(2) $a_{n+1}=a_n+(n+1)$;(3) $\dfrac{n^2+n+2}{2}$

$\boxed{\text{解析}}$

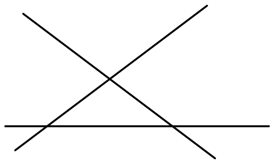
(1) $n=1\Rightarrow a_1=2$



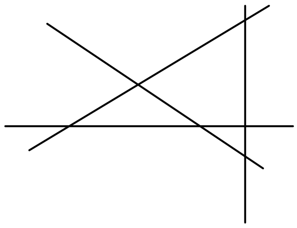
$n=2\Rightarrow a_2=4$



$n=3\Rightarrow a_3=7$



$n=4\Rightarrow a_4=11$



(2)第 $n+1$ 條直線 L_{n+1} 與前 n 條直線 L_1、L_2、……L_n 分別有一個交點，所以 L_{n+1} 上有 n 個交點，此 n 個交點將 L_{n+1} 分成 $n+1$ 個小段，每一小段將原先的一區割成二區（新增一區），即增加第 $n+1$ 條直線後，新增 $n+1$ 個區，故 $a_{n+1}=a_n+(n+1)$．

(3)∵ $a_{n+1}=a_n+(n+1)$ 且 $a_1=2$，

$$\begin{aligned}
\therefore\ \cancel{a_2}&=a_1+2\\
\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+3\\
&\vdots\\
\cancel{a_{n-1}}&=\cancel{a_{n-2}}+(n-1)\\
+)\ a_n&=\cancel{a_{n-1}}+n\\
\hline
a_n=a_1+(2+3+\cdots\cdots+n)&=2+\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{n^2+n+2}{2}
\end{aligned}$$

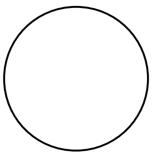
．

19. 平面上有 n 個圓，其中任三個圓均不共點，此 n 個圓最多可將平面分割成 a_n 個區域，則 (1)求 a_1， a_2， a_3， a_4．(2)寫出 $\langle a_n\rangle$ 的遞迴關係式．(3)求第 n 項 a_n（以 n 表示）．

$\boxed{\text{解答}}$ (1) $a_1=2$， $a_2=4$， $a_3=8$， $a_4=14$;(2) $a_{n+1}=a_n+2\times n$;(3) n^2-n+2

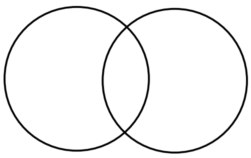
$\boxed{\text{解析}}$

(1) $a_1=2$



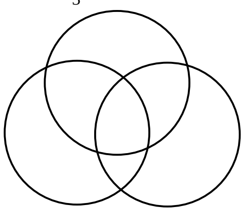
$n=1$

$a_2=4$



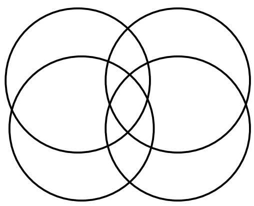
$n=2$

$a_3=8$



$n=3$

$a_4=14$



$n=4$

(2) $a_1=2$， $a_2=a_1+2$， $a_3=a_2+2\times2$， $a_4=a_3+2\times3$， $\therefore a_{n+1}=a_n+2\times n$．

(3)∵ $a_{n+1}=a_n+2\times n$ 且 $a_1=2$，

$$\begin{aligned}
\therefore\ \cancel{a_2}&=a_1+2\times1\\
\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+2\times2\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\cancel{a_{n-1}} = \cancel{a_{n-2}} + 2\times(n-2)$$

$$+)a_n = \cancel{a_{n-1}} + 2\times(n-1)$$

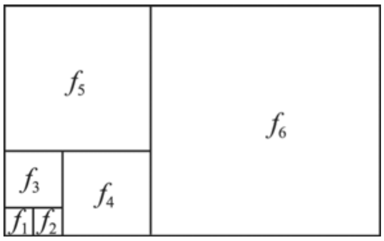
$$a_n = a_1 + 2\times[1+2+\cdots\cdots+(n-1)] = 2+2\times\frac{(n-1)\times n}{2} = n^2-n+2$$

$\therefore a_n = n^2-n+2$.

20.

如圖所示，f_n 分別代表所在正方形邊長，這些正方形的擺放依循往右，向上的規律：

已知 $f_1=1$，求 f_{11} 與 f_{12}（即求第 11 個與第 12 個正方形的邊長）.



解答　$f_{11}=89$，$f_{12}=144$

解析

可以觀察數列$\langle f_n\rangle$滿足 $f_1=f_2=1$，$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$（$n\geq 3$），即為費氏數列 .

$f_3=f_2+f_1=2$

$f_4=f_3+f_2=3$

$f_5=f_4+f_3=5$

....

$\cdots$ $f_9=34$，$f_{10}=55$，得 $f_{11}=f_9+f_{10}=34+55=89$，$f_{12}=f_{10}+f_{11}=55+89=144.$

21.

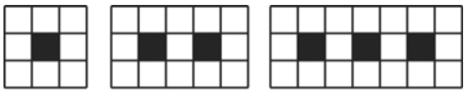
用黑白兩種顏色的正方形地磚依照如右的規律拼圖形：

設 a_n 是第 n 圖需用到的白色地磚塊數 .

(1)寫下數列$\langle a_n\rangle$的遞迴關係式 .

(2)求一般項 a_n .

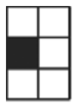
(3)拼第 95 圖需用到幾塊白色地磚 .



第1圖　第2圖　第3圖

解答　(1) $a_n=a_{n-1}+5$, $n\geq 2$;(2) $5n+3$;(3)478

解析　(1) a_n 代表「第 n 個圖需用到白色地磚的塊數」，可以發現圖形每次均增加 1 個如圖(1 個黑色地磚與 5 個白色地磚)，即 $a_n=a_{n-1}+5$，$n\geq 2$.



(2)上述這些圖形中，白色地磚的個數可視為一個首項為 8，公差為 5 的等差數列，故 $a_n=8+(n-1)\times 5=5n+3$.

(3)拼第 95 圖所需用到白色地磚數 $a_{95}=5\times 95+3=478$.

22. 長方形垛，最上層 2 個球，第二層 6 個球，第三層 12 個球，依此堆法，堆 20 層，則：

(１)第 20 層有__________個球。(２) 20 層總共有__________個球。

解答(１) 420；(２) 3080

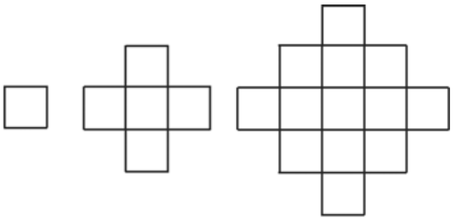
解析　由上而下，第 n 層有 a_n 個，則 a_1＝1×2，a_2＝2×3，a_3＝3×4，……故 a_{20}＝20×21＝420

而 $\sum_{n=1}^{20} a_n = \sum_{n=1}^{20} n(n+1) = \frac{20\times 21\times 22}{3} = 3080$

※ $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\times 2+2\times 3+3\times 4+.......+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

24. 用火柴棒拼出正方形群組圖形，如下圖規律所示，其中第 1 圖有 1 個正方形，第 2 圖有 5 個正方形，而第 3 圖則有13個正方形．按照這樣的規律，令 a_n 表示第 n 圖中正方形的總數．

(1)求一般項 a_n ．　(2)求 a_{20} 的值．



第1圖　第2圖　第3圖

解答　(1) $2n^2-2n+1$;(2) 761

解析

(1)觀察第 1 圖得 $a_1=1$ ．觀察第 2 圖得 $a_2=1+3+1=5$ ．

觀察第 3 圖得 $a_3=1+3+5+3+1=13$ ．

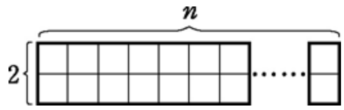
利用圖形關係得

$$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)+(2n-3)+\cdots+5+3+1$$

$$=\frac{(n-1)[1+(2n-3)]}{2}+(2n-1)+\frac{(n-1)[1+(2n-3)]}{2}=2n^2-2n+1\ .$$

(2) $a_{20}=2\cdot 20^2-2\cdot 20+1=761$ ．

25.在一個大小尺寸為n×2的棋盤上，用n個1×2的矩形蓋滿此棋盤而不重疊，共有a_n種方法，試求：

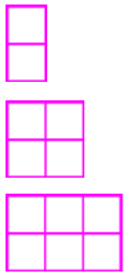


(1)　a_1、a_2、a_3。

(2)　$\langle a_n\rangle$的遞迴定義式。

答案　(1) $a_1=1, a_2=2, a_3=3$　(2) $a_1=1, a_2=2, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，$n\geq 3$

解析(1)　當 $n=1$ 時，直向覆蓋，有 1 種方法，即 $a_1=1$



當 $n=2$ 時，可直向或橫向覆蓋，共 2 種方法，即 $a_2=2$

當 $n=3$ 時，直向用 3 塊覆蓋，
或由左而右用 2 塊橫向覆蓋，1 塊直向覆蓋；
或由左而右用 1 塊直向覆蓋，2 塊橫向覆蓋，
共有 3 種方法，即 $a_3=3$

(2) 對 n×2 的棋盤，覆蓋方式可分成下列兩種情形：

①最左邊的 1×2 矩形，用 1 塊直向覆蓋，剩下的 ($n-1$)×2 棋盤，可有 a_{n-1}種覆蓋方法

②最左邊的 2×2 矩形，用 2 塊橫向覆蓋，剩下的 ($n-2$)×2 棋盤，可有 a_{n-2}種覆蓋方法

於是 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，$n\geq 3$