高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：98.04.22.					
範圍	2-3 排列(2)	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

( ) 1.「庭院深深深幾許」等七個字重排，則

(1)三個「深」字相連的排列數 ＝120．

(2)同字不相鄰的排列數 ＝240．

(3)首末排「深」字且同字不相鄰的排列數 ＝96．

(4)「庭、院」兩字排在「深」之左的排列數 ＝84．

(5)「庭、院」兩字排在「深」之左，「幾、許」兩字排在「深」之右的排列數 ＝40．

解答 124

解析

(1)三個「深」相連，將三個「深」綁在一起與其他字排列，排法有 $5!\times\frac{3!}{3!}=120$ 種．

(2)同字不相鄰，

「庭、院、幾、許」先排，再將「深」字插在 5 個間隔中的 3 個，$4!\times\frac{P^5_3}{3!}=240$ 種．

(3)首末排「深」且同字不相鄰，

$\boxed{深}$ ○∨○∨○∨○ $\boxed{深}$

「庭、院、幾、許」排入 4 個○中，第三個「深」排入中間 3 個間隔之一，

其排法有 $4!\times P^3_1=72$ 種．

(4)「庭、院」在「深」之左，

○○○○○幾許，排法有 $\frac{7!}{5!}$，

最左二位置填入「庭、院」兩字有 2！種填法，其餘三個位置填「深」字填法 $\frac{3!}{3!}=1$ 種，

故所有排法有 $\frac{7!}{5!}\times 2!\times\frac{3!}{3!}=84$ 種．

(5)「庭、院」在「深」之左，「幾、許」在深之右，

○○深深深○○

↓ ↓

「庭、院」 「幾、許」

排法有 $\frac{3!}{3!}\times 2!\times 2!=4$ 種．

( ) 2. 五對夫婦圍一圓桌而坐，下列何者正確？

(1)夫婦相對之坐法有 $4!\times 2^5$ 種．

(2)夫婦相鄰之坐法有 $4!\times 2^5$ 種．

(3)男女相間且夫婦相鄰之坐法有 $4!\times 5!$ 種．

(4)男女相間且夫婦相對之坐法有 $4!\times 2$ 種．

(5)男女相間且夫婦不相鄰之坐法有 $4!\times 13$ 種．

解答 25

解析

(1)其中一對夫婦先環排，其餘 4 對夫婦再排於剩餘的 4 條直徑的兩端 $\frac{2!}{2}\times 4!\times 2^4=4!\times 2^4$.

(2) 5 對夫婦視夫婦爲一體先環排，但夫婦兩人可交換 $\Rightarrow\ \frac{5!}{5}\times 2^5=4!\times 2^5$.

(3)視夫婦爲一體，可五對都男右女左或男左女右 $\Rightarrow\ \frac{5!}{5}\times 2\times 1^4=4!\times 2$.

(4)可五男先環排，太太分別坐其先生對面 $\Rightarrow\ \frac{5!}{5}\times 1=4!$.

(5) $ABCDE$ 先環排有 $\frac{5!}{5}=4!$種，

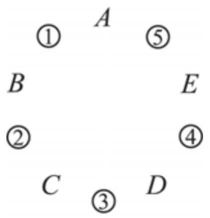
如下圖: a 有②③④可選，

(i)若 a 選②，則由③開始逆時針依次可爲 $bcde$，$ebcd$，$ebdc$，$ecbd$ 4 種 .

(ii)若 a 選③，則由④開始逆時針依次可爲 $bcde$，$bced$，$cbde$，$cbed$，$bdec$ 5 種 .

(iii)若 a 選④，則由⑤開始逆時針依次可爲 $bcde$，$cdeb$，$cedb$，$dceb$ 4 種 .

故所求爲 $4!\times(4+5+4)=4!\times 13$.



二、填充題 (每題 10 分)

1. 從 1、2、3、4、5、6、7 七個數中，組成數字不重複的三位數，則其中 3 的倍數有__________個 .

解答 78

解析

將 7 個數字分三類：$3k$ 型者有 3，6，$3k+1$ 型者有 1，4，7，$3k+2$ 型者有 2，5，

① $3k$ 型取 1 個，$3k+1$ 型取 1 個，$3k+2$ 型取 1 個排列之，三位數有 $2\times 3\times 2\times 3!=72$ 個 .

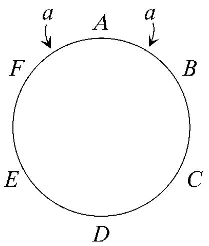
② $3k+1$ 型取 3 個排列之，三位數有 $1\times 3!=6$ 個，$\therefore$ 三位數有 $72+6=78$ 個 .

2. 六對夫婦圍圓桌聊天，試求男女相間且夫婦相鄰的坐法有__________種 .

解答 240

解析 設六對夫婦爲 Aa，Bb，Cc，Dd，Ee，Ff，

A，B，C，D，E，F 先入座，其坐法有 $5!$ 種，a 入座時，只限於 A 之左右兩間隔之一，當 a 坐定後，其餘 b，c，d，e，f 只有一種坐法，如下圖，故坐法有 $5!\times 2=240$ 種 .



3. 有四對夫婦圍一圓桌環狀而坐，則

(1)每對夫婦均相鄰的坐法有__________種 .

(2)男女間隔且夫婦均相鄰的坐法有__________種 .

解答 (1)96;(2)12

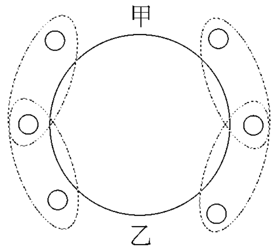
解析 (1)夫婦視為一體，排好後再互換位置，故坐法有$\frac{4!}{4}\times 2^4=96$種．

(2)男先入座，再將女安排在間隔中，其坐法有 2 種，故坐法有$\frac{4!}{4}\times 2=12$種．

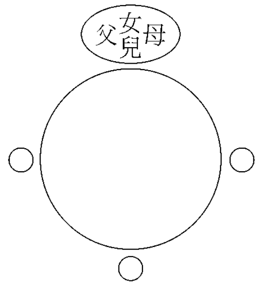
4. 本校高二畢業之旅，花東線梯隊舉行營火晚會，有某一小隊共 8 人，圍成一圓圈跳舞，若規定甲乙要相對，丙丁要相鄰，方法有________種．

解答 192

解析 $\underset{\uparrow \atop \text{甲乙相對}}{\frac{2!}{2}} \times \underset{\uparrow \atop \text{丙丁相鄰}}{(4\times 2!)}\times 4!=192$．



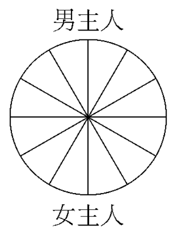
5. 一家六口圍圓桌而坐，若么女一定要坐在父母中間，試問共有________種坐法．



解答 12

解析 $\frac{4!}{4}\times \underset{\uparrow \atop \text{父母可對調}}{2!}=12$．

6. 6 對夫婦圍圓桌，不計方位，每對夫婦均相對而坐，有________種方法．



解答 3840

解析 主人夫婦先相對入座，坐法有$\frac{2!}{2}$，再讓五對夫婦入座有 5！種坐法，

此五對夫婦可對調有 2^5 種坐法，故所求為$\frac{2!}{2}\times 5!\times 2^5=3840$．

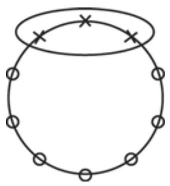
7. 5 對夫婦圍圓桌而坐，

(1)其中某三位女生要相鄰而坐，共有________種方法；

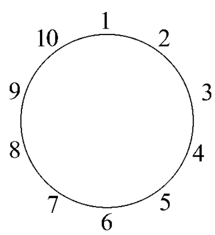
(2)如果每對夫婦都相對而坐，則有________種方法．

解答 (1)30240;(2)384

解析 (1)三位女生先排列坐下後，剩下的 7 個人，再坐在打圈的位置，共有 $3!\times 7!=30240$ 種．



視為 8 人環排 7!，3 女排列 3!．



(2)如下圖，任選一對坐在 1，6 的位置環排之後，剩下的四對夫婦在 2 到 5 的四直徑兩端互換，所以有$\frac{2!}{2}\times 4!\times 2^4=384$種坐法．

8. 本校高二班際排球比賽，日前結束，由某班奪冠．慶功宴時，16 名球員圍一長方形桌而坐，如果長邊每邊坐 5 人，短邊每邊坐 3 人，試問共有__________種坐法．（本題以階乘表示即可）

解答　8×15!

解析　$\frac{16!}{16}\times(5+3)=8\times15!$ ．

9. 紅，黃，白，…等 10 顆不同色的珠子，

(1)任選 6 顆作環狀排列，有__________種不同的排法．

(2)任選 6 顆（含紅，黃，白）串成一項圈，且紅，黃，白三色均不得相鄰，則可串出__________種不同的項圈．

解答　(1)25200;(2)210

解析　(1) $\frac{P^{10}_6}{6}=25200$ ．　(2) $\frac{P^7_3}{3}\times P^3_3\times\frac{1}{2}=210$ ．

項圈翻轉數 2

紅、黃、白三色插空隙排法

紅黃白以外 7 色選 3 色環狀排列

10. 顏色不同的 7 顆珠子，

(1)串成一條項鍊有__________種方法，(2)若其中紅，藍，綠三色須串一起，則有__________種方法．

解答　(1)360;(2)72

解析　(1) $\frac{7!}{7}\times\frac{1}{2}=360$ ．

(2) $\frac{5!}{5}\times3!\times\frac{1}{2}=72$ 種．

翻轉數

紅、藍、綠排法

紅藍綠xxxx環狀排列

11. 7 種不同色，塗長方體（長、寬、高各異）之各面，各面異色，且可任意翻轉，則有__________種不同之塗法．

解答　1260

解析　$7\times6\times\frac{P^7_4}{4}\times2\times\frac{1}{2}=1260$ ．

12. 有 10 種顏色，塗下列多面體，每面一色且每面顏色不同，多面體可任意翻轉，

(1)塗一正方體，有__________種方法．

(2)塗一長，寬，高均不相等之長方體，有__________種方法．

解答　(1)6300;(2)37800

解析　(1) $10\times9\times\frac{P^8_4}{4}\times\frac{1}{6}=6300$ ．　(2) $10\times9\times\frac{P^8_4}{4}\times2\times\frac{1}{2}=37800$ ．

13. 8 人圍坐，

(1)坐一正方桌，每邊 2 人，有__________種坐法．

(2)坐一長方桌，長邊 3 人，短邊 1 人，則有__________種坐法．

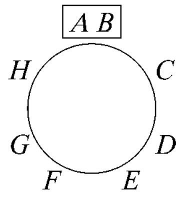
解答　(1)10080;(2)20160

解析　(1) $\frac{8!}{8}\times2=10080$ ．　(2) $\frac{8!}{8}\times(3+1)=20160$ ．

14. A，B，C，D，E，F，G，H 共 8 個人，圍一圓桌而坐，

(1) A，B 相鄰的坐法有____________種．

(2) A，B 相對而坐的方法有____________種．

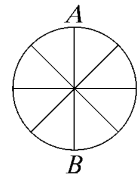


解答　(1)1440;(2)720

解析

(1)將 A, B 兩人綁在一起與其他 6 人環排再互換，$\frac{7!}{7}\times 2! = 1440$ 種坐法．

(2)A，B 相對而坐，即只有 $\frac{2!}{2}=1$ 種坐法，當 A，B 坐定後，其餘在 A，B 的左右 6 個位置 6 人入坐方法有 6！種，∴坐法有 $1\times 1\times 6! = 720$ 種．



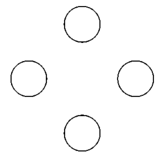
15. 三對夫婦 Aa， Bb， Cc，6 人圍圓桌而坐，

(1) Aa 相鄰，則坐法有___________種．　(2) Bb 不相鄰，則坐法有___________種．

解答　(1)48;(2)72

解析

(1)Aa 視為 1 人，與其他 4 人環狀排列，共有 $\frac{5!}{5}\times 2! = 48$ 種坐法．



(2) A， a， C， c 4 人環狀排列，有 $\frac{4!}{4}$ 種坐法，

4 個空位選 2 個排 B， b 有 $4\cdot 3$ 種坐法（如圖），　∴　共有 $\frac{4!}{4}\cdot P_2^4 = 72$ 種坐法．

16. 用五種不同的顏料塗一正四面體積木，則各面均異色的塗法有____________種．

解答　10

解析

從 5 色選出 1 色，塗底部塗法有 5 種，選 3 色塗正四面體 3 側面，又翻轉數 4，

塗法有 $5\times\frac{P_3^4}{3}\times\frac{1}{4}= 10$ 種．

17. 兄弟二人在排成一列的 20 個空位中，選坐不相鄰的兩個座位就座，則有____________種坐法．

解答　342

解析

(從 20 個座位任選兩個入座) − (選中兩相鄰座位的坐法)，∴　全部坐法有 $P_2^{20}=380$，

選中相鄰座位的選法有(1，2)，(2，3)，(3，4)，(4，5)，⋯，(19，20)共 19 種，

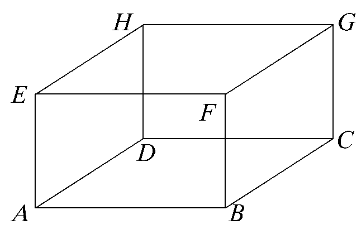
∴　兄弟二人相鄰而坐的坐法有 $19\times 2! = 38$，故所求為 $380-38=342$．

18. 以七種顏色，塗長、寬相等，高不同之長方體，每面異色，顏色不重複使用，其塗法有________種．

解答　630

解析　先塗□$ABCD$ 下底面，再塗□$EFGH$ 上底面，塗法有 $7\times 6=P_2^7$ 種，

再塗側面，故側面環排塗法有 $\frac{P_4^5}{4}$ 種，上下底面翻轉後相同，再除以 2，∴　所求塗法有 $P_2^7\times\frac{P_2^7}{4}\times\frac{1}{2} = 630$ 種．



19. 二年級甲、乙、丙三班的班長與副班長共六位，

(1)六位排成一列，排列數爲____________.

(2)六位排成一列，同班二位不相鄰的排列數爲____________.

(3)六位圍正三角桌而坐，每邊二人，則坐法有____________種.

(4)排成前後二列三行，同班二位同行之排列數爲____________.

解答 (1)720;(2)240;(3)240;(4)48

解析

(1)6 人排一列，共 $6!=720$ 種排法.

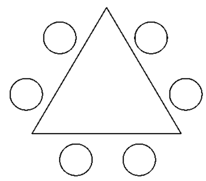
(2)同班 2 人不相鄰 $=$(全部)$-$(有 1 班 2 人相鄰)$+$(有 2 班 2 人相鄰)$-$(3 班皆 2 人相鄰)

選 2 班　每班 2 人可交換　2 班視爲 2 人，與剩下 2 人排列

$=6!-C_1^3\cdot 2\cdot 5!+C_2^3\cdot 2^2\cdot 4!-2^3\cdot 3!$

選 1 班　2 人可交換　2 人相鄰視爲 1 人，與剩下 4 人排列　每班 2 人可交換　3 班排列

$=720-720+288-48=240$.



(3)6 人入座每邊 2 人，1 種坐法經過旋轉，有 3 種情形視爲相同，

∴ 坐法有 $\dfrac{6!}{6}\times 2=240$ 種.

(4)同班 2 人有前、後 2 種排法，共 2^3 種排法，又 3 班排 3 行，有 $3!$ 種排法，

∴ 共 $2^3\cdot 3!=48$ 種排法.

20. 已知三艘不同的渡船，每船最多能載 4 人，試求 6 人渡河時，安全過渡的方法有____________種.

解答 690

解析 6 人渡河時，超載的情形有二類：

①6 人同搭乘一船，其搭乘方法有 $P_1^3=3$ 種.

②6 人中有 5 人同搭乘一船，另一人搭另外一船，其方法有 $6\times 1\times P_2^3=6\times 3\times 2=36$ 種.

∴ 6 人安全渡河的方法有 $3^6-3-36=690$ 種.

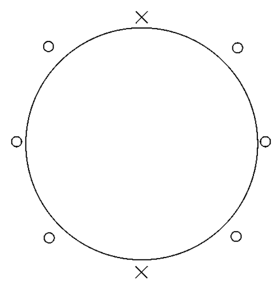
21. 若 4 個男生，4 個女生圍坐一圓桌用餐，則

(1)某兩個男生不相鄰的坐法有____________種.

(2)某兩個男生要相對而坐，且某兩個女生也要相對而坐的方法有____________種.

解答 (1)3600;(2)144

解析 (1) (全部)$-$(兩人相鄰)$=\dfrac{8!}{8}-\dfrac{7!}{7}\times 2!=3600$.



(2) $\dfrac{2!}{2}\times\underline{6\times 1}\times 4!=144$（種）.

兩女生的選法

男生先坐

22. 主人夫婦與賓客四對夫婦共 10 人，圍一圓桌而坐，依下列條件，求其坐法：

(1)任意坐.　(2)每對夫婦相鄰.　(3)男女相間.　(4)男女相間夫婦相鄰.

(5)主人夫婦相對而坐.　(6)每對夫婦皆相對而坐.

解答 (1)362880;(2)768;(3)2880;(4)48;(5)40320;(6)384

解析 (1) $\dfrac{10!}{10}=9!=362880$（種）．

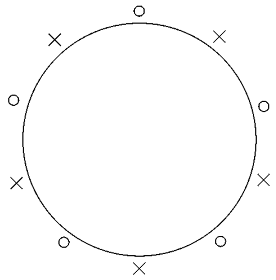
(2) $\dfrac{5!}{5}\times 2^{5}=768$ 種．

每對夫婦皆可互換位置

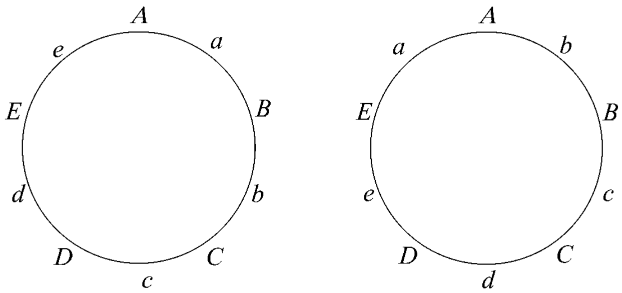
每對夫婦視爲一人，5 人環狀排列

(3)五位男生先坐，有 $\dfrac{5!}{5}=4!$ 種，

女生再坐入「×」的位置，有 $5!$ 種（直線排列），共有 $4!\times 5!=2880$ 種．



(4)五位男生先坐有 $4!$ 種，坐定後，太太只能選坐先生的左方或右方，故有 $4!\times 2=48$ 種．

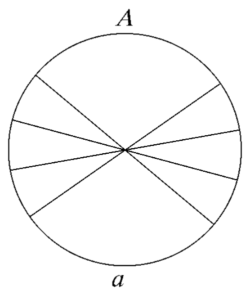


(5)主人夫婦先坐有 $\dfrac{2!}{2}=1$ 種，坐定後，其餘 8 人入座有 $8!$ 種，故共有 $8!=40320$ 種．

(6)主人夫婦先坐有 $\dfrac{2!}{2}=1$ 種，其餘 8 人的坐法有 $4!\times 2^{4}=24\times 16=384$ 種．

夫婦可對換

4 條線的排列



23. 用 6 種不同顏色，塗(1)正方體． (2)長方體（長寬高均不相等）． 有幾種塗法？

解答 (1)30;(2)180

解析 (1) $6\times 5\times\dfrac{P_4^4}{4}\times\dfrac{1}{6}=30$． (2) $6\times 5\times\dfrac{P_4^4}{4}\times 2\times\dfrac{1}{2}=180$．

下底

上底

下底

上底

24. 用 6 種不同顏色塗一正立方體積木，每面一色，且相鄰兩面不同色，試求下列塗法各多少種？

(1)恰用 3 色．　(2)恰用 4 色．　(3)恰用 5 色．　(4)恰用 6 色．

解答　(1)20;(2)90;(3)90;(4)30

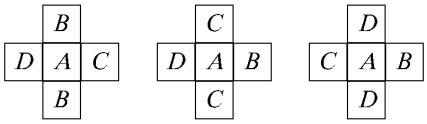
解析　(1)恰用 3 色：先從 6 色取出 3 色，取法有$C_3^6=\dfrac{P_3^6}{3\,!}=20$種，

三色塗正立方體，相鄰不同色，對面必同色，塗法只有 1 種，恰用三色塗法 $20\times1=20$ 種．

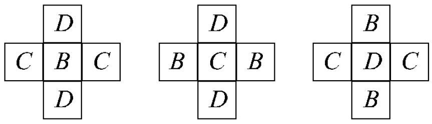
(2)恰用 4 色：先從 6 色取出 4 色，取法有$C_4^6=\dfrac{P_4^6}{4!}=15$種，

設取出 4 色爲A，B，C，D，塗法分兩類：

①上底A，下底A時，側面有 3 種（如下圖）．



②上底A，下底不是A時，側面有 3 種（如下圖），



∴　塗法共有 $15\times(3+3)=90$ 種．

(3)恰用 5 色：先從 6 色取出 5 色，取法有$C_5^6=\dfrac{P_5^6}{5\,!}=6$種，

5 色中有 1 色塗相對兩面，其餘 4 色塗側面，

∴　塗法有 $6\times5\times1\times\dfrac{4\,!}{4}\times\dfrac{1}{2}=6\times5\times3=90$ 種．

(4)恰用 6 色：每面均異色，先選一色塗上底選法 6 種，再選一色塗下底選法 5 種，

餘 4 色塗側面，塗法有$\dfrac{4!}{4}=6$種，塗好後可以翻轉，任何一面均可翻到上底，

即一種塗法經翻轉有 6 種不同情形，故塗法有 $6\times5\times\dfrac{4\,!}{4}\times\dfrac{1}{6}=30$ 種．

25. 由八顆不同珠子，

(1)串一項鍊，方法有幾種？　(2)取 6 顆置於桌面作一環，方法有幾種？

(3)取 6 顆作一環，再放一顆於環心，排法有幾種？

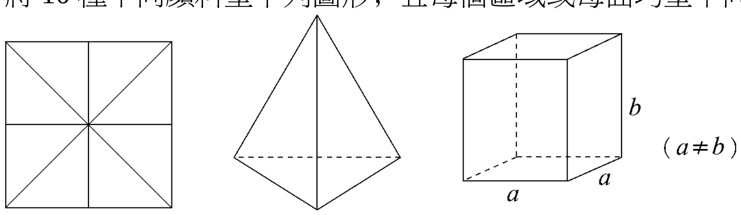
解答　(1)2520;(2)3360;(3)6720

解析　(1)$\dfrac{8!}{8}\times\dfrac{1}{2}=2520$．　(2) 置於桌面作一環(環排)$\dfrac{P_6^8}{6}=3360$．　(3) $8\times\dfrac{P_6^7}{6}=6720$．

另 7 顆取 6 顆環排

先放中心

26. 將 10 種不同顏料塗下列圖形，且每個區域或每面均塗不同顏色，各有幾種塗法？



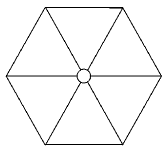
正方形　正四面體　四角柱

解答　(1)453600;(2)420;(3)18900

解析 (1)$\frac{P_8^{10}}{8}\times 2=453600$．　(2)$10\times\frac{P_3^9}{3}\times\frac{1}{4}=420$．　(3)$10\times 9\times\frac{P_4^8}{4}\times\frac{1}{2}=18900$．

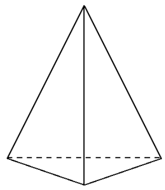
27. 用 7 種不同顏料塗下列圖形，則各有幾種塗法（每塊區域顏色不同）？

(1)



正六邊形

(2)



四面體

解答 (1)840;(2)280

解析 (1)$7\times\frac{P_6^6}{6}=840$．　(2)$7\times\frac{P_3^6}{3}=280$．(側稜長$\neq$底邊長)

28. 有 6 個球投入 4 個箱子中，求下列投入法各多少種？

(1)球相同，箱子相同，每箱投入球數不限．

(2)球不同，箱子不同，每箱投入球數不限．

(3)球相同，箱子不同，每箱投入球數不限．

(4)球相同，箱子不同，每箱至少投入一球．

(5)球不同，箱子不同，每箱至少投入一球．

解答 (1)9;(2)4096;(3)84;(4)10;(5)1560

解析 (1)球相同，箱子相同，則箱中投入球數決定其投入法有 (6，0，0，0)，(5，1，0，0)，(4，2，0，0)，(4，1，1，0)，(3，3，0，0)，(3，2，1，0)，(3，1，1，1)，(2，2，2，0)，(2，2，1，1)等，∴　共有 9 種投入法．

(2)球不同，箱子不同，則每一球均有 4 種不同投入法，∴　投入法有 $4^6=4096$ 種．

(3)球相同，箱子不同，則由(1)知

(6，0，0，0)投入法有$\frac{4!}{3!}=4$ 種，

(5，1，0，0)：$\frac{4!}{2!}=12$，

(4，2，0，0)：$\frac{4!}{2!}=12$，

(4，1，1，0)：$\frac{4!}{2!}=12$，

(3，3，0，0)：$\frac{4!}{2!2!}=6$，

(3，2，1，0)：$4!=24$，

(3，1，1，1)：$\frac{4!}{3!}=4$，

(2，2，2，0)：$\frac{4!}{3!}=4$，

(2，2，1，1)：$\frac{4!}{2!2!}=6$，

故投入法有 $4+12+12+12+6+24+4+4+6=84$ 種．

(4)球相同，箱子不同，每箱至少一球的投入法有(3，1，1，1)與(2，2，1，1)，

故投入法有$\dfrac{4!}{3!}+\dfrac{4!}{2!\,2!}=10$ 種．

(5)球不同，箱子不同，每箱至少一球的投入法 $=$(全部)$-$(有箱沒有球)

$=4^6-(4\times3^6-6\times2^6+4\times1^6)=4096-2916+384-4=1560$．

29. 大小相同的 10 個球中，有 5 個白球，3 個紅球，2 個黃球，分給 10 個小朋友，每人一球，方法有幾種?

解答　2520

解析　視 10 個小朋友分別在 1，2，3，…，9，10 這 10 個位置上，

再將 10 個球分別排放在 10 個位置，每種放法就是一種球分給小朋友的方法．

10 個球中，5 個白球，3 個紅球，2 個黃球排成一列，排法$\dfrac{10!}{5!\,3!\,2!}=\dfrac{10\times9\times8\times7\times6}{3!\,2!}=2520$

30. 有紅、黃、藍、白等 4 個不同的杯子及 5 種不同的飲料，每種飲料至少可以倒 4 杯，每個杯子倒入一種飲料，下列情形，倒法有幾種? (1)每個杯子的飲料都不同．(2)杯子裡的飲料可以相同．

解答　(1)120;(2)625

解析　(1)飲料都不同時，可視為從 5 種飲料中取 4 種在杯子的位置排列，其方法數為 $P_4^5=120$．

(2)飲料可相同時，每個杯子都有 5 種選擇，其方法數為 $5^4=625$．

31. a,b,c,d,e,f 等六個人排成一列，下列的條件下，各有多少排法?

(1) ab 相鄰，cd 相鄰，ef 也相鄰．(2) ab 不相鄰，cd 也不相鄰．

解答　(1)48 種;(2)336 種

解析　(1) $3!\cdot2^3=48$．

(2) $6!-5!\cdot2-5!\cdot2+4!\cdot2\cdot2=336$．

32. 三個紅球，二個白球，一個黑球，除了顏色不同之外，球的大小都相同，將這 6 個球送給小朋友，下列的條件下各有多少送法?

(1)小朋友有 6 人，每人一球．　(2)小朋友有 8 人，每人最多一球．

解答　(1)60 種;(2)1680 種

解析　(1) $\dfrac{6!}{3!\,2!}=60$．　(2) $\dfrac{8!}{3!\,2!\,2!}=1680$．