高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：98.05.07.					
範圍	2-3、4、5 排列、組合、二項式	班級		姓名	
		座號			

2-3-1.

(1) 甲、乙、丙、丁、戊 5 人排成一列，共有__120__種排法。

(2) 若甲、乙一定要排在相鄰的位置，則共有__48__種排法。

解：(1) 5！＝120 (種)

(2) 甲乙，丙，丁，戊 $\Rightarrow$ 4！×2！＝48 (種)

2-3-2.

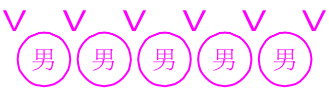
將 6 張椅子排成一列，讓 4 個小朋友就座，每人只能占用一張椅子，則共有__360__種坐法。

解：$P_4^6 = 6\times5\times4\times3 = 360$ (種)

2-3-3.

有 5 位男生與 3 位女生排成一列，若任意 2 位女生皆不相鄰，則有__14400__種排法。

解：5 位男生先排成一列 5！＝120



6 個空隙再排入 3 位女生：$P_3^6 = 120$

$\therefore\ 5!\times P_3^6 = 120\times120 = 14400$ (種)

2-3-4.

以 0，1，2，3，4，5 作三位數，數字可重覆，則：

(1) 三位數有__180__個。 (2) 偶數有__90__個。

解：(1) 百 十 個

5×6×6＝180 (個)

0，2，4

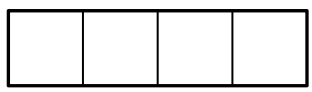
(2) 百 十 個

↑ ↑ ↑

5×6×3＝90 (個)

2-3-5.

以 6 種顏色塗右圖的 4 個正方形



(1) 4 個正方形皆為不同顏色的塗法有__360__種。。

(2) 相鄰的正方形不得塗相同顏色的塗法有__750__種。

解：(1) 6×5×4×3＝360 (種)

(2) $A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow D$

6×5×5×5＝750 (種)

D 5	A 6	B 5	C 5

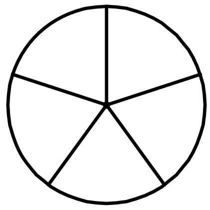
2-3-6.蘇姓夫婦邀宴其他 4 對夫婦，10 人圍坐一圓桌，每對夫婦都相鄰而坐，共有<u>　768　</u>種坐法。

$\boxed{解}$：5 對的環狀排列法有 $\dfrac{5!}{5}=4!$，又每對夫婦可以左右互換位置

$\therefore$ 共有 $4!\times 2^5=24\times 32=768$（種）

2-3-7.

如右圖，某可旋轉的摩天輪分為 5 個全等區域，為了夜間的燈光造景，5 個區域分別採用不同的燈光裝飾，若有 7 種不同顏色的燈光裝飾可供使用，則此摩天輪正面的夜間燈光造景有<u>　504　</u>種不同的顏色排列方式。



$\boxed{解}$：$\dfrac{P^7_5}{5}=\dfrac{7\times 6\times 5\times 4\times 3}{5}=504$（種）

2-3-8.

有一題多重選擇題，共有(A)、(B)、(C)、(D)、(E)五個選項，至少有一個選項正確的，小茹全部用猜的方式作答，則共有<u>　31　</u>種可能的猜題答案。

$\boxed{解}$：$2^5-1=31$（種）

2-4-1.

若 $C^n_3=2C^{n-1}_2$，則 $n=$<u>　6　</u>。

$\boxed{解}$：$\because$ $C^n_3=2C^{n-1}_2 \Rightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}=2\times\dfrac{(n-1)(n-2)}{2!}$，但 $n\in N$，$n\geq 3$

$\therefore$ $n-1\neq 0$，$n-2\neq 0$ $\therefore$ $\dfrac{n}{6}=\dfrac{2}{2}$ $\therefore$ $n=6$

2-4-2.

平面上有 P_1，P_2，…，P_{10} 等 10 個相異點，其中 P_1，P_2，P_3 三點共線，其餘任三點都不共線，則：

(1) 這些點共可決定<u>　43　</u>條直線。

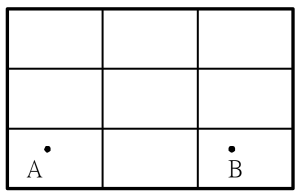
(2) 以這些點為頂點，共可決定<u>　119　</u>個三角形。

$\boxed{解}$：(1) $C^{10}_2-C^3_2+1=45-3+1=43$（條）

(2) $C^{10}_3-C^3_3=120-1=119$（個）

2-4-3.

右圖中至少包含 A 或 B 兩點之一的長方形共<u>　15　</u>個。



$\boxed{解}$：$C^1_1\times C^3_1\times C^1_1\times C^3_1+C^1_1\times C^3_1\times C^1_1\times C^3_1-C^1_1\times C^1_1\times C^1_1\times C^3_1$

（含 A 點）　　（含 B 點）　　（含 A 且含 B 點）

$=9+9-3=15$（個）

2-4-4.

將 6 本不同的書依下列分法，求其方法數

(1) 平分成三堆有 15 種。

(2) 平分給甲、乙、丙三人有 90 種。

(3) 分給甲 1 本，乙 2 本，丙 3 本方法有 60 種。

$\boxed{解}$：(1) $\dfrac{C_2^6C_2^4C_2^2}{3!}=\dfrac{15\times6\times1}{6}=15$（種）

(2) $\dfrac{C_2^6C_2^4C_2^2}{3!}\times3!=15\times6=90$（種）

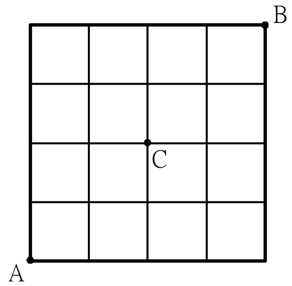
(3) $C_1^6\,C_2^5\,C_3^3\times1\times1\times1=6\times10\times1=60$（種）

2-4-5.

由 A 走到 B 以捷徑方式（只能向右或向上）行走，則

(1) 共有 70 種走法。

(2) 途中不可經過 C 點，則有 34 種走法。



$\boxed{解}$：(1) $\dfrac{8!}{4!4!}=70$（種）

(2) $\dfrac{8!}{4!4!}-\underbrace{\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{4!}{2!2!}}_{（經過 C 點）}=70-6\times6=34$（種）

2-4-6.

(1) 求方程式 $x+y+z=10$ 的非負整數解之個數為 66 。

(2) 求方程式 $x+y+z=10$ 的正整數解之個數為 36 。

$\boxed{解}$：(1) $H_{10}^3=C_{10}^{12}=C_2^{12}=\dfrac{12\times11}{2}=66$

(2) $H_{10-3}^3=H_7^3=C_7^9=C_2^9=36$

2-4-7.

某委員會選理事長，已知有 3 位候選人，選舉人有 10 位，則：

(1) 以記名投票之情形有 3^{10} 種。

(2) 以無記名投票之情形有 66 種。

$\boxed{解}$：(1) 記名投票方式為重覆排列：3^{10}（種）

(2) 無記名投票方為重覆組合：$x_1+x_2+x_3=10$ 之非負整數解

$\therefore\ H_{10}^3=C_{10}^{12}=C_2^{12}=66$（種）

2-4-8.

6 件不同的獎品，分給 4 位小朋友，每人至少得一件共有 1560 種分法。

$\boxed{解}$：(1) (3 , 1 , 1 , 1) $\Rightarrow \dfrac{C_3^6 \times C_1^3 \times C_1^2 \times C_1^1}{3!} \times 4! = 480$

(2) (2 , 2 , 1 , 1) $\Rightarrow \dfrac{C_2^6 \times C_2^4 \times C_1^2 \times C_1^1}{2!\,2!} \times 4! = 1080$

$\Rightarrow 480 + 1080 = 1560$ (種)

2-5-1.

求 $(x - 2y)^4$ 的展開式。

$\boxed{解}$：$(x - 2y)^4 = [x + (-2y)]^4 = C_0^4 x^4 + C_1^4 x^3(-2y) + C_2^4 x^2(-2y)^2 + C_3^4 x(-2y)^3 + C_4^4(-2y)^4$

$= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$

2-5-2.

求 $(x^2 - \dfrac{3}{x})^8$ 展開式中，x^{10} 項的係數為 252 ，常數項為 0 。

$\boxed{解}$：$(x^2 - \dfrac{3}{x})^8$ 展開式中，一般項為 $C_k^8\ (x^2)^{8-k} \cdot\ (\dfrac{-3}{x})^k = C_k^8\ (-3)^k \cdot x^{16-3k}$

(1) 令 $16 - 3k = 10 \Rightarrow k = 2$ $\Rightarrow x^{10}$ 之係數為 $C_2^8\ (-3)^2 = 28 \times 9 = 252$

(2) $16 - 3k = 0 \Rightarrow k = \dfrac{16}{3}$ $\therefore$ 常數項不存在，故常數項為 0

2-5-3.

求 $\sum\limits_{k=1}^{10}(1 + x)^k$ 展開式中，x^3 的係數為 330 。

$\boxed{解}$：$\sum\limits_{k=1}^{10}(1 + x)^k = (1 + x) + (1 + x)^2 + \ldots + (1 + x)^{10}$

$= \dfrac{(1 + x)[(1 + x)^{10} - 1]}{(1 + x) - 1} = \dfrac{(1 + x)^{11} - (1 + x)}{x}$

$(1 + x)^{11}$ 展開式中，x^4 之係數為 $C_4^{11} = \dfrac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4!} = 330$

2-5-4.

求下列各式之值：

(1) $C_0^{20} + C_1^{20} + \ldots + C_{20}^{20} =$ 2^{20} 。

(2) $C_0^{20} + C_2^{20} + \ldots + C_{18}^{20} + C_{20}^{20} =$ 2^{19} 。

(3) $C_1^{20} + C_3^{20} + \ldots + C_{17}^{20} + C_{19}^{20} =$ 2^{19} 。

$\boxed{解}$：利用 $C_0^n + C_1^n + \ldots + C_n^n = 2^n$

n 為偶數 $C_0^n + C_2^n + \ldots + C_n^n = C_1^n + C_3^n + \ldots + C_{n-1}^n = 2^{n-1}$

2-5-5.

求 x^6 除以$(x-1)^2$的餘式為 $\underline{\quad 6x-5 \quad}$。

$\boxed{解}$：$x^6=(x-1+1)^6=〔1+(x-1)〕^6=C_0^6+C_1^6(x-1)+C_2^6(x-1)^2+\ldots+C_6^6(x-1)^6$

$\therefore$ x^6 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 $1+6(x-1)=6x-5$

2-5-6.

求 $(1+x+x^2)^6$ 展開式中，x^3 項的係數為 $\underline{\quad 50 \quad}$。

$\boxed{解}$：展開式中的一般項為$\dfrac{6!}{p!q!r!}\cdot 1^p\cdot x^q\cdot (x^2)^r=\dfrac{6!}{p!q!r!}x^{q+2r}$

p	3	4
q	3	1
r	0	1

$\therefore \begin{cases} q+2r=3 \\ p+q+r=6 \end{cases}$，$p$、$q$、$r\in N\cup\{0\}$

故 x^3 係數為$\dfrac{6!}{3!3!}+\dfrac{6!}{4!1!1!}=20+30=50$

2-5-7.

求 11^{18} 除以 100 的餘數為 $\underline{\quad 81 \quad}$。

$\boxed{解}$：$11^{18}=(1+10)^{18}=C_0^{18}+C_1^{18}\times 10+C_2^{18}\times 10^2+\ldots+C_{18}^{18}\times 10^{18}$

$\therefore$ 11^{18} 除以 100 的餘式為 $(1+180)\div 100=1\ldots$餘數 81

2-5-8.

試以二項式定理的觀念，求 $C_0^8+2C_1^8+4C_2^8+\ldots+256C_8^8$之值為 $\underline{\quad 6561 \quad}$。

$\boxed{解}$：利用二項式定理

$(x+2)^8=C_0^8x^8+C_1^8x^7\cdot 2+C_2^8x^6\cdot 2^2+\ldots+C_8^8\cdot x^0\cdot 2^8$

令 $x=1$ 代入

$3^8=C_0^8+2C_1^8+4C_2^8+\ldots+256C_8^8$

$\therefore$ $C_0^8+2C_1^8+4C_2^8+\ldots+256C_8^8=6561$