| 高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：98.04.08. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 2-1 集合與元素(A) | 班級 | | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

## 一、選擇題( 每題 10 分)

(　　) 1. (複選)若 $S=\{a, b, \{a\}\}$，則下列何者為真？ (1) $\{a\}\subset S$． (2) $\{\{a\}\}\subset S$． (3) $\{\{b\}\}\subset S$．
(4) $\{a, \{a\}\}\subset S$． (5) $\{a, \{a\}\}\in S$．

解答 124

解析 $\because a, b, \{a\}\in S \Rightarrow \{a\}\subset S, \{b\}\subset S, \{\{a\}\}\subset S, \{a, \{a\}\}\subset S$，但$\{b\}\notin S \Rightarrow \{\{b\}\}\not\subset S$．

(　　) 2. (複選)若 $A, B, C$ 為三集合，$A\subset B\subset C$，則下列何者為真？
(1) $A-B=\varnothing$． (2) $(B-A)\cap A=\varnothing$．
(3) $(C-A)\cap C=\varnothing$． (4) $(A\cap B)\cup C=C$． (5) $(A\cup B)\cap C=A$．

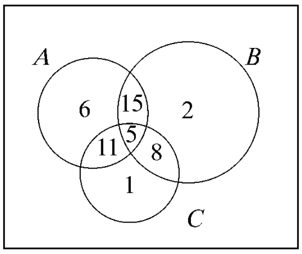
解答 124

解析 (1)$\because A\subset B \Rightarrow A-B=A-(A\cap B)=A-A=\varnothing$．
(2)$(B-A)\cap A=(B\cap A')\cap A=B\cap A'\cap A=\varnothing$．
(3)$(C-A)\cap C$ 不一定是$\varnothing$．
(4)$\because A\subset B\subset C \Rightarrow (A\cap B)\cup C=A\cup C=C$．
(5)$(A\cup B)\cap C=B\cap C=B$．

(　　) 3. (複選)某班學生有 52 人參加數學測驗，試題 $A, B, C$ 三大題，答對 $A$ 者有 37 人，答對 $B$ 者有 30 人，答對 $C$ 者有 25 人，答對 $A, B$ 者有 20 人，答對 $A, C$ 者有 16 人，答對 $B, C$ 者有 13 人，三題均答對者有 5 人，則： (1)三題均答錯者有 4 人．
(2)恰對一題者有 10 人． (3)至少對一題者有 48 人．
(4)至少對兩題者有 38 人． (5)恰對 $A$ 一題者有 6 人．

解答 135

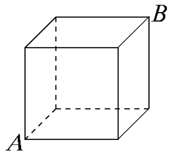
解析 設答對 $A, B, C$ 題者所成集合分別為 $A, B, C$，則：



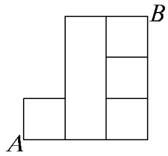

(1)(3)$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=37+30+25-20-13-16+5=48$（至少對一題）
$\Rightarrow n(A'\cap B'\cap C')=n((A\cup B\cup C)')=52-48=4$（三題均答錯）．
(2)由圖知 $n(A\cap B'\cap C')+n(A'\cap B\cap C')+n(A'\cap B'\cap C)=6+2+1=9$（恰對一題）．
(4)至少對二題者 $=15+11+8+5=39$．
(5)恰對 $A$ 一題者 $=6$．

## 二、填充題 ( 每題 10 分)

1. 在圖(一)與圖(二)中，求從 $A$ 走到 $B$ 的捷徑有多少條？
(1)圖(一)，捷徑有________條．(2)圖(二)，捷徑有________條．



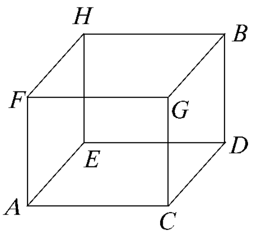
圖(一)



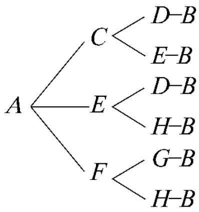
圖(二)

解答 (1)6;(2)6

解析 (1)如圖(一)，由 $A$ 到 $B$ 的捷徑：




圖(一)



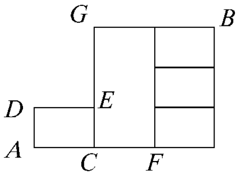

共有 6 條

（乘法原理應用）由 $A$ 開始，可在 $C$，$E$，$F$ 中任選一條，

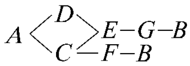
然後再朝 $B$ 的捷徑，各有兩條選擇，所以共有 $3\times 2=6$（條）．

(2)《方法 1》

如圖(二)，$A$ 到 $B$ 的捷徑，如下面樹狀圖：




圖(二)

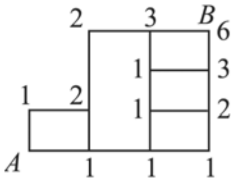



$A$ 到 $D$ 到 $E$ 到 $G$ 到 $B$ 有 1 條捷徑，$A$ 到 $C$ 到 $E$ 到 $G$ 到 $B$ 有 1 條捷徑，

$A$ 到 $C$ 到 $F$ 到 $B$ 有 4 條捷徑，所以共有 $1+1+4=6$ 條捷徑．

《方法 2》

註碼法，如圖(三)：




圖(三)

共 6 條捷徑．

2. 50 元鈔票一張，兌換成 10 元與 5 元的硬幣，

(1)有__________種方法；

(2)如果兌換成 10 元，5 元及 1 元的硬幣，每種硬幣至少有一個，有__________種方法．

解答 (1)6;(2)16

解析 (1)設 50 元換成 10 元與 5 元硬幣各換 $x$ 個與 $y$ 個，則 $10x+5y=50$，

求其中 $x$，$y$ 的非負整數解，即 $2x+y=10$ 的非負整數解，

$x=0$，1，2，3，4，5 時，各恰有一個 $y$ 的解，所以共有 6 種換法．

(2)設 50 元換成 10 元，5 元，1 元硬幣，各換 $x$，$y$，$z$ 個，

則 $10x+5y+z=50$，求其中 $x$，$y$，$z$ 的正整數解，

①當 $x=1$ 時，$5y+z=40$ 的正整數解有 7 組解．

②當 $x=2$ 時，$5y+z=30$ 的正整數解有 5 組解．

③當 $x=3$ 時，$5y+z=20$ 的正整數解有 3 組解．

④當 $x=4$ 時，$5y+z=10$ 的正整數解有 1 組解．

所以共有 $7+5+3+1=16$ 種換法．

3. 1 到 1000 中，(1)3 或 5 的倍數有__________個，(2)不是 6 也不是 4 的倍數有__________個．

解答 (1)467;(2)667

解析 (1)$[\frac{1000}{3}]+[\frac{1000}{5}]-[\frac{1000}{15}]=333+200-66=467$（個）.

(2) $1000-[\frac{1000}{4}]-[\frac{1000}{6}]+[\frac{1000}{12}]=1000-250-166+83=667$（個）.

4. 由 1，2，3，4，5，…到 123 共 123 個正整數，

(1)這 123 個正整數中，數字含 0 的有__________個，

(2)這 123 個正整數的數字中，共含有__________個 0．

解答 (1)21;(2)22

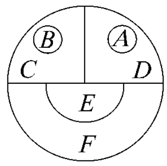
解析 1 到 123 的正整數中，數字裡有 0 的有下列的情況：

(1)二位數有 10，20，…，90 共 9 個．

(2)三位數有 100，101，…，109，110，120 共 12 個．

所以共有 $9+12=21$ 個數的數字內有 0，這 21 個數，0 共出現 $9+2+11=22$ 個．

5. 以紅、藍、黃、綠、橙、紫、黑七色塗下圖之 $A$，$B$，$C$，$D$，$E$，$F$ 六部分，每一部分僅以一色塗之，顏色可重複使用，相鄰部分必須不同色，則有__________種塗法．

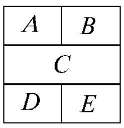



解答 30240

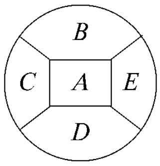
解析

$$\begin{array}{cccccc} C & D & E & F & A & B \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 \cdot & 6 \cdot & 5 \cdot & 4 \cdot & 6 \cdot & 6=30240 \end{array}$$

6. 在圖(一)與圖(二)中，$A$，$B$，$C$，$D$，$E$ 等 5 個區域，用 4 種顏色著色，4 色都用，且相鄰的區域不同色，則(1)圖(一)有__________種方法，(2)圖(二)有__________種方法．



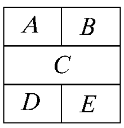

圖(一)




圖(二)

解答 (1)96;(2)48

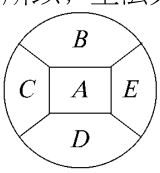
解析 (1)如下圖，5 個區域要用 4 個顏色塗，所以必有兩個區域同色，又不能相鄰的區域，因此，必須 $AD$ 或 $AE$ 或 $BD$ 或 $BE$ 四組中，有一組塗同色，其餘的都不同色，所以塗法共有 $4\times4\times3\times2\times1=96$ 種塗法．




圖(一)

(2)如下圖，必須 $BD$ 或 $CE$ 兩組中，有一組塗同色，

所以，塗法共有 $2\times4\times3\times2\times1=48$ 種．




圖(二)

7. 教室有四門，甲、乙二人由不同門進入，由不同門出來，且各人不可由同一門進出，則有__________

種走法．

解答　84

解析　進入：$4\times3=12$．

出來：

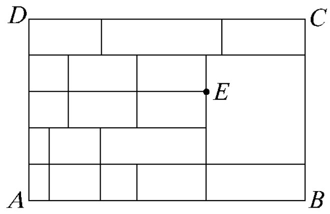
①甲由乙進之門出：$1\times3=3$，

②甲不由乙進之門出：$2\times2=4$，

∴　出來有 $3+4=7$ 種．

共有 $12\times7=84$ 種．

8. 某地街道圖如下，則

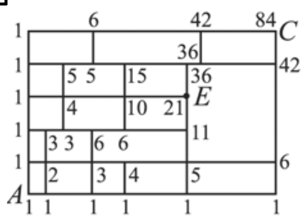



(1) 由 $A\to E$ 走捷徑有__________種走法，

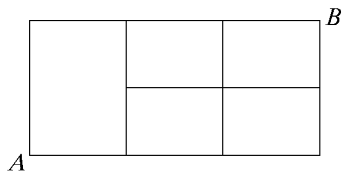
(2) 由 $A\to C$ 走捷徑有__________種走法．

解答　(1)21 種;(2)84 種

解析




9. 如右圖，

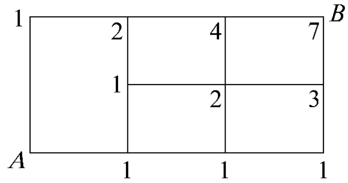



(1)由 $A$ 走到 $B$，只能向上或向右的走法有__________種．

(2)由 $A$ 走到 $B$，只能向上、向下或向右，且走過的路亦不可重複走，則其走法有__________種．

解答　(1)7;(2)18

解析　(1)有 7 種走法．




(2) $2\times3\times3=18$ 種．

10. 某班學生上次期中考成績：國、英、數不及格人數依序爲 7、16、17，國英、國數、英數兩科不及格人數依序爲 5、3、8，三科皆不及格有 2 位，三科皆及格有 15 位．

(1)至少有一科不及格的人數爲__________．(2)全班共有__________位學生．

解答　(1)26;(2)41

解析　(1)設 $A$，$B$，$C$ 三集合分別表示國、英、數不及格的人所成集合，設 $U$ 表全班人所成集合，

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$
$$=7+16+17-5-3-8+2=26．$$

(2)$n(U)=n(A\cup B\cup C)+n((A\cup B\cup C)')=n(A\cup B\cup C)+n(A'\cap B'\cap C')=26+15=41$．

11. 在一場宴會中，與會的 30 人彼此兩兩握手寒暄，如果大家都與自己除外的每一個人握到一次手，則此次宴會中所有人共計握手了__________次．

解答　435

解析　$\dfrac{(30-1)\times30}{2}=435$（次）．

12. 若 $A=\{x，y，z\}$，$B=\{x+1，2，3\}$ 且 $A=B$，則$(x，y，z)$之解共有__________組．

解答　5

解析　∵　$A=B$ 且 $x\neq x+1$　⇒　$x=2$ 或 $x=3$，

①若 $x=2$ 時，$A=\{2，y，z\}$，$B=\{3，2，3\}=\{2，3\}$，

$\therefore\ \begin{cases}y=2\\z=3\end{cases}$，$\begin{cases}y=3\\z=2\end{cases}$，$\begin{cases}y=3\\z=3\end{cases}$，有 3 組解．

②若 $x=3$ 時，$A=\{3，y，z\}$，$B=\{4，2，3\}$，

$\therefore\ \begin{cases}y=2\\z=4\end{cases}$，$\begin{cases}y=4\\z=2\end{cases}$，有 2 組解．

由①，②知，共有 5 組解．

13. 若 $A=\{x\mid x=3k+1，k\in\boldsymbol{Z}，1\le x\le 200\}$，$B=\{x\mid x=5n+2，n\in\boldsymbol{Z}，1\le x\le 200\}$，則

(1) $n(A)=$____________．　(2) $n(A\cap B)=$____________．

解答　(1)67;(2)13

解析　$\because\ 1\le x\le 200$，$x=3k+1$，$k=0，1，2，\cdots，66$，$\therefore\ n(A)=67$，

$\because\ 1\le x\le 200$，$x=5n+2$，$n=0，1，2，\cdots，39$，$\therefore\ n(B)=40$，

當 $x\in A\cap B$ 時，$x=5n+2=3k+1\ \Rightarrow\ k=\dfrac{5n+1}{3}=n+\dfrac{2n+1}{3}$，

$\because\ k\in\boldsymbol{Z}\ \Rightarrow\ \dfrac{2n+1}{3}\in\boldsymbol{Z}\ \Rightarrow\ n=1+3r，r\in\boldsymbol{Z}$，

$\therefore\ x=5(1+3r)+2=15r+7，r\in\boldsymbol{Z}$

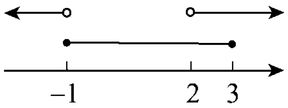
$\Rightarrow\ r=0，1，2，\cdots，12\ \Rightarrow\ n(A\cap B)=13$．

14. 若 $A=\{x\mid x^2-x-2>0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+b\le 0\}$，$A\cup B=\boldsymbol{R}$，$A\cap B=\{x\mid 2<x\le 3\}$，則數對$(a，b)=$

____________．

解答　$(-2，-3)$

解析　$x\in A\ \Rightarrow\ x^2-x-2>0\ \Rightarrow\ (x-2)(x+1)>0\ \Rightarrow\ x>2$ 或 $x<-1$，




$\because\ A\cup B=\boldsymbol{R}，A\cap B=(2，3]\ \Rightarrow\ B=[-1，3]$

$\Rightarrow\ (x-3)(x+1)\le 0\ \Rightarrow\ x^2-2x-3\le 0\ \Rightarrow\ a=-2，b=-3$．

15. 若 $S=\{(x，x+5)\mid x\in\boldsymbol{R}\}$，$T=\{(y-1，x+1)\mid 3x+2y=10，x，y\in\boldsymbol{R}\}$，則 $S\cap T=$____________．

解答　$\{(-\dfrac{4}{5}，\dfrac{21}{5})\}$

解析　令$(a，b)\in S\cap T$，

$\because\ (a，b)\in S\ \Rightarrow\ a=x，b=x+5\ \Rightarrow\ a-b+5=0\cdots\cdots$①，

$\because\ (a，b)\in T\ \Rightarrow\ a=y-1，b=x+1\ \Rightarrow\ y=a+1，x=b-1$，

又 $3x+2y=10\ \Rightarrow\ 3(b-1)+2(a+1)=10\ \Rightarrow\ 2a+3b-11=0\cdots\cdots$②，

解①②得 $a=-\dfrac{4}{5}$，$b=\dfrac{21}{5}$．

16. 設 $A=\{x\in\boldsymbol{N}\mid 1\le x\le 540$ 且 $x$ 與 360 互質$\}$，$n(A)=$____________．

解答　144

解析　$\because\ 360=2^3\times 3^2\times 5$，$1\le x\le 540$ 且$(x，360)=1$，

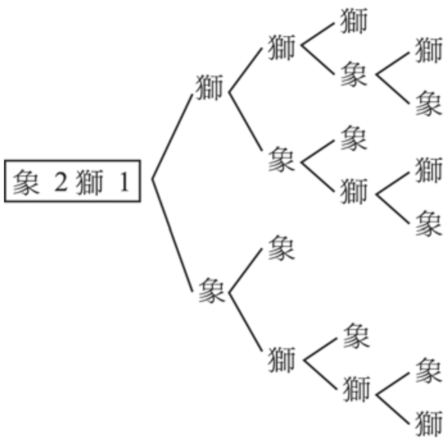
故需在 1 到 540 的正整數中去掉 2 或 3 或 5 的倍數

$\Rightarrow\ n(A)=540-(270+180+108-90-54-36+18)=144$．

17. 職棒四年季後冠軍爭霸戰，是由季內賽前兩名，作七戰四勝的比賽，爭年度總冠軍，現已賽畢三場，兄弟象以 2：1 勝統一獅，則往後的比賽有____________種結果以決定冠軍．

解答　10

解析　利用樹形圖：




從象 2 獅 1 開始，往後比賽的情形共有 10 種．

18. 3600(1)有__________個正因數，(2)這些正因數中，有__________個是 30 的倍數．

解答　(1)45;(2)16

解析　$3600=2^4\times 3^2\times 5^2$，

3600 的正因數有 $(4+1)(2+1)(2+1)=45$ 個，

$3600=30\times 120=2^1\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot(2^3\times 3\times 5)$，

所以 3600 的正因數中，30 的倍數有 $(3+1)(1+1)(1+1)=16$ 個．

19. 自 1 寫到 999 的正整數，共寫了__________個 7．

解答　300

解析　《方法 1》

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 一位數 | 7 | | | → | 1 個 |
| 二位數 | 7 | □ | | → | 9 個 |
| | □ | 7 | | → | 8 個 |
| | 7 | 7 | | → | 2 個 |
| 三位數 | 7 | □ | □ | → | $9\times 9=81$ |
| | □ | 7 | □ | → | $8\times 9=72$ |
| | □ | □ | 7 | → | $8\times 9=72$ |
| | 7 | 7 | □ | → | $9\times 2=18$ |
| | 7 | □ | 7 | → | $9\times 2=18$ |
| | □ | 7 | 7 | → | $8\times 2=16$ |
| | 7 | 7 | 7 | → | $1\times 3=3$ |

共有 $1+(9+8+2)+(81+72+72+18+18+16+3)=300$ 個．

《方法 2》

0～999 類似 000，001，002，⋯，999，把它們想成 1000 個數目，

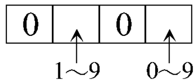
每個數目皆有 3 個數字，因爲數字從 0 到 9 全是平均地分布，

所以數字總共出現了 $3\times 1000$，「7」一共寫了 $\dfrac{3\times 1000}{10}=300$ 個．

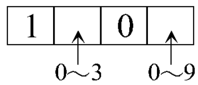
20. 由 1，2，3，4，5，⋯到 1357，共 1357 個正整數中，共出現__________個 0．

解答　365

解析　(1)個位數爲 0　⇒　10，20，⋯，1350，共 135 個．

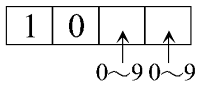
(2)十位數為 0 $\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ $9 \times 10 = 90$



$\Rightarrow$ $4 \times 10 = 40$

$\therefore$ 共 $90 + 40 = 130$ 個．

(3)百位數為 0 $\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ $10 \times 10 = 100$

$\therefore$ 共有 $135 + 130 + 100 = 365$ 個 0．

21. 小於 1000 的自然數中，

(1)不是 3 且不是 5 的倍數有__________個．

(2)是 3 或 5 或 7 的倍數者有__________個．

(3)是 3 或 5 但不為 7 的倍數者有__________個．

解答 (1)533;(2)542;(3)400

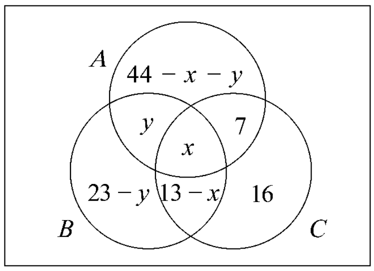
解析 (1) $999 - ([\frac{999}{3}] + [\frac{999}{5}] - [\frac{999}{15}]) = 999 - 333 - 199 + 66 = 533$．

(2) $[\frac{999}{3}] + [\frac{999}{5}] + [\frac{999}{7}] - [\frac{999}{15}] - [\frac{999}{35}] - [\frac{999}{21}] + [\frac{999}{105}] = 542$．

(3) $[\frac{999}{3}] + [\frac{999}{5}] - [\frac{999}{15}] - [\frac{999}{35}] - [\frac{999}{21}] + [\frac{999}{105}] = 400$．

22. 某次數學競試有 100 個學生參加，試題僅 $A$，$B$，$C$ 三題，測驗結果如下：答對 $A$ 者有 51 人，答對 $B$ 者有 36 人，只答對 $C$ 者有 16 人，答對 $B$，$C$ 兩題者有 13 人，答對 $A$ 或 $C$ 者有 75 人，答對 $B$ 或 $C$ 者有 59 人，而只答對 $A$，$B$，$C$ 三題之一者有 66 人，則

(1)只答對 $A$ 者有__________人． (2)三題都答錯者有__________人．




解答 (1)33;(2)8

解析 $\begin{cases} 51 + 16 + (13 - x) = 75 \\ (44 - x - y) + (23 - y) + 16 = 66 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$，

(1) $44 - 5 - 6 = 33$（人）．

(2) $n(A \cup B \cup C) = 92$，$\therefore$ $100 - 92 = 8$（人）．

23. 若 $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N},\ \sqrt{x} \in \boldsymbol{N},\ 1 \le x \le 10000\}$，$B = \{x \mid x = 12m,\ m \in \boldsymbol{N},\ 1 \le x \le 10000\}$，

試求：(1) $n(A \cap B)$． (2) $n(A - B)$．

解答 (1)16;(2)84

解析 $A = \{1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots,\ 100^2\}$ $\Rightarrow$ $n(A) = 100$，

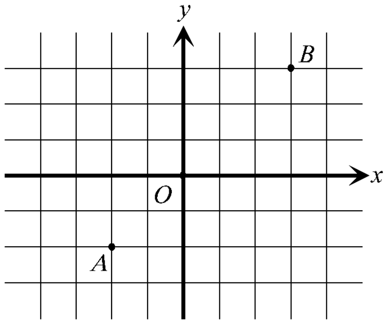
$B = \{12,\ 24,\ 36,\ \cdots,\ 9996\} = \{12 \times 1,\ 12 \times 2,\ 12 \times 3,\ \cdots,\ 12 \times 833\}$ $\Rightarrow$ $n(B) = 833$，

(1)$A \cap B = \{6^2 \times 1^2,\ 6^2 \times 2^2,\ 6^2 \times 3^2,\ \cdots,\ 6^2 \times 16^2\}$ $\Rightarrow$ $n(A \cap B) = 16$．

(2)$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 100 - 16 = 84$．

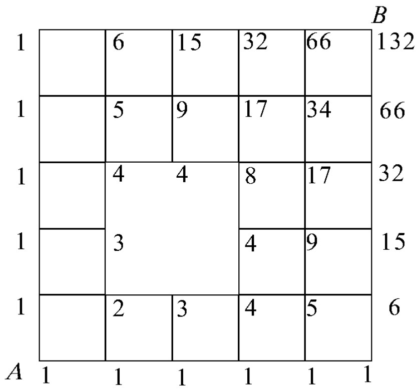
24. 下圖中，在坐標平面上，由 $A$ 沿著方格線走到 $B$，試問：

(1)不經過原點的捷徑有多少條？ (2)不經過第二象限的捷徑有多少條？



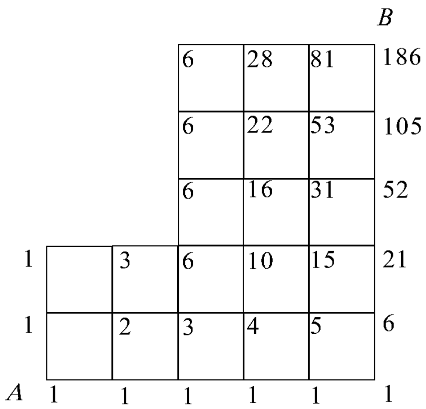

解答 (1)132;(2)186

解析 (1)如下圖：




有 132 種．

(2)如下圖：




共 186 種．

25. 將 10 顆相同的糖果分堆，最多分成三堆，共有幾種方法?

解答 14 種

解析

10個糖果分堆

一堆：10　1種

二堆：9, 1　8, 2　7, 3　6, 4　5, 5　5種　共14種.

三堆：8, 1, 1　7, 2, 1　6, 3, 1　6, 2, 2　5, 4, 1　5, 3, 2

4, 4, 2　4, 3, 3　8種