高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：98.03.25.					
範圍	1-5 圓錐曲線的切線與光學性質	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 下列哪一條直線與拋物線 $y=x^2$ 相切？

(A) $y=x-\frac{1}{4}$ (B) $y=x-\frac{1}{3}$ (C) $y=x-\frac{1}{6}$ (D) $y=x-\frac{1}{5}$ (E) $y=x-1$

【解答】(A)

【詳解】直線與拋物線相切，則判別式= 0

(A) $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2-x+\frac{1}{4}=0$，$D=1^2-4\times\frac{1}{4}=0$

2. (複選)一直線 L 與一雙曲線 Γ 的交點個數可能爲(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

【解答】(A)(B)(C)

【詳解】一直線與一個二次曲線至多有兩個交點

3. (複選)直線 $y=x+k$ 與雙曲線 $y^2-4x^2=12$ 的相交關係爲

(A) $k=0$ 時，沒有交點 (B) $k=3$ 時，有一個交點 (C) $k<-3$ 時，有二個交點

(D) $k>3$ 時，沒有交點 (E) $k=\sqrt{5}$ 時，沒有交點

【解答】(A)(B)(C)(E)

【詳解】

$y=x+k$ 代入 $y^2-4x^2=12 \Rightarrow (x+k)^2-4x^2=12 \Rightarrow -3x^2+2kx+k^2-12=0$

x 的實根個數由判別式 $D=4k^2+12(k^2-12)$ 決定之，$D=16(k^2-9)$

(1) $k>3$ 或 $k<-3$ 時，$D>0 \Leftrightarrow$ 有兩個相異交點……(C)爲真

(2) $k=\pm3$ 時，$D=0 \Leftrightarrow$ 恰有一個交點（相切）……(B)爲真

(3) $-3<k<3$ 時，$D<0 \Leftrightarrow$ 沒有交點……(A)(E)爲真

4. (複選)已知雙曲線 Γ：$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$，過下列哪些點作 Γ 之切線恰有一條？

(A)(0，0) (B)(4，1) (C)$(3，\frac{4}{\sqrt{5}})$ (D)$(\sqrt{5}，-2)$ (E)(1，2)

【解答】(C)(D)

【詳解】

(A)(0，0)爲中心，過中心沒有切線

(B) $\frac{4^2}{5}-\frac{1}{4}>1$，點(4，1)與焦點在同一區域內，過(4，1)沒有切線

(C)$(3，\frac{4}{\sqrt{5}})$在 Γ 上，過此點恰有一條切線

(D)$(\sqrt{5}，-2)$在漸近線 $2x+\sqrt{5}y=0$ 上，過此點恰有一條切線

(E) $\frac{1^2}{5}-\frac{2^2}{4}=\frac{1}{5}-1<1$，點(1，2)與中心(0，0)同一區域內且不在漸近線上過(1，2)有兩條切線

二、填充題(每題 10 分)

1. 求過$(-2，1)$，與橢圓 $x^2+3y^2=7$ 相切的直線方程式________________。

【解答】$2x-3y+7=0$

【詳解】

$(-2)^2+3\times1^2=7$ $\therefore$ $(-2，1)$在橢圓上

故過$(-2，1)$之切線為 $(-2)\cdot x+3\cdot1\cdot y=7$ $\Rightarrow$ $2x-3y+7=0$

2. 若雙曲線$y^2-x^2=a^2$與直線$x+2y=3$相切於點$(x_0，y_0)$，則$x_0：y_0：a^2=$_________。

【解答】$(-1)：2：3$

【詳解】切線為 $y_0y-x_0x=a^2$ 即為 $x+2y=3\Rightarrow\dfrac{-x_0}{1}=\dfrac{y_0}{2}=\dfrac{a^2}{3}$，故 $x_0：y_0：a^2=(-1)：2：3$

3. 求過$P(1，2)$與曲線 $9x^2+4y^2=36$ 相切之直線有__________條。

【解答】0

【詳解】曲線 $9x^2+4y^2=36$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

由圖知：點 $P(1，2)$在橢圓內部 $\therefore$ 無相切之直線

4. 已知直線$y=2x+k$與雙曲線$x^2-4y^2=4$相切，則實數k之值為__________。

【解答】$\pm\sqrt{15}$

【詳解】$\begin{cases} y=2x+k & \cdots\cdots① \\ x^2-4y^2=4 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①代入② $\Rightarrow$ $15x^2+16kx+4(k^2+1)=0$

$\because$ 相切 $\therefore$ 判別式 $=(16k)^2-4\times15\times4(k^2+1)=0$，得 $k=\pm\sqrt{15}$

5. 若橢圓$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$與直線$y=mx+3$相切，則$m=$_________。

【解答】$\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

【詳解】

$y=mx+3$ 代入$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 中，得$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(mx+3)^2}{4}=1$ $\Rightarrow$ $4x^2+9(mx+3)^2=36$

$\Rightarrow$ $4x^2+9m^2x^2+54mx+81-36=0$，整理得$(4+9m^2)x^2+54mx+45=0$

$\because$ 橢圓$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$與直線 $y=mx+3$ 相切 $\therefore$ 判別式 $D=(54m)^2-4(4+9m^2)\cdot45=0$

$\Rightarrow$ $81m^2-20-45m^2=0$ $\Rightarrow$ $m^2=\dfrac{5}{9}$ $\Rightarrow$ $m=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

6. 若直線過$(3，6)$與橢圓$4x^2+9y^2=36$相切，則直線方程式為_________。

【解答】$8x-9y+30=0$ 及 $x=3$

【詳解】

Sol 一： 交點法

點(3，6)不在橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 上，設切線方程式爲 $y-6=m(x-3)$

$\Rightarrow$ $y=mx+6-3m$ 代入橢圓方程式 $\Rightarrow$ $4x^2+9(mx+6-3m)^2=36$

$\Rightarrow$ $4x^2+9m^2x^2+18m(6-3m)x+9(6-3m)^2=36$

$\Rightarrow$ $(4+9m^2)x^2+18m(6-3m)x+(288-324m+81m^2)=0$

$\because$ 相切 $\therefore$ $D=[18m(6-3m)]^2-4(4+9m^2)(288-324m+81m^2)=0$

$\Rightarrow$ $D=9m^2(36-36m+9m^2)-(4+9m^2)(32-36m+9m^2)$

$=324m^2-324m^3+81m^4-128+144m-36m^2-288m^2+324m^3-81m^4$

$=-128+144m=0$ $\Rightarrow$ $m=\dfrac{8}{9}$

$\therefore$ 切線方程式爲 $y-6=\dfrac{8}{9}(x-3)$，即 $8x-9y+30=0$，切線有兩條，另一切線爲鉛直線 $x=3$

Sol 二： 公式法

橢圓 $4x^2+9y^2=36\Rightarrow\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，又點(3，6)不在橢圓上， $y=mx\pm\sqrt{4m^2+9}$

設切線爲 $y=mx\pm\sqrt{9m^2+4}$ 或 $y-6=m(x-3)$

點(3，6)在 $y=mx\pm\sqrt{9m^2+4}$ 上 $\Rightarrow 6=3m\pm\sqrt{9m^2+4}$

$(6-3m)^2=(\pm\sqrt{9m^2+4})^2\Rightarrow 36-36m+9m^2=9m^2+4\Rightarrow$ $m=\dfrac{8}{9}$

$\therefore$ 切線方程式爲 $y-6=\dfrac{8}{9}(x-3)$，即 $8x-9y+30=0$，切線有兩條，另一切線爲鉛直線 $x=3$

7. 雙曲線 Γ：$x^2-y^2=8$，$A(1，1)$，由 A 向 Γ 作切線，則切線方程式爲__________。

【解答】$9x+7y-16=0$

【詳解】

Sol 一： 交點法

設切線 L：$y-1=m(x-1)$，$\begin{cases} L：y=mx+(1-m)\cdots\cdots① \\ \Gamma：x^2-y^2=8 \quad\cdots\cdots② \end{cases}$

①代入② $\Rightarrow$ $(1-m^2)x^2+2m(m-1)x+(2m-m^2-1-8)=0$

$\because$ 相切 $\therefore$ $D=4m^2(m-1)^2-4(1-m^2)(2m-m^2-9)=0$ $\Rightarrow$ $4(m-1)(7m+9)=0$

$\Rightarrow$ $m=\dfrac{-9}{7}$ 或 $m=1$（不合 $\because$ $m=1$ 時，切線 L 與其中一條漸近線重合不爲切線）

$\therefore$ L：$y-1=\dfrac{-9}{7}(x-1)$ $\Rightarrow$ $9x+7y-16=0$

Sol 二： 公式法

雙曲線 $x^2-y^2=8\Rightarrow\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{-8}=1$，又點(１，１)不在雙曲線上，

設切線爲 $y=mx\pm\sqrt{8m^2-8}$ 或 $y-1=m(x-1)$

點(１，１)在 $y=mx\pm\sqrt{8m^2-8}$ 上 $\Rightarrow 1=m\pm\sqrt{8m^2-8}$

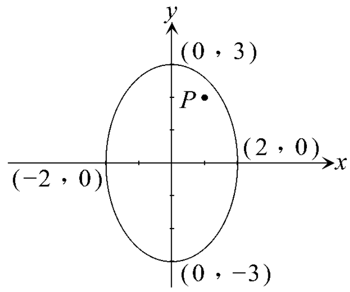
$(1-m)^2=(\pm\sqrt{8m^2-8})^2\Rightarrow 1-2m+m^2=8m^2-8\Rightarrow$ $(m-1)(7m+9)=0$

$\Rightarrow$ $m=\dfrac{-9}{7}$ 或 $m=1$（不合 $\because$ $m=1$ 時，切線 L 與其中一條漸近線重合不爲切線）

$\therefore\quad L：y-1=\dfrac{-9}{7}(x-1)\quad\Rightarrow\quad 9x+7y-16=0$

8. 若拋物線$y^2=4x$與直線$y=2x+k$交於相異兩點，則k的範圍爲______________。

【解答】$k<\dfrac{1}{2}$



【詳解】$y=2x+k$ 代入 $y^2=4x$ 中，$(2x+k)^2=4x$，$4x^2+4(x-1)x+k^2=0$

$\because$　拋物線 $y^2=4x$ 與 $y=2x+k$ 交於相異兩點

$\therefore$　判別式 $D=[4(k-1)]^2-4\cdot4\cdot k^2>0$

$\Rightarrow\quad k^2-2k+1-k^2>0\quad\Rightarrow\quad 2k<1\quad\Rightarrow\quad k<\dfrac{1}{2}$

9. 設直線$y=x+k$與橢圓 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 不相交，則實數k的範圍爲________________。

【解答】$k>3$ 或 $k<-3$

【詳解】

直線 $y=x+k$ 與橢圓 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 不相交，則聯立式$\begin{cases}y=x+k\\2x^2+y^2=6\end{cases}$無實數解

亦即 $2x^2+(x+k)^2=6$ 沒實數解，可得 $3x^2+2kx+(k^2-6)=0$ 沒實數解

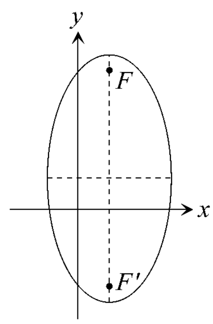
所以$\triangle=(2k)^2-4\times3\times(k^2-6)<0$，即 $k^2-9>0$，亦即 $k>3$ 或 $k<-3$

10.已知橢圓方程式爲 $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$，則

(1)此橢圓焦點坐標爲__________，

(2)若自左邊焦點F上發射一直線光，打在橢圓某一點P，再自P反射，最後需落在F'上，則此光線最少需走多少距離？__________。

(3)若將上圖沿 $\vec{v}=(-1,2)$移動$|\vec{v}|$長，得到新圖形之方程式爲________________。



【解答】$(1，1\pm2\sqrt{3})$，8，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$

【詳解】

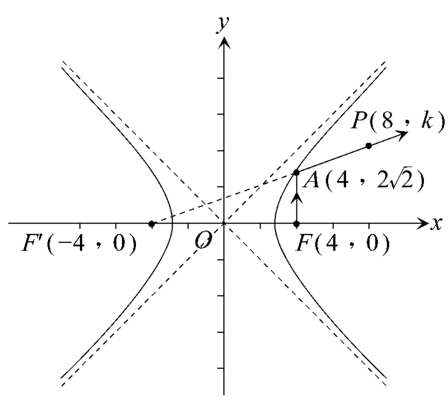
橢圓方程式：$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$，中心$(1，1)$，$a^2=16$，$a=4$，$b^2=4$，$b=2$

$\Rightarrow\quad c^2=a^2-b^2=16-14=12\quad\therefore\quad c=\pm2\sqrt{3}\quad\therefore$　焦點坐標爲$(1，1\pm\ 2\sqrt{3})$

設 $P(x，y)$，由定義：$|\overline{PF}+\overline{PF'}|=2a=2\cdot4=8$

橢圓沿 $\vec{v}=(-1，2)$移動後，以$(x+1,y-2)$代入

$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$，新方程式 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$



11.雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$，又$A\in\Gamma$，已知$A(4，2\sqrt{2})$，$F(4，0)$，

若由F射至A之光線被雙曲線Γ 反射，反射光通過$P(8，k)$，則

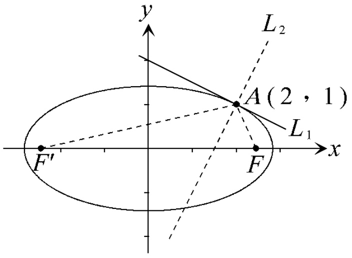
$k =$__________。

【解答】$3\sqrt{2}$

【詳解】

由光學性質可知反射光線必沿直線 $\overleftrightarrow{F'A}$ 前進，$m_{F'A} = \dfrac{2\sqrt{2}-0}{4-(-4)} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\overleftrightarrow{F'A}$：$y - 0 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(x+4)$，$P(8，k)$代入 $\overleftrightarrow{F'A}$ $\Rightarrow$ $k = 3\sqrt{2}$



12.設F與F'為橢圓$x^2+4y^2=8$的兩焦點，若A的坐標為$(2，1)$，求$\angle FAF'$的角平分線方程式__________。

【解答】$2x-y=3$

【詳解】

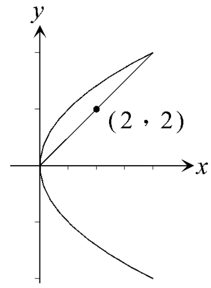
過 $A(2，1)$之切線 L_1：$2x+4y=8$，斜率 $m = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

由光學性質可知$\angle FAF'$的角平分線即為過 A 之法線 L_2，法線斜率 $m=2$

$\because$ $L_2 \perp L_1$ $\Rightarrow$設 L_2：$y-1=2(x-2)$ $\Rightarrow$ L_2：$2x-y=3$

13. 設拋物線$y^2=4x$上一弦以$(2,2)$為中點，則此弦所在的直線方程式為______，又弦長 ＝______。

【解答】$x-y=0$；$4\sqrt{2}$



【詳解】

設拋物線 $y^2=4x$，以$(2，2)$為弦中點的弦所在的直線為 $y-2 = m(x-2)$

由題意$\begin{cases} y^2=4x \\ y-2=m(x-2) \end{cases}$的兩交點以$(2，2)$為中點，故 $y^2 = 4(\dfrac{y-2+2m}{m})$

即 $my^2-4y-(8m-8)=0$……(※)，此二次式的兩根和 ＝ $\dfrac{4}{m}$ ＝4，得 $m=1$

所求的弦所在的直線方程式為 $y-2=1\cdot(x-2)$，即 $x-y=0$

當 $m=1$ 時，(※)式為 $y^2-4y=0$，即 $y=0$ 或 4，當 $y=0$ 時，$x=0$，而 $y=4$ 時，$x=4$

兩交點$(0，0)$，$(4，4)$，所以弦長 ＝$\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

14. 拋物線Γ：$y^2=8x$，

(1) Γ 與直線$x-y+1=0$ 之交弦長 ＝__________。

(2)設Γ上之一弦 $\overline{AB}$ 被$(-3，2)$所平分，則含此弦 $\overline{AB}$ 之直線為____________________。

【解答】(1) 8 (2) $2x-y+8=0$

【詳解】

(1)Sol 一： 根與係數的關係

設Γ 與直線 $x-y+1=0$ 之交點 $P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$

則$\begin{cases} y^2=8x \\ x-y+1=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $(x+1)^2=8x$ $\Rightarrow$ $x^2-6x+1=0$，且二根 $x_1, x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1\cdot x_2=1 \end{cases}$

$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{2(x_1-x_2)^2} = \sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]} = \sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$= \sqrt{2[6^2-4\times1]} = 8$

Sol 二： 公式法

$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 = 8x \Rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0，$$

$\therefore$ 交弦長 $= \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \cdot \sqrt{1+m^2} = \sqrt{36-4} \cdot \sqrt{1+1} = 8$

(2) 設 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$\overleftrightarrow{AB}$ 之方程式爲 $x + 3 = m(y-2) \Rightarrow x = my - 2m - 3$

$$\therefore \begin{cases} x = mx - 2m - 3 \\ y^2 = 8x \end{cases} \Rightarrow y^2 = 8(my - 2m - 3)$$

$\Rightarrow y^2 - 8my + (16m + 24) = 0$ 二根爲 $y_1，y_2$ $\therefore y_1 + y_2 = 8m$

又$\because$ $\overline{AB}$ 之中點爲$(-3，2)$， $\therefore \dfrac{y_1 + y_2}{2} = 2 \Rightarrow 4m = 2 \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$

故 $x + 3 = \dfrac{1}{2}(y-2) \Rightarrow 2x - y + 8 = 0$

15. 雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{9} = 1$，$P \in \Gamma$，

(1)過P之切線與二漸近線所圍成之三角形面積爲__________。

(2)設$A(0，2)$，則 $\overline{AP}$ 之最小値 $=$ __________。

【解答】(1) 18 (2) $\dfrac{14\sqrt{5}}{5}$

【詳解】

(1) Γ：$\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ $\therefore a = 6，b = 3$

過 P 之切線與二漸近線所圍成之三角形面積 $= ab = 6 \cdot 3 = 18$

(2) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{36} = \dfrac{y^2}{9} + 1$, 即 $x^2 = 4y^2 + 36$

$$\overline{AP} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{4y^2 + 36 + (y-2)^2} = \sqrt{5y^2 - 4y + 40} = \sqrt{5(y - \frac{2}{5})^2 + \frac{196}{5}} \geq \frac{14\sqrt{5}}{5}$$

16.設拋物線Γ：$y = x^2 - 2x + 2k$與直線ℓ：$y = 2x + k$，$k \in R$，

(1)若對任意之實數x，Γ之圖形恆在直線ℓ之上方，則k之範圍爲__________。

(2)若Γ與ℓ相切，則$k =$ __________。 (3)若Γ與ℓ之交弦長爲 $2\sqrt{5}$，則$k =$ __________。

【解答】(1) $k > 4$ (2) 4 (3) 3

【詳解】

(1) $\forall x$：$x^2 - 2x + 2k > 2x + k$ 恆成立$\Rightarrow$ $x^2 - 4x + k > 0$ 恆成立

$\therefore b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 4 - k < 0 \Rightarrow k > 4$

(2) $x^2 - 2x + 2k = 2x + k \Rightarrow x^2 - 4x + k = 0$ $\therefore b^2 - 4ac = 4(4-k) = 0 \Rightarrow k = 4$

(3)交弦長 $= \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \cdot \sqrt{1+m^2} = \sqrt{16-4k} \cdot \sqrt{1+4} = 2\sqrt{5} \Rightarrow 16 - 4k = 4 \Rightarrow k = 3$

17.已知P為橢圓$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$上之一點，則$P$到直線$2x-y+6=0$的最長距離為_____，此時$P$點的坐標為__________。

【解答】$3\sqrt{5}$，$(\frac{13}{2}$，$\frac{-19}{5})$

【詳解】

橢圓Γ：$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$，其中心$(1，-2)$，設$2x-y+k=0$為$\Gamma$之切線

$y=2x+k$代入Γ得$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(2x+k+2)^2}{9}=1 \Rightarrow 25x^2+(16k+14)x+4k^2+16k-11=0$

$D=(8k+7)^2-25(4k^2+16k-11)=0 \Rightarrow k^2+8k-9=0 \Rightarrow k=-9$或$1$

求最長距離　∴　$k=-9$，$\frac{|6-(-9)|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$

$y=2x-9$代入Γ，解交點$(5x-13)^2=0 \Rightarrow x=\frac{13}{5}$，$y=\frac{-19}{5}$　∴　$P(\frac{13}{5}$，$\frac{-19}{5})$

18.設由點$(1，1)$所作拋物線$y=x^2-x+k$的兩條切線互相垂直，則$k=$______________，又設點$P(0，t)$在拋物線上，則以P為切點的切線方程式為______________________。

【解答】$\frac{3}{2}$；$2x+2y-3=0$

【詳解】

由點$(1，1)$作$y=x^2-x+k$的兩條切線互相垂直，設切線方程式為$y-1=m(x-1)$

則$\begin{cases} y=m(x-1)+1 \\ y=x^2-x+k \end{cases}$恰有一組交點，因此，$x^2-x+k=m(x-1)+1$恰有一個實數解

即$x^2+(-1-m)x+(k+m-1)=0$恰有一實數解，因此，$\triangle=(-1-m)^2-4(k+m-1)=0$

即$m^2-2m+(5-4k)=0$……(※)

由已知兩切線互相垂直，所以(※)式的兩根積$=-1$

即$5-4k=-1$，所以$k=\frac{3}{2}$，因此，拋物線方程式為$y=x^2-x+\frac{3}{2}$

當$P(0，t)$在拋物線上時，$t=\frac{3}{2}$，設以$P(0，\frac{3}{2})$為切點的切線方程式為$y-\frac{3}{2}=mx$

則$\begin{cases} y=mx+\frac{3}{2} \\ y=x^2-x+\frac{3}{2} \end{cases}$恰有一組解，即$x^2-x+\frac{3}{2}=mx+\frac{3}{2}$恰有一個實數解

可得$x^2-(m+1)x=0$恰有一個解，所以$\triangle=[-(m+1)]^2=0$，即$m=-1$

所以以$P(0，\frac{3}{2})$為切點的切線方程式為$y=-x+\frac{3}{2}$，即$2x+2y-3=0$

19.橢圓$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$與直線$2x-y+2=0$交於$A$，$B$，

(1)$\overline{AB}$之中點為__________。(2)弦長$\overline{AB}=$__________。

【解答】(1)$(-\frac{1}{2}$，1)　(2)$\sqrt{15}$

【詳解】

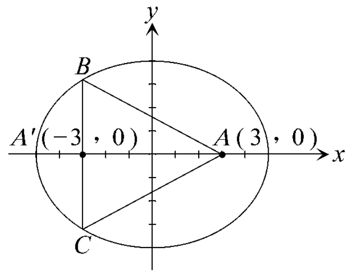
(1)$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1\\ 2x-y+2=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}4x^2+y^2=8\\ 2x-y+2=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $4x^2+4(x+1)^2=8$ $\Rightarrow$ $2x^2+2x-1=0$

$\Rightarrow$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，$y=1\pm\sqrt{3}$，

$\therefore$ $A(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$，$1+\sqrt{3})$，$B(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$，$1-\sqrt{3})$ $\therefore$ 中點爲$(-\frac{1}{2}$，1)

(2) $\overline{AB}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}\cdot\sqrt{1+m^2}=\frac{\sqrt{4+8}}{2}\cdot\sqrt{1+4}=\sqrt{15}$

20.已知橢圓方程式$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，若有光束自焦點$A(3$，$0)$射出，經二次反射回到$A$點，設二次反射點爲$B$，$C$，如圖所示，求△$ABC$之周長____。



【解答】20

【詳解】

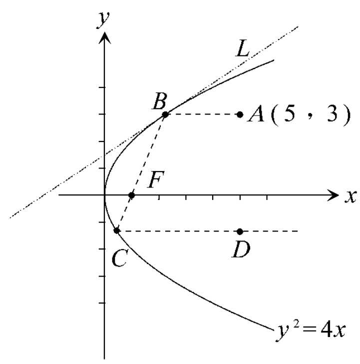
Γ: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ $\Rightarrow$ $a=5$，$b=4$，由橢圓的光學性質知

若光束自焦點 $A(3$，$0)$射出，經一次反射後，

必通過另一焦點 $A'(-3$，$0)$

$\therefore$ △ABC 之周長 $=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=(\overline{AB}+\overline{BA'})+(\overline{A'C}+\overline{CA})=2a+2a=4a=4\times5=20$

21.設拋物線Γ: $y^2=4x$，一光線從點$A(5$，$3)$射出，平行Γ 的軸射在Γ 上的 B 點，經反射後又射到Γ 上的 C 點，則 C 的坐標爲__________。



【解答】$C(\frac{4}{9}$，$-\frac{4}{3})$

【詳解】

Γ: $y^2=4x$，由 $A(5$，$3)$射出的光線沿 $y=3$ 射到Γ 上的點 $B(\frac{9}{4}$，$3)$，

經反射後，通過焦點 $F(1$，$0)$，則 $\overleftrightarrow{BF}$ 的方程式爲 $y=\frac{12}{5}(x-1)$ 與Γ 的

另一交點 Q，解 $y^2=4x$ 及 $y=\frac{12}{5}(x-1)$

$\Rightarrow\frac{144}{25}(x-1)^2=4x$，$36x^2-97x+36=0$，$(9x-4)(4x-9)=0\Rightarrow x=\frac{4}{9},\frac{9}{4}$（不合），得 $C(\frac{4}{9}$，$-\frac{4}{3})$