高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：98.03.09.					
範圍	1-3 橢圓(A)	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 （ 每題 10 分 ）

(　　) 1. 設 $F_1(3，2)$，$F_2(3，-4)$，則 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=6$ 的 P 點軌跡為

(1)點　(2)一直線　(3)一平面　(4)一線段　(5)一橢圓．

解答　4

解析　$\overline{F_1F_2}=6=2c=2a=6$，∴不是橢圓，而是 $\overline{F_1F_2}$ (一線段)．

(　　) 2. 平面上有一個橢圓，已知其長軸平行於 x 軸，短軸的一端點為$(-4，0)$，且其中一焦點為$(0，4)$，則此橢圓長軸的長度為何？(1) 2　(2) $2\sqrt{2}$　(3) 6　(4) $6\sqrt{2}$　(5) $8\sqrt{2}$ ．

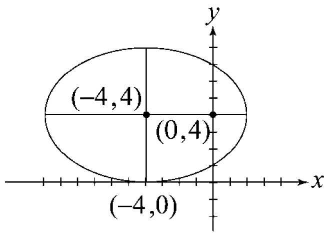
解答　5

解析　短軸的一端點為$(-4，0)$　⇒　短軸：$x=-4$，

焦點$(0，4)$在長軸上　⇒　長軸：$y=4$，

∴中心$(-4，4)$⇒$b=4$，$c=4$　⇒$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，

∴長軸長 $=2a=2\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$ ．



(　　) 3. 橢圓 $4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$，下列何者正確？

(1)中心$(-1，2)$　　(2)長軸長 $=3$　　(3)短軸長 $=2$

(4)正焦弦長 $=\dfrac{8}{3}$　　(5)長軸方程式為 $x-1=0$ ．

解答　4

解析　$4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$　⇒　$4(x-1)^2+9(y+2)^2=36$　⇒　$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$，

∴$a=3$，$b=2$，此橢圓的中心$(1，-2)$，長軸長 $2a=6$，短軸長 $2b=4$，

正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\cdot 2^2}{3}=\dfrac{8}{3}$，長軸方程式為 $y+2=0$ ．

(　　) 4. (複選)下列選項何者正確?

(1) 方程式 $\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}=5$ 的圖形為一線段．

(2) 設 $F_1(3，2)$，$F_2(3，-4)$，則 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=6$ 的 P 點軌跡為一橢圓．

(3) 設點 $P(a，b)$在橢圓 $x^2+4y^2=16$ 上，則 $-4\le a\le 4$ 且 $-2\le b\le 2$ ．

(4) 設點 $P(a，b)$且 $-4\le a\le 4$ 且 $-2\le b\le 2$，則 P 點在橢圓 $x^2+4y^2=16$ 上．

(5) 橢圓 $x^2+4y^2=16$ 的周長大於 $8\sqrt{5}$ 且小於 24．

解答　135

解析　(1) 設 $P(x，y)$，$A(-2，1)$，$B(1，-3)$，

則 $\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}=\overline{PA}+\overline{PB}=5$，

又 $\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(-3-1)^2}=5$，∴ $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{AB}$，

故 P 點在 $\overline{AB}$ 上，即 P 點形成的圖形為一線段 $\overline{AB}$ ．

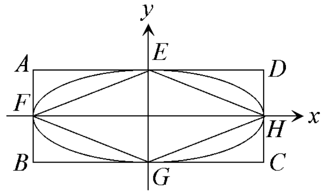
(2) $\overline{F_1F_2}=6=2c=2a=6$，∴不是橢圓，而是 $\overline{F_1F_2}$ ．

(3) $a^2+4b^2=16$　⇒　$a^2=4(4-b^2)\ge 0$　⇒　$4-b^2\ge 0$　⇒　$b^2-4\le 0$，∴$-2\le b\le 2$，

$a^2+4b^2=16$　⇒　$4b^2=16-a^2\ge 0$　⇒　$a^2-16\le 0$，∴$-4\le a\le 4$．

(4) 令 $a=1$，$b=1$，則 $a^2+4b^2=5\ne 16$．

(5) $x^2+4y^2=16 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$\therefore a=4$，$b=2$，



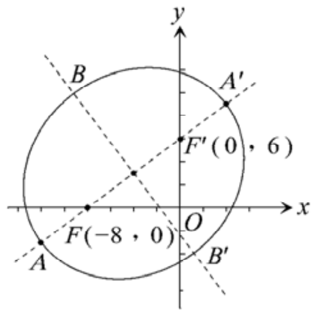
$\therefore$周長 $<ABCD$ 之周長 $=2(2a+2b)=24$，

且周長 $>EFGH$ 之周長 $=\sqrt{16+4}\times 4=4\sqrt{20}=8\sqrt{5}$.

(　　　) 5. (複選)有關方程式$\sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-6)^2}=20$之圖形，下列敘述何者為真?

(1)圖形是中心在$(-4，3)$之橢圓　(2)短軸所在之直線斜率為$\dfrac{3}{4}$　(3)圖形不與坐標軸成對稱

(4)短軸之長為$5\sqrt{3}$　(5)原點在圖形的內部 .



解答　135

解析　方程式$\sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-6)^2}=20$之圖形為一橢圓，

焦點為 $F(-8，0)$，$F'(0，6)$，長軸長 $2a=20 \quad \Rightarrow \quad a=10$，

中心為$\overline{FF'}$之中點$(-4，3)$，$2c=\overline{FF'}=\sqrt{64+36}=10 \Rightarrow \quad c=5$，

$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{100-25}=5\sqrt{3}$

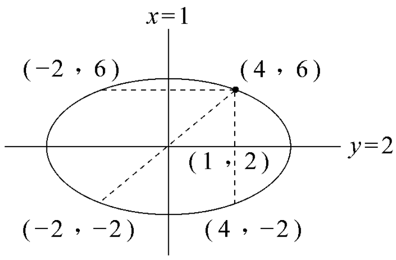
$\Rightarrow$　短軸長 $2b=10\sqrt{3}$，長軸在直線 FF'：$3x-4y+24=0$ 上，

短軸所在之直線斜率為 $-\dfrac{4}{3}$，且圖形不與坐標軸成對稱，又原點$(0，0)$代入方程式中

$\sqrt{(0+8)^2+0^2}+\sqrt{0^2+(0-6)^2}=14<20$，$\therefore$原點在圖形的內部 .

(　　　) 6. (複選)已知一橢圓的長軸平行於 x 軸，中心為$(1，2)$且通過點$(4，6)$，試問下列哪一點一定會在這橢圓上?　(1)$(-2，-2)$　(2)$(-2，6)$　(3)$(4，-2)$　(4)$(5，6)$　(5)$(3，4)$.

解答　123



解析　中心$(1，2)$，長軸在 $y=2$ 上，短軸在 $x=1$ 上，

橢圓對稱於中心、長軸、短軸，點$(4，6)$關於$(1，2)$，$y=2$ 及 $x=1$ 的對稱點在橢圓上，分別為$(-2，-2)$，$(4，-2)$，$(-2，6)$.

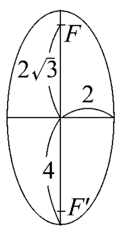
二、填充題　(每格 10 分)

1. 橢圓 $4x^2+y^2+8x-4y-8=0$ 的

(1) 中心坐標為____________ .　　(2) 焦點坐標為____________ .

(3) 正焦弦長 $=$____________ .　　(4) 橢圓上任一點到兩焦點的距離和 $=$____________ .

解答　(1)$(-1，2)$;(2)$(-1，2\pm 2\sqrt{3})$;(3) 2;(4) 8



解析　$4x^2+y^2+8x-4y-8=0 \quad \Rightarrow \quad 4(x+1)^2+(y-2)^2=16 \quad \Rightarrow \dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$，

$b^2=4$，$a^2=16 \quad \Rightarrow \quad c^2=a^2-b^2=12 \quad \Rightarrow \quad a=4$，$b=2$，$c=2\sqrt{3}$，

(1)中心$(-1，2)$. (2)焦點$(h，k\pm c)=(-1，2\pm 2\sqrt{3})$.

(3)正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times 4}{4}=2$.　(4)令橢圓上任一點為 P，則 $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a=8$.

2. 設 $x^2+2y^2-2x+8y+k=0$，試求：

(1) 表一點時，此點坐標為____________ .　(2) 表一橢圓時，k 值之範圍為____________ .

解答　(1) $(1，-2)$;(2) $k<9$

解析　$x^2+2y^2-2x+8y+k=0 \quad \Rightarrow \quad (x^2-2x+1)+2(y^2+4y+4)=-k+9$

$\Rightarrow \quad (x-1)^2+2(y+2)^2=-k+9$，

$\therefore$(1)$k=9$ 時 $\Rightarrow \quad (x-1)^2+2(y+2)^2=0$，表點$(1，-2)$；

(2) $-k+9>0 \Rightarrow k<9$ 時 $\Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{9-k}+\dfrac{(y+2)^2}{\frac{9-k}{2}}=1$，表一橢圓．

3. 已知一橢圓過點$(-1,\ \frac{\sqrt{3}}{2})$，且兩焦點爲$(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$，則

(1)此橢圓的方程式爲__________________．(2) 正焦弦長 ＝_______________．

$\boxed{\text{解答}}$ (1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$;(2)1

$\boxed{\text{解析}}$ 橢圓兩焦點爲$(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$，其中點$(0,\ 0)$就是橢圓中心，$c=\sqrt{3}$

設此橢圓方程式爲 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，又點$(-1,\ \frac{\sqrt{3}}{2})$在橢圓上，且 $a^2=b^2+c^2$

$a^2-b^2=3$ 且 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1$，$\begin{cases} a^2=b^2+3 \\ 4b^2+3a^2=4a^2b^2 \end{cases}$，可得 $4b^2+3(b^2+3)=4(b^2+3)b^2$，

即 $4b^4+5b^2-9=0$，可得 $b^2=1$，$a^2=4$，橢圓方程式 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$，正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2}{2}=1$．

4. 橢圓 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{(y+3)^2}{25}=1$ 的圖形與 x 軸有兩交點，其坐標爲______________________．（有兩解）

$\boxed{\text{解答}}$ $(8,\ 0)$與$(-8,\ 0)$

$\boxed{\text{解析}}$ $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{(y+3)^2}{25}=1$ 與 x 軸的交點坐標爲$(t,\ 0)$時，

$\dfrac{t^2}{100}+\dfrac{9}{25}=1 \quad \Leftrightarrow t^2=100(1-\dfrac{9}{25})=\dfrac{16\times100}{25} \quad \Leftrightarrow t=\pm8$，此橢圓與 x 軸交點$(8,\ 0)$，$(-8,\ 0)$．

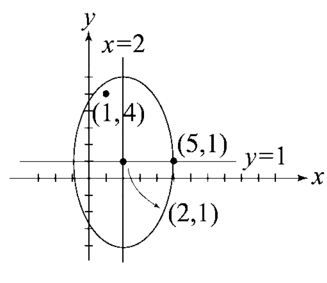
5. 一橢圓，其長軸在直線 $x=2$ 上，短軸在直線 $y=1$ 上，若長軸長爲 10，短軸長爲 6，則

(1)此橢圓的方程式爲____________．(2)此橢圓上過點$(1,\ 4)$且平行 x 軸的弦長 ＝____________．

$\boxed{\text{解答}}$ (1) $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$;(2) $\dfrac{24}{5}$

$\boxed{\text{解析}}$ 橢圓之長軸在 $x=2$ 上，短軸在 $y=1$ 上，中心$(2,\ 1)$，長軸長 $2a=10$，短軸長 $2b=6$，

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，方程式 $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$，



過$(1,\ 4)$，平行 x 軸的弦之端點爲 $\begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1 \\ y=4 \end{cases}$ 的解，

由上式可得 $\dfrac{(x-2)^2}{9}=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25}$，即 $(x-2)^2=\dfrac{9\times16}{25}$，可得 $x=2\pm\dfrac{12}{5}$，

弦的兩端點坐標 $(\dfrac{-2}{5}，4)$，$(\dfrac{22}{5}，4)$，此弦長 $=\dfrac{22}{5}-(-\dfrac{2}{5})=\dfrac{24}{5}$．

6. 橢圓 $\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=10$，試求：

(1) 正焦弦長 ＝____________．　(2) 在 y 軸上之投影長 ＝____________．

$\boxed{\text{解答}}$ (1) $\dfrac{18}{5}$;(2) 6

$\boxed{\text{解析}}$ $F'(-4,\ 1)$，$F(4,\ 1)$ $\Rightarrow$ 中心$(0,\ 1)$，$\therefore c=4$，$a=5$ $\Rightarrow$ $b=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

故正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{18}{5}$，在 y 軸上之投影長 $=2b=6$．

7. 與橢圓$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$共焦點且過點(3，3)之橢圓方程式爲________________．

解答　$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{10}=1$

解析　〈解法一〉

設橢圓爲$\dfrac{x^2}{9+k}+\dfrac{(y-1)^2}{4+k}=1$，則將(3，3)代入，$\therefore\dfrac{9}{9+k}+\dfrac{4}{4+k}=1$

$\Rightarrow\ \ 36+9k+36+4k=36+9k+4k+k^2$

$\Rightarrow\ \ k^2=36\ \ \Rightarrow\ \ k=6$ 或 -6（不合），故$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{10}=1$．

〈解法二〉

設橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-1)^2}{b^2}=1$，(3, 3)代入，得$\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1\cdots\cdots$①　，且$c^2=a^2-b^2=5\cdots\cdots$②

解①②得$b^2=10$，$a^2=15$，$\therefore\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{10}=1$．

8. 若橢圓Γ_1：$\dfrac{x^2}{90}+\dfrac{y^2}{15}=1$與$\Gamma_2$：$\dfrac{x^2}{a^2-5}+\dfrac{y^2}{2a}=1$焦點相同，則

(1) Γ_2的短軸長 $=$________．(2)設點$P(\sqrt{19}$，$t)$在Γ_2上且$t>0$，則$t=$________．

解答　(1)$4\sqrt{5}$;(2)$t=4$

解析　Γ_1：$\dfrac{x^2}{90}+\dfrac{y^2}{15}=1$與$\Gamma_2$：$\dfrac{x^2}{a^2-5}+\dfrac{y^2}{2a}=1$焦點相同($c$相同)，則$(a^2-5)-2a=90-15$，

可得$a=10$或$a=-8$（但$a>0$），Γ_2：$\dfrac{x^2}{95}+\dfrac{y^2}{20}=1$，短軸長 $=2\sqrt{20}=4\sqrt{5}$，

當點$P(\sqrt{19}$，$t)$在Γ_2上時，$\dfrac{19}{95}+\dfrac{t^2}{20}=1$，即$t^2=20(\dfrac{4}{5})=16$，$t=\pm4$，又$t>0$，所以$t=4$．

9. 橢圓$9x^2+4y^2+54x-16y-47=0$，試求：

(1) 焦點坐標爲________．　(2) 內接最大矩形面積爲________．

解答　(1) $(-3，2\pm2\sqrt{5})$;(2) 48

解析　$9x^2+4y^2+54x-16y-47=0\Rightarrow\ \ 9(x+3)^2+4(y-2)^2=144\ \ \Rightarrow\ \ \dfrac{(x+3)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{36}=1$，

$\therefore$中心$(-3，2)$，$a=6$，$b=4$，又$c^2=a^2-b^2=20\ \ \Rightarrow\ \ c=2\sqrt{5}$，

$\therefore$焦點$(-3，2\pm2\sqrt{5})$，又內接最大矩形面積爲$2ab=48$．

10. 橢圓中心(2，1)，長軸在直線$x=2$上，過此橢圓長軸之一頂點的二個焦半徑爲 2 與 8，試求：

(1) 此橢圓之方程式爲________________．　(2) 此橢圓之二焦點爲________．

解答　(1)$\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$;(2) $(2，-2)$，$(2，4)$

解析　$\begin{cases}a+c=8\\a-c=2\end{cases}\ \ \Rightarrow\ \ a=5$，$c=3$，$\therefore b=4$，

$\therefore$橢圓Γ：$\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$，二焦點爲$(2，-2)$，$(2，4)$．

11. 設H：$\dfrac{x^2}{16-t}+\dfrac{y^2}{t+2}=1$（$t\in\boldsymbol{R}$）表兩焦點在$y$軸之橢圓，則$t$值範圍爲____________．

解答　$7<t<16$

解析　所求為直橢圓 $\Rightarrow \begin{cases}16-t>0\\ t+2>0\\ 16-t<t+2\end{cases} \Rightarrow\ 7<t<16$．

12. 橢圓 Γ：$5(x+2)^2+9(y-1)^2=45$，

(1) 求內接正方形面積 $=$______．(2) 若橢圓二焦點為 F', F 又 $P(-1,k)\in\Gamma$，則 $\overline{PF'}+\overline{PF}=$______．

解答　(1) $\dfrac{90}{7}$;(2) 6

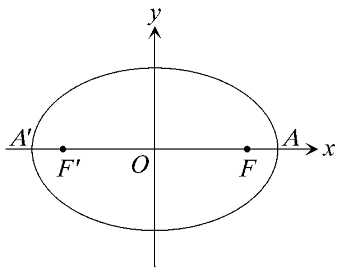
解析　Γ：$5(x+2)^2+9(y-1)^2=45 \Rightarrow \dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{5}=1$，

$\therefore a^2=9$，$b^2=5 \Rightarrow a=3$，$b=\sqrt{5}$，

$\therefore$內接正方形面積 $=\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{90}{7}$，$\overline{PF'}+\overline{PF}=2a=6$．

13. 如圖，橢圓的兩焦點為 F，F'，若 $\overline{AF}=2$，$\overline{AF'}=14$，則

(1) 兩焦點 F, F'的坐標為_______．(2) 橢圓的方程式為______________．



解答　(1) $F(6, 0)$，$F'(-6, 0)$;(2) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{28}=1$

解析　$\overline{AF}=2$，$\overline{AF'}=14 \Rightarrow \overline{FF'}=12$，$\therefore c=6$，$a=2+6=8 \Rightarrow b^2=8^2-6^2=28$，

$\therefore$焦點坐標 $F(6, 0)$，$F'(-6, 0)$，橢圓方程式$=\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{28}=1$．

14. 已知一橢圓的兩焦點$(5, 1)$，$(-1, 1)$，長軸長為 $2\sqrt{13}$，則此橢圓方程式為____________．

解答　$\dfrac{(x-2)^2}{13}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

解析　橢圓兩焦點$(5, 1)$，$(-1, 1)$，則中心$(2, 1)$，$c=\sqrt{(5-2)^2+(1-1)^2}=3$，

長軸長 $2a=2\sqrt{13} \Rightarrow a=\sqrt{13}$，$\therefore b^2=a^2-c^2=13-9=4$，

$\therefore$橢圓方程式為$\dfrac{(x-2)^2}{13}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$．

15. 橢圓$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 短軸上一個端點 B 到一焦點 F 的距離是____________．

解答　4

解析　橢圓$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$，$a^2=16 \Rightarrow a=4$，$b^2=9 \Rightarrow b=3$

$\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

$\Rightarrow$ 短軸上一個端點 $B(0, 3)$ 到一焦點 $F(\sqrt{7}, 0)$ 的距離$=\sqrt{(\sqrt{7})^2+3^2}=\sqrt{16}=4$．

16. 若橢圓之兩焦點 $F(-4, -4)$，$F'(0, 0)$且 $P(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$為其上一點，則

(1)橢圓之長軸長度____________．(2)正焦弦長 ____________．

解答　(1)8;(2)4

解析　已知橢圓二焦點 $F(-4, -4)$，$F'(0, 0)$，$\therefore 2c=\overline{FF'}=4\sqrt{2} \Rightarrow c=2\sqrt{2}$，

又因為 $P(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$為橢圓上一點，

$\therefore 2a=\overline{PF}+\overline{PF'}=\sqrt{(\sqrt{2}+4)^2+(-\sqrt{2}+4)^2}+\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=8$，$\Rightarrow a=4$，

$\because c=2\sqrt{2}$，$a=4$，$\therefore b=2\sqrt{2}$，故正焦弦長為$\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times 8}{4}=4$．

17. 橢圓短軸兩端點坐標爲$(-1，1)$，$(3，1)$，正焦弦長$\dfrac{8}{3}$，則橢圓方程式爲____________ .

解答 $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

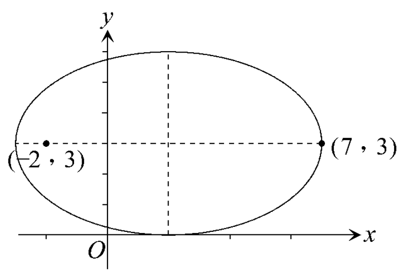
解析 短軸端點$(-1，1)$，$(3，1)$ $\Rightarrow$ 短軸在直線 $y=1$ 上，而中心$(1，1)$，$\therefore$長軸在 $x=1$ 上，

又 $2b=3-(-1)=4$ $\Rightarrow$ $b=2$，正焦弦長$\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{8}{3}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{8}{a}=\dfrac{8}{3}$ $\Rightarrow$ $a=3$，

故橢圓方程式爲$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$.

18. 已知一橢圓之一焦點爲$(-2,3)$，一長軸頂點爲$(7,3)$，且短軸長爲 6，則此橢圓方程式爲____________ .

解答 $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$



解析 $2b=6$，$b=3$，$b^2=a^2-c^2$

$\Rightarrow$ $9=(a+c)(a-c)$，若 $a-c=9$ 得 $a+c=1$（不合），

故以 $a-c=1$，$a+c=9$ $\Rightarrow$ $a=5$，$c=4$，

設所求爲$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，

則$(h，k)=(7-a，3)=(7-5，3)=(2，3)$，所求爲$\dfrac{(x-2)^2}{5^2}+\dfrac{(y-3)^2}{3^2}=1$.

19. 坐標平面上一個以$(0，2)$，$(6，2)$爲兩焦點，10 爲長軸長的橢圓，試求

(1) 橢圓方程式爲____________ . (2) 此橢圓在短軸上的兩頂點坐標分別爲____________ .（有兩解）

解答 (1)$\dfrac{(x-3)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$; (2) $(3，6)$與$(3，-2)$

解析 $F_1(0，2)$，$F_2(6，2)$ $\Rightarrow$ $\overline{F_1F_2}=2c=6$，$\therefore c=3$ 且爲橫橢圓，

中心$\left(\dfrac{0+6}{2}，\dfrac{2+2}{2}\right)=(3，2)$，$2a=10$ $\Rightarrow$ $a=5$，$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=4$，

$\therefore \dfrac{(x-3)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$，短軸頂點$(3，2\pm4)$，即$(3，6)$，$(3，-2)$.

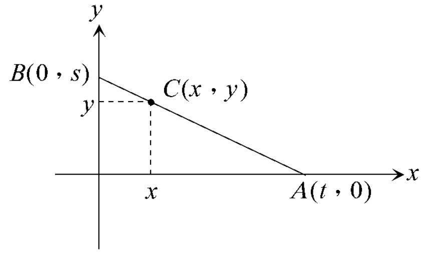
20. 若線段$\overline{AB}$之長爲 5，其上一點 C 使$\overline{AC}$ ：$\overline{CB}=3：2$，當 A 在 x 軸上移動，B 在 y 軸上移動，則

(1) 動點 C 所形成的圖形方程式爲____________ . (2) 此圖形上相異兩點距離的最大值 $=$________ .

解答 (1)$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$;(2)6

解析 如下圖，設 $A(t，0)$，$B(0，s)$，$C(x，y)$，因爲$\overline{AC}$ ：$\overline{CB}=3：2$，分點公式 $x=\dfrac{2}{5}t$，$y=\dfrac{3}{5}s$，

即 $t=\dfrac{5}{2}x$，$s=\dfrac{5}{3}y$，又$\overline{AB}=5=\sqrt{t^2+s^2}\Rightarrow t^2+s^2=25$，



即$\dfrac{25}{4}x^2+\dfrac{25}{9}y^2=25$，點 C 的圖形爲方程式$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的圖形爲橢圓，橢圓上相異兩點的最大距離爲長軸的長 $=6$.

21. 設 $A(2,-4)$，$B(4,0)$，且 $P(x,y)$為橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 上任一點，則

(1) 當$(x,y)=$______時，△ABP 之面積有最小值．(2) 此時最小值 ＝ ______．

解答　(1)$\left(\dfrac{9}{\sqrt{10}},-\dfrac{2}{\sqrt{10}}\right)$;(2)$-2\sqrt{10}+8$

解析　P 在 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，設 $P(3\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$\overrightarrow{AB}=(2,\ 4)$，$\overrightarrow{AP}=(3\cos\theta-2,\ 2\sin\theta+4)$，則

$$\triangle ABP\text{ 面積 }=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3\cos\theta-2 & 2\sin\theta+4\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|4\sin\theta-12\cos\theta+16\right|$$

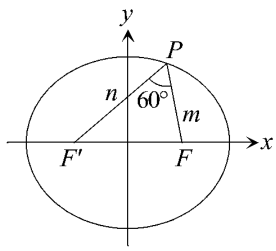
$$=\frac{1}{2}\left|-4\sqrt{10}\cos(\theta+\phi)+16\right|\text{，其中 }\cos\phi=\frac{3}{\sqrt{10}}\text{，}\sin\phi=\frac{1}{\sqrt{10}}\text{，}$$

當 $\cos(\theta+\phi)=1$時，△ABP 面積$=\dfrac{1}{2}(-4\sqrt{10}+16)=-2\sqrt{10}+8$爲最小值,

此時 $\theta+\phi=0\Rightarrow\theta=-\phi\Rightarrow\quad\cos\theta=\cos(-\phi)=\cos\phi=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\sin\theta=\sin(-\phi)=-\sin\phi=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，

$\therefore\quad(x,\ y)=\left(\dfrac{9}{\sqrt{10}},\ \dfrac{-2}{\sqrt{10}}\right)$

22. 求 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{18}=1$一點 P 與兩焦點 F,F'夾角爲 60 度,求△PFF'之面積____.



解答　$6\sqrt{3}$

解析　橢圓$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{18}=1$，$a^2=25$，$b^2=18$，

$\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-18}=\sqrt{7}$，$\therefore\overline{FF'}=2\sqrt{7}$，

設$\overline{PF}=m$，$\overline{PF'}=n$，又 $\angle FPF'=60^\circ$，$m+n=2a=10$，

$\therefore(2\sqrt{7})^2=m^2+n^2-2mn\cdot\cos 60^\circ\quad\Rightarrow\quad 28=m^2+n^2-mn=(m+n)^2-3mn$

$\Rightarrow\quad 28=10^2-3mn\quad\Rightarrow\quad mn=24$,

$\therefore$△PFF'面積$=\dfrac{1}{2}mn\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 24\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.