高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：98.02.25					
範圍	1-2 拋物線	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 10 分)

( ) 1. 以 $F(0，1)$為焦點，以 $L：y=-1$ 為準線的拋物線的方程式為何?

(1)$y^2=4x$ (2)$y^2=-4x$ (3)$x^2=4y$ (4)$x^2=-4y$ (5)$y=x^2$.

解答 3

解析 焦點 $F(0，1)$，準線 $L：y=-1$ $\Rightarrow$ 對稱軸方程式為 $x=0$，

$4\,|\,c\,|=4\times1=4$，頂點$(0，0)$，由標準式得拋物線方程式為 $x^2=4y$.

( ) 2. (複選)下列選項何者正確?

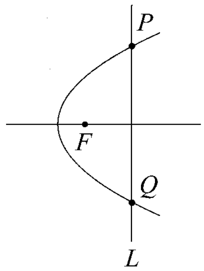
(1) 設點 F 與直線 L 在同一平面上，則所有滿足 $\overline{PF}=d(P，L)$（P 到 L 的距離）的點 P 所形成之圖形為一拋物線 .

(2) 設 F，V 分別為拋物線 Γ 的焦點與頂點，則 Γ 的圖形對稱於直線 FV .

(3) 方程式 $y=x^2$ 的圖形是拋物線，方程式 $y^2=x$ 的圖形也是拋物線 .

(4) 設 F，V 分別為拋物線 Γ 的焦點與頂點，則 Γ 上可找到一點 P 使 $\overline{PF}=\dfrac{1}{2}\overline{VF}$.

(5) 設 F 為拋物線 Γ 的焦點，P 在 Γ 上，P 不是頂點，則在 Γ 上必可 找到另一點 Q 使 $\overline{PF}=\overline{QF}$.



解答 235

解析

(1) F 不在 L 上時，P 的圖形才是拋物線 .

(2) 由拋物線的定義可得 .

(4) 頂點是拋物線上與焦點距離最近的點 .

(5) 過 P 點作與拋物線軸垂直的直線 L，則 L 與拋物線的交點 Q 會使 $\overline{PF}=\overline{QF}$.

( ) 3. (複選)關於拋物線 $y^2-4x-2y-7=0$ 的敘述，下列何者正確?

(1)開口向上 (2)頂點$(-2,1)$ (3)正焦弦長$=4$ (4)焦點 $F(2,1)$ (5)準線 $L：x+3=0$.

解答 235

解析 $y^2-4x-2y-7=0$ $\Rightarrow$ $(y-1)^2=4(x+2)$，

故此拋物線開口向右，頂點 $V(-2，1)$，$c=1$，

且焦點 $F(-1，1)$，準線 $L：x=-3$，正焦弦長 $=4|c|=4$.

( ) 4. (複選)已知一拋物線之焦點為$(1，1)$，準線為 $y+3=0$，則下列何者正確?

(1)其頂點為$(-1，1)$ (2)其焦距為 2 (3)其對稱軸為 $x=-1$

(4)若此拋物線與 x 軸交於 A，B 兩點，則 $\overline{AB}=4\sqrt{2}$

(5)過 $P(1，-1)$且與其相切之直線方程式為 $x=1$.

解答 24

解析 焦點 $F(1，1)$，準線 $L_1：y+3=0$，則拋物線如圖，對稱軸 $L_2\perp L_1$ 且過 $F(1，1)$，

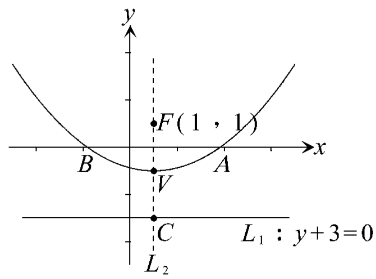
$\therefore$對稱軸 $L_2：x-1=0$，L_1，L_2 之交點 $C(1，-3)$，

$\therefore$頂點 V 為 $\overline{CF}$ 之中點$(1，-1)$ $\Rightarrow$ $P=V$,

焦距 $|\,c\,|=\overline{VF}=2$，過 $V(1，-1)$且與拋物線相切之直線為 $y=-1$，

拋物線 Γ: $(x-1)^2=8(y+1)$……①，令 $y=0$ 代入① $\Rightarrow$ $(x-1)^2=8$，得 $x=1\pm2\sqrt{2}$，

即 $A(1+2\sqrt{2}，0)$，$B(1-2\sqrt{2}，0)$ $\Rightarrow$ $\overline{AB}=4\sqrt{2}$.



二、填充題 (每題 10 分)

1. 過(2，1)，(3，0)，(5，4)三點且對稱軸平行 y 軸的拋物線方程式為__________ .

解答 $y=x^2-6x+9$

解析 已知對稱軸平行 y 軸，故設拋物線方程式為 $y=ax^2+bx+c$，

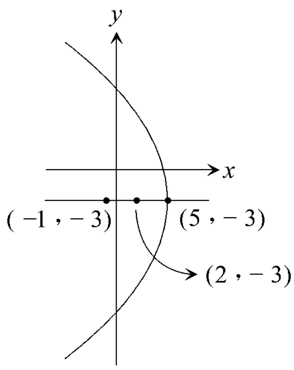
此拋物線過(2，1)，(3，0)，(5，4)，

則 $\begin{cases}1=4a+2b+c\\0=9a+3b+c\\4=25a+5b+c\end{cases}$ $\Rightarrow$ $a=1$，$b=-6$，$c=9$，所以拋物線方程式為 $y=x^2-6x+9$.

2. 已知 $A(5，-3)$，$B(-1，-3)$為平面上兩點，則

(1)以 A 為頂點，B 為焦點的拋物線方程式為__________ .

(2) 以 $\overline{AB}$ 為正焦弦，開口朝下的拋物線方程式為__________ .



解答 (1)$(y+3)^2=-24(x-5)$;(2)$(x-2)^2=-6(y+\frac{3}{2})$

解析 (1) 拋物線 Γ 以 $A(5，-3)$為頂點，$B(-1，-3)$為焦點如圖，

則 $c=-6$，Γ 的方程式為$(y+3)^2=4(-6)(x-5)$，

即$(y+3)^2=-24(x-5)$.

(2) 以 $\overline{AB}$ 為正焦弦的拋物線，焦點為 $\overline{AB}$ 的中點(2，-3)，

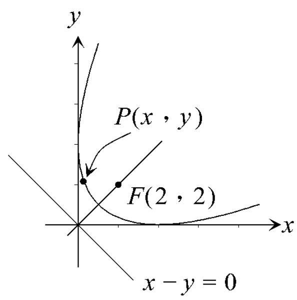
且開口朝下，此時 $c=\frac{-3}{2}$，頂點$(2，-3+\frac{3}{2})=(2，\frac{-3}{2})$，

此拋物線方程式為$(x-2)^2=4(\frac{-3}{2})(y+\frac{3}{2})$，即$(x-2)^2=-6(y+\frac{3}{2})$.

3. 以點 $F(2，2)$為焦點，以直線 $x+y=0$ 為準線的拋物線方程式為__________ .

解答 $x^2-2xy+y^2-8x-8y+16=0$

解析 以 $F(2，2)$為焦點，L：$x+y=0$ 為準線的拋物線，



設 $P(x，y)$在拋物線上，則 $\overline{PF}=d(P，L)$，

即 $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}$，

亦即 $2(x^2-4x+4+y^2-4y+4)=x^2+2xy+y^2$，

整理 $x^2-2xy+y^2-8x-8y+16=0$.

4. 與 $y^2-4x+6y+5=0$ 共軸、共焦點且過(3，1)之拋物線方程式爲＿＿＿＿＿＿．

解答 $(y+3)^2=-16(x-4)$或$(y+3)^2=4(x+1)$

解析 $y^2-4x+6y+5=0 \Rightarrow (y+3)^2=4(x+1)$，

$\therefore$頂點爲$(-1，-3)$，$c=1 \Rightarrow$ 焦點爲$(0，-3)$且對稱軸爲 $y+3=0$，

設 Γ：$(y+3)^2=4k(x+k)$，將(3，1)代入，

$\therefore 16=4k(3+k) \Rightarrow k^2+3k-4=0 \Rightarrow k=1$ 或 -4，

故$(y+3)^2=-16(x-4)$或$(y+3)^2=4(x+1)$．

5. 以$(y-1)^2=4x$ 之正焦弦爲直徑的圓方程式爲＿＿＿＿＿＿．

解答 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

解析 $\begin{cases}(y-1)^2=4x\\ x=1\end{cases} \Rightarrow (y-1)^2=4 \Rightarrow y-1=\pm 2 \Rightarrow y=3$ 或 $y=-1$，

$\therefore(1，-1)，(1，3)$爲直徑之兩端點，

$\therefore(x-1)(x-1)+(y-3)(y+1)=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=4$．

6. 已知一拋物線的頂點爲(2，0)，準線爲 $4x+3y+2=0$，則

(1) 此拋物線的焦點爲＿＿＿．(2) 正焦弦長爲＿＿＿．(3) 正焦弦長所在直線方程式爲＿＿＿．

解答 (1)$(\frac{18}{5}，\frac{6}{5})$;(2)8;(3)$4x+3y-18=0$

解析 設拋物線的對稱軸方程式爲 $3x-4y+k=0$，過(2，0)，則 $6-0+k=0$，得 $k=-6$，

$\therefore$對稱軸方程式爲 $3x-4y-6=0$，

$\begin{cases}4x+3y+2=0\\ 3x-4y-6=0\end{cases} \Rightarrow (x，y)=(\frac{2}{5}，\frac{-6}{5})$，

頂點(2，0)爲$(\frac{2}{5}，\frac{-6}{5})$與焦點$(i，j)$之中點，$\therefore(2，0)=(\dfrac{\frac{2}{5}+i}{2}，\dfrac{\frac{-6}{5}+j}{2})$

$\Rightarrow$ 焦點$(i，j)=(\frac{18}{5}，\frac{6}{5})$，正焦弦長 $=4|c|=4\sqrt{(\frac{18}{5}-2)^2+(\frac{6}{5}-0)^2}=4\times 2=8$，

設正焦弦長所在直線方程式爲 $4x+3y+t=0$，過$(\frac{18}{5}，\frac{6}{5})$

$\Rightarrow 4\times\frac{18}{5}+3\times\frac{6}{5}+t=0 \Rightarrow t=-18$，$\therefore$所求爲 $4x+3y-18=0$．

7. 試求：拋物線$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\dfrac{|x+y+4|}{\sqrt{2}}$的

(1) 對稱軸方程式爲＿＿＿＿．(2) 頂點坐標爲＿＿＿＿．(3) 正焦弦長爲＿＿＿＿＿．

解答 (1)$x-y=0$;(2)(0，0);(3)$8\sqrt{2}$

解析 拋物線$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\dfrac{|x+y+4|}{\sqrt{2}}$，焦點 $F(2，2)$，準線 L：$x+y+4=0$，

設對稱軸方程式爲 $x-y+k=0$，過 $F(2，2) \Rightarrow 2-2+k=0 \Rightarrow k=0$，

$\therefore$對稱軸方程式爲 $x-y=0$，又$\begin{cases}x+y+4=0\\ x-y=0\end{cases} \Rightarrow A(-2，-2)$，

則頂點爲 A 與 F 中點，$\therefore$頂點$(\frac{-2+2}{2}，\frac{-2+2}{2})=(0，0)$，

正焦弦長 $=2\overline{AF}=2\sqrt{(-2-2)^2+(-2-2)^2}=2\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$．

8. 根據下列條件，求出拋物線之方程式：

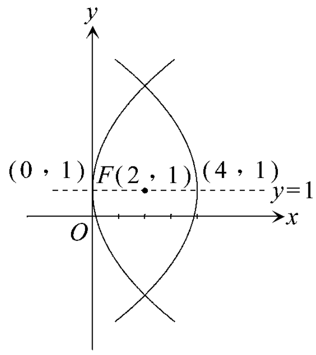
(1) 焦點(2，1)，準線平行於 y 軸，正焦弦長為 8：＿＿＿＿＿＿＿．

(2) 頂點(0，0)，焦點在直線 $x-y=2$ 上，對稱軸為 y 軸：＿＿＿＿＿＿＿．

解答　(1) $(y-1)^2=8x$ 或 $(y-1)^2=-8(x-4)$;(2) $x^2=-8y$

解析　(1) 焦點 $F(2，1)$，準線平行於 y 軸 $\Rightarrow$ 軸的方程式為 $y=1$（軸垂直 y 軸）

$4|c|=8 \quad \Rightarrow \quad 4c=\pm 8 \quad \Rightarrow \quad c=\pm 2$．



① $c=2$ 時，拋物線開口向右，頂點在焦點 $F(2，1)$的左方，

所以頂點坐標為(0，1)，拋物線方程式為$(y-1)^2=8x$．

② $c=-2$ 時，拋物線開口向左，頂點在焦點 $F(2，1)$的右方，

頂點坐標為(4，1)，拋物線方程式為$(y-1)^2=-8(x-4)$，

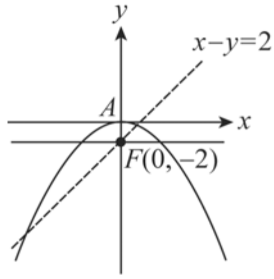
∴拋物線方程式為$(y-1)^2=8x$ 或$(y-1)^2=-8(x-4)$．

(2) 焦點在直線 $x-y=2$ 上，也在對稱軸 $x=0$ 上，

∴焦點坐標為 $F(0，-2)$，

又頂點 $A(0，0)$，∴$|c|=\overline{AF}=2$，又拋物線開口向下

$\Rightarrow \quad c=-2$，　　故拋物線方程式為 $x^2=-8y$．



9. 頂點 $A(1，1)$，焦點 $F(2，3)$的拋物線，其

(1) 準線方程式為＿＿＿＿＿＿＿．(2) 正焦弦長為＿＿＿＿＿＿＿．

解答　(1)$x+2y=-2$;(2)$4\sqrt{5}$

解析　頂點 $A(1，1)$，焦點 $F(2，3)$，

則對稱軸為過 A，F 之直線方程式：$\dfrac{y-1}{x-1}=\dfrac{3-1}{2-1} \quad \Rightarrow \quad 2x-y=1$，

設準線方程式為 $x+2y=k$，過 $B(a，b)$，則 $A(1，1)$為 $F(2，3)$與 $B(a，b)$之中點，

∴$(a，b)=(0，-1) \quad \Rightarrow \quad 0-2=k \quad \Rightarrow \quad k=-2$，

∴準線方程式：$x+2y=-2$，正焦弦長 $=4|c|=4\overline{AF}=4\sqrt{1^2+2^2}=4\sqrt{5}$．

10. 拋物線$(x-3)^2=8(y+1)$的(1) 頂點坐標為＿＿＿＿＿＿＿．(2) 焦點坐標為＿＿＿＿＿＿＿．

(3) 準線方程式為＿＿＿＿＿＿＿．

解答　(1)(3，−1);(2)(3，1);(3)$y=-3$

解析　$(x-3)^2=4\times 2(y+1)$，∴$c=2$，頂點(3，−1)，

焦點$(3，-1+2)=(3，1)$，準線 $y+1=-2 \quad \Rightarrow \quad y=-3$．

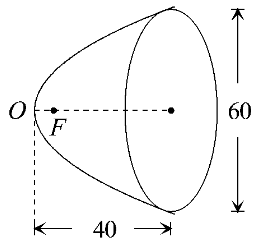
11. 已知一拋物線焦點(4，0)，頂點(2，0)，則拋物線方程式＿＿＿＿＿＿＿．

解答　$y^2=8(x-2)$

解析　拋物線焦點(4，0)，頂點(2，0)，則對稱軸方程式：$y=0$，$c=2$，

∴拋物線方程式為 $y^2=4\times 2(x-2)$，即 $y^2=8(x-2)$．

12. 探照燈的外殼是拋物線繞它的對稱軸旋轉一周所形成的曲面，如圖所示．已知燈口處的直徑是 60 公分，燈的深度是 40 公分，則焦距（焦點與頂點的距離）是＿＿＿＿＿＿＿公分．

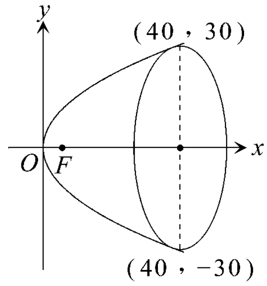


解答　$\frac{45}{8}$

解析　建立坐標系，頂點 O 爲原點，則設拋物線方程式爲 $y^2 = 4cx$，

過(40，30)與(40，－30)

$\Rightarrow \quad (30)^2 = 4c(40) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{900}{160} = \frac{45}{8}$，即焦距 $= \frac{45}{8}$.



13. 設 F 爲拋物線$(y-1)^2 = 12(x-1)$的焦點，若 $P(a，b)$在拋物線上，且 $\overline{PF} = 9$，則 $a =$ ＿＿＿＿＿＿ .

解答　7

解析

拋物線 $(y-1)^2 = 12(x-1)$，頂點(1，1)，$4c = 12$，$c = 3$，

$\therefore$開口向右，焦點 $F(4，1)$，準線 L ： $x = -2$，

$\because P$ 在拋物線上且 $\overline{PF} = 9$，

$\therefore \overline{PF} = d(P，L) \quad \Rightarrow \quad 9 = a-(-2) \quad \Rightarrow \quad a = 7$.

14. 設有一拋物線 Γ ：$y^2 = 8x$，若與 Γ 共軸、共焦點，通過點$(1，2\sqrt{6})$的拋物線爲 $y^2 = ax + b$，$a > 0$，則$(a，b) =$ ＿＿＿＿＿＿ .

解答　(12，12)

解析　拋物線 Γ ：$y^2 = 8x \Rightarrow (y-0)^2 = 4\times2\times(x-0)$，頂點$(0,0)$，焦點$(2,0)$

與 $y^2 = 8x$ 共軸、共焦點之拋物線，其方程式可設之爲 $y^2 = 4(2-t)(x-t)$，$t \in \boldsymbol{R}$，

$\because$過$(1，2\sqrt{6})$ $\quad \Rightarrow \quad 24 = 4(2-t)(1-t) \quad \Rightarrow \quad t^2 - 3t - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 4，-1$，

$t = 4 \quad \Rightarrow \quad y^2 = -8(x-4) = -8x + 32$，$a < 0$ 不合，

$t = -1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 12(x+1) = 12x + 12$，$\therefore a = 12$，$b = 12$.

15. 拋物線 $y = ax^2 + bx + 1$ 的正焦弦長爲$\frac{1}{3}$，開口向下，其焦點爲$(k，\frac{9}{4})$，又 $k > 0$，則

(1)拋物線之對稱軸方程式爲＿＿＿＿＿＿ .　(2) 準線方程式爲＿＿＿＿＿＿ .

解答　(1) $x - \frac{2}{3} = 0$;(2) $y = \frac{29}{12}$

解析　正焦弦長爲$\frac{1}{3} \Rightarrow 4|c| = \frac{1}{3}, |c| = \frac{1}{12}$，又開口向下$\Rightarrow c = -\frac{1}{12}$且頂點爲$(k, \frac{9}{4} + \frac{1}{12}) = (k, \frac{7}{3})$

故拋物線之方程式可設爲$(x-k)^2 = 4(-\frac{1}{12})(y - \frac{7}{3})$，又拋物線又爲 $y = ax^2 + bx + 1$

表圖形過$(0,1)$，代入上式$(0-k)^2 = 4(-\frac{1}{12})(1 - \frac{7}{3}) \Rightarrow k^2 = \frac{4}{9}$，又 $k > 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$，

故拋物線方程式$(x - \frac{2}{3})^2 = \frac{1}{-3}(y - \frac{7}{3})$，對稱軸方程式 $x - \frac{2}{3} = 0$，頂點$(\frac{2}{3}，\frac{7}{3})$

$\Rightarrow$　準線 $y = \frac{7}{3} + \frac{1}{12} = \frac{29}{12}$.