高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.02.10					
範圍	3-4 球與平面	班級		姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 球面$S：x^2+y^2+z^2+2x+4y+4=0$ 上任一點P到平面$E：2x-y+2z=6$ 的最大距離 $=$______，最小距離 $=$__________。

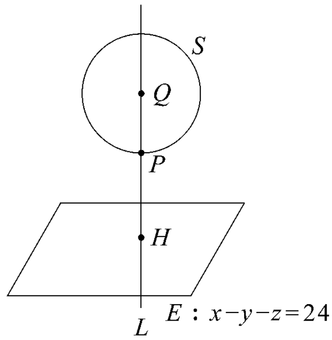
【解答】(1) 3 (2) 1

【詳解】$S：(x+1)^2+(y+2)^2+z^2=1$，球心$S(-1，-2，0)$，半徑$r=1$

S到平面$E：2x-y+2z=6$ 的距離$d(S，E)=\dfrac{|-2+2+0-6|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{6}{3}=2$

則球面S上任一點P到E的距離最大值 $=d(A，E)+r=2+1=3$，

最小值 $=d(A，E)-r=2-1=1$



2. 點P是球面$S：x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+11=0$ 的動點，當P到平面$E：x-y-z=24$ 距離最小時，點P之坐標為________________。

【解答】$(2，-3，2)$

【詳解】

$S：(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3$

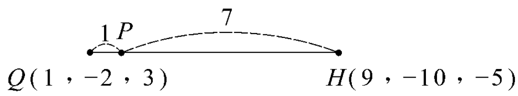
$\therefore$ 球心為$Q(1，-2，3)$，半徑$r=\sqrt{3}$

球心Q到平面$E：x-y-z-24=0$ 距離為$d(Q，E)=\dfrac{|1+2-3-24|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{24}{\sqrt{3}}=8\sqrt{3}$

$\because$ $\overline{PQ}=r=\sqrt{3}$ $\therefore$ $\overline{PH}=8\sqrt{3}-\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

$\overleftrightarrow{PQ}$：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$，令$H(t+1，-t-2，-t+3)\in L$

$\therefore$ $H\in E$ $\Rightarrow$ $t=8$ $\Rightarrow$ $H(9，-10，-5)$



$\because\overline{QP}：\overline{PH}=\sqrt{3}：7\sqrt{3}=1：7\Rightarrow(\dfrac{1\times9+7\times1}{1+7},\dfrac{1\times(-10)+7\times(-2)}{1+7},\dfrac{1\times(-5)+7\times3}{1+7})=P(2，-3，2)$

3. 已知一球面$S：x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$，

(1)球心坐標為__________。(2)若平面$x+y+z+k=0$ 與S相切，則實數k之值 $=$__________。

【解答】(1) $(1，-2，1)$ (2) $\pm3\sqrt{3}$

【詳解】$S：(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3^2$

(1)球心$P(1，-2，1)$，半徑 3

(2)平面$E：x+y+z+k=0$ 與球面S相切 $\Rightarrow$ 球心P到E的距離 $=S$的半徑

$\Rightarrow$ $\dfrac{|1-2+1+k|}{\sqrt{1+1+1}}=3$ $\Rightarrow$ $k=\pm3\sqrt{3}$

4. 球面$S：x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$，一點$P(1，0，1)$，過P點與S相切的平面方程式為__________。

【解答】$2x-2y+z-3=0$

【詳解】$1^2+0^2+1^2+2\times1-0-4=0 \quad \Rightarrow \quad P$點在球面上

$1\cdot x+0\cdot y+1\cdot z+2(\frac{x+1}{2})-4(\frac{y+0}{2})-4=0 \Rightarrow 2x-2y+z-3=0$ 爲所求

5. 已知球面S：$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=9$，求過點$P(2,-1,-2)$且與球面S相切的平面方程式爲____。

【解答】$x-2y-2z-8=0$

【詳解】

球面S：　$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=9$，

又$(2-1)^2+(-1-1)^2+(-2)^2=9 \quad \therefore \quad P(2，-1，-2)$在球面上

所求之切平面方程式爲$(2-1)(x-1)+(-1-1)(y-1)+(-2)z=9$，即$x-2y-2z-8=0$

6. 平面E：$x-2y+2z+k=0$，球面S：$x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z+5=0$，若E與S相交成一圓，則k值範圍爲__________。

【解答】$4<k<10$

【詳解】

球面S：$(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=1 \quad \Rightarrow \quad$ 球心$A(-1，1，-2)$，半徑$r=1$

若E與S相交成一圓 $\quad \Rightarrow \quad 0 \le d(A；E)<1 \quad \Rightarrow \quad 0<\frac{|-1-2-4+k|}{\sqrt{1+4+4}}<1$，

$0 \le < \frac{|k-7|}{3}<1 \Rightarrow 0 \le |k-7|<3 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le k-7<3 \\ -3<k-7 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 \le k<10 \\ 4<k \le 7 \end{cases}$，即 $4<k<10$

7. 空間中，球面S：$(x-3)^2+y^2+(z+4)^2=25$ 被平面$x=2$ 切割的截面圓方程式爲__________。

【解答】$\begin{cases} y^2+(z+4)^2=24 \\ x=2 \end{cases}$

【詳解】

$\begin{cases} S：(x-3)^2+y^2+(z+4)^2=25\cdots\cdots① \\ E：x=2\cdots\cdots② \end{cases}$，②代入① $\quad \Rightarrow \quad y^2+(z+4)^2=24$

$\therefore$ 截圓方程式爲$\begin{cases} y^2+(z+4)^2=24 \\ x=2 \end{cases}$

8. 一球面與xy平面交於圓$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=16 \\ z=0 \end{cases}$，且過點$(4，4，3)$，則此球面方程式爲________。

【解答】$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=17$

【詳解】交圓$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=16 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$交圓圓心$(1,2,0)$，球心$(1,2,t)$

設球面S：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-t)^2=R^2$，球心S$(1，2，t)$，半徑$R$

$z=0$ 代入$S \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2+(y-2)^2=R^2-t^2$與$(x-1)^2+(y-2)^2=16$ 比較係數

得$R^2-t^2=16 \quad \Rightarrow \quad R^2=t^2+16\cdots\cdots①$

又球面S過$P(4，4，3)$，故$R^2=\overline{AP}^2=9+4+(c-3)^2 \overset{由①}{=\!=} c^2+16$

得$c=1$ 代入① $\quad \Rightarrow \quad R^2=17$，故球面$S$：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=17$

9. 通過點A(2，1，0)與$B(\frac{1}{2}$，0，1)的平面E，若與球面S：$x^2+y^2+z^2=1$ 相切，則平面E的方程式為________________。

【解答】$2x-y+2z=3$ 或 $2x+3y+6z=7$

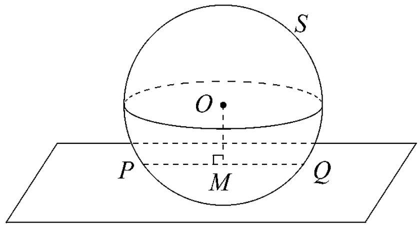
【詳解】$\overleftrightarrow{AB}$：$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-2}$ $\Leftrightarrow$ $\overleftrightarrow{AB}$：$\begin{cases}2x-3y-1=0\\ y+z-1=0\end{cases}$

設E：$(2x-3y-1)+t(y+z-1)=0$，即E：$2x+(t-3)y+tz-(1+t)=0$

$\because$ E與S：$x^2+y^2+z^2=1$ 相切 $\therefore$ 球心O(0，0，0)到E的距離 = 半徑

$\Rightarrow$ $\frac{|t+1|}{\sqrt{4+(t-3)^2+t^2}}=1$ $\Rightarrow$ $t=2$ 或$t=6$ $\therefore$ E：$2x-y+2z=3$ 或 $2x+3y+6z=7$

10. 設A(1，−1，−2)，B(1，2，1)，通過A與B的平面E與球面S：$x^2+y^2+z^2=2$ 截出的所有圓中，面積最小值 = ________，此時平面E的方程式為________。



【解答】$\frac{1}{2}\pi$，$2x+y-z-3=0$

【詳解】

$\overrightarrow{AB}=(0，3，3)=3(0，1，1)$，直線$AB$的方程式$\begin{cases}x=1\\ y=-1+t\\ z=-2+t\end{cases}$ 代入$x^2+y^2+z^2=2$

$1+(-1+t)^2+(-2+t)^2=2$ $\Rightarrow$ $t^2-3t+2=0$ $\Rightarrow$ $(t-1)(t-2)=0$ $\Rightarrow$ $t=1，2$

$\therefore$ 直線AB與球面S的交點為P(1，0，−1)，Q(1，1，0)，則包含A，B的平面E，與球面截圓面積最小時，即以$\overline{PQ}$為直徑的圓

(1)若最小圓的半徑r，則$r^2=(\frac{1}{2}\overline{PQ})^2=(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2=\frac{1}{2}$ $\therefore$ 圓面積為$\frac{1}{2}\pi$

(2)$\overline{PQ}$中點$M(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，此時平面$E$以$\overrightarrow{OM}=(1，\frac{1}{2}，-\frac{1}{2})$為法向量且過$A$(1，−1，−2)

$\therefore$ E的方程式為$(x-1)+\frac{1}{2}(y+1)-\frac{1}{2}(z+2)=0$，即 $2x+y-z-3=0$

【P.S】

①直線AB與球面不相交時，沒有最小圓。

②通過A，B之平面E與球面所交最大圓為球的大圓，即平面E通過球心時所截出的圓。

11. 若$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-55=0$，則

(1) $x+2y+2z$的最大值為________。(2) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2$之最小值為________。

【解答】(1) 25 (2) 25

【詳解】$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-55=0$

$\Rightarrow$ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=64$，球心$O$(1，−2，2)，半徑$r=8$

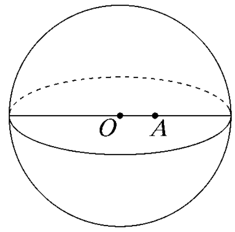
(1)利用<u>柯西</u>不等式得$(1^2+2^2+2^2)[(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2]\geq[(x-1)+2(y+2)+2(z-2)]^2$

$\Rightarrow$ $9\times 64\geq(x+2y+2z-1)^2$ $\Rightarrow$ $-24\leq x+2y+2z-1\leq 24$

$\Rightarrow$ $-23\leq x+2y+2z\leq 25$ $\therefore$ $x+2y+2z$的最大值為 25

(2)設$A(3，-1，4)$，則$\overline{OA}=\sqrt{(3-1)^2+(-1+2)^2+(4-2)^2}=3$

∴　$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2$的最小值$=(r-\overline{OA})^2=(8-3)^2=25$



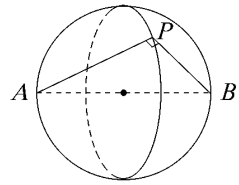
12.以$A(10，2，5)$，$B(-6，10，11)$為直徑兩端點的球面S，求

(1) S的方程式為__________。

(2) S被xy平面截出圓的面積為__________。

(3) S截出z軸的線段長為__________。

【解答】(1) $x^2+y^2+z^2-4x-12y-16z+15=0$　(2) 25π　(3) 14



【詳解】

(1)$(x-10)(x+6)+(y-2)(y-10)+(z-5)(z-11)=0$

$\Rightarrow\quad x^2+y^2+z^2-4x-12y-16z+15=0$

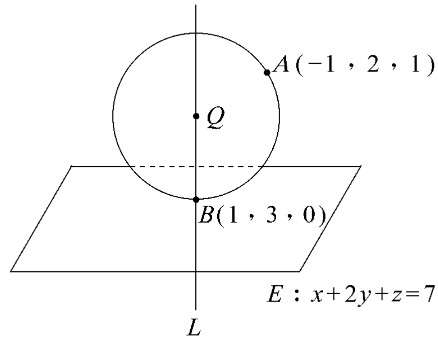
(2)令$z=0$得$x^2+y^2-4x-12y+15=0\quad\Rightarrow\quad(x-2)^2+(y-6)^2=5^2$　∴　圓面積 25π

(3)設與z軸交點$(0，0，t)$代入，$t^2-16t+15=0\quad\Rightarrow\quad t=1，15$

得兩交點$(0，0，1)$，$(0，0，15)$，此線段長為 $15-1=14$

13.球面S過點$A(-1，2，1)$，又與平面E：$x+2y+z=7$ 相切於點$B(1，3，0)$，則球面S的方程式為__________。

【解答】$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$



【詳解】

過B而垂直平面E的直線L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{1}$，

令球心$Q(1+t，3+2t，t)$

∵　$\overline{QA}=\overline{QB}$

∴　$(t+2)^2+(2t+1)^2+(t-1)^2=t^2+(2t)^2+t^2$　∴　$t=-1$

∴　球心$Q(0，1，-1)$，半徑為$\sqrt{6}$，S：$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$

14.兩球面S_1：$x^2+y^2+z^2=16$ 與S_2：$x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-4=0$ 相交成一圓C，則圓C所在的平面E方程式為__________。

【解答】$x-y+z=6$

【詳解】

由$(x^2+y^2+z^2-16)-(x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-4)=0$

$\Rightarrow\quad 2x-2y+2z-12=0\quad\Rightarrow\quad x-y+z=6$

15. 一平面 $3x+6y+2z-18=0$ 與三坐標軸相交於A，B，C三點，O為原點，則四面體O-ABC之內切球之球心為______________。

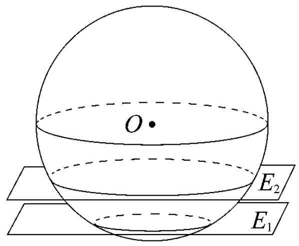
【解答】$(1，1，1)$

【詳解】內切球與三坐標平面皆相相切

設球心為$(r，r，r)$，半徑為 r，$r>0$，$\dfrac{|3r+6r+2r-18|}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}}=r\quad\Rightarrow\quad\dfrac{|11r-18|}{7}=r$

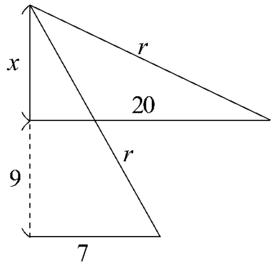
∵　球心與原點在平面之同側　$\Rightarrow\quad 18-11r=7r\quad\Rightarrow\quad r=1$，故球心為$(1，1，1)$

16. 如下圖，在球面S中，球心O的同一側有距離為 9 的兩平行截面（E_1，E_2距離為 9），所截圓的面積各為 49π，400π，求S半徑 ＝__________。



【解答】25

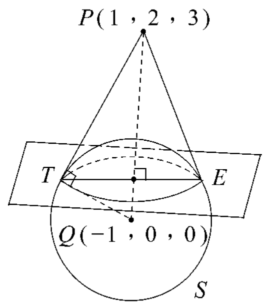
【詳解】



設球心 O 與平面 E_2 距離 x ，球半徑 r

則$\begin{cases} x^2+400=r^2 & \cdots\cdots① \\ (x+9)^2+49=r^2 & \cdots\cdots② \end{cases}$，② − ①得 $x=15$ 代入①得 $r=25$

17.點$P(1，2，3)$到球面S：$(x+1)^2+y^2+z^2=10$ 的切線段長為__________，所有切點形成一個圓，此圓所在平面方程式為______，圓的圓心坐標為______。



【解答】(1)$\sqrt{7}$ (2) $2x+2y+3z=8$ (3) $(\frac{3}{17}，\frac{20}{17}，\frac{30}{17})$

【詳解】S：$(x+1)^2+y^2+z^2=10$ 的球心$Q(-1，0，0)$，

過$P(1，2，3)$作球的切線，一切點T

(1)切線段長 $\overline{PT}=\sqrt{\overline{PQ}^2-r^2}=\sqrt{(4+4+9)-10}=\sqrt{7}$

(2)所有切點所成的圓所在平面E即為兩球的根平面，

亦即切點面平面E的方程式為$(1+1)(x+1)+2y+3z=10$，即 $2x+2y+3z=8$

(3)切點圓的圓心為直線PQ與平面E的交點，直線PQ的方程式：$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$

設圓心$C(-1+2t，2t，3t)$代入E：$2x+2y+3z=8$ 得 $2(-1+2t)+2(2t)+3(3t)=8$

$\Rightarrow\ t=\frac{10}{17}$，故$C(\frac{3}{17}，\frac{20}{17}，\frac{30}{17})$

18.設點$A(1，1，-2)$在球面S上，若另兩球面S_1：$x^2+y^2+z^2-16=0$ 與S_2：$x^2+y^2+z^2+3x-4y-12z-34=0$ 的交點都在球面S上，則球面S的方程式為______________________________。

【解答】$x^2+y^2+z^2+6x-8y-24z-52=0$

【詳解】∵ S包含S_1與S_2的交圓，根據球係

設S：$(x^2+y^2+z^2-16)+t(x^2+y^2+z^2+3x-4y-12z-18)=0$

∵ $A(1，1，-2)\in S\Rightarrow(1+1+4-16)+t(1+1+4+6-8+24)=0$ ∴ $t=-2$

$\Rightarrow\ S$：$x^2+y^2+z^2+6x-8y-24z-52=0$

19.球面S切xy平面於點$(1，2，0)$且過點$(3，1，2)$，則S的方程式為__________。

【解答】$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-\frac{9}{4})^2=\frac{81}{16}$

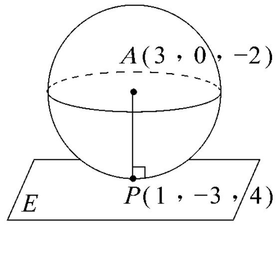
【詳解】

球面S切xy平面於$A(1，2，0)$，設球心Q，則$\overline{QA}$垂直xy平面且$\overline{QA}$為球之半徑

設$Q(1，2，k)$，又$B(3，1，2)$，則$\overline{QA}=\overline{QB}=|k|\ \Rightarrow\ (3-1)^2+(-1)^2+(k-2)^2=k^2$

$\Rightarrow\ k=\frac{9}{4}$，故球面$S$的方程式為$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-\frac{9}{4})^2=\frac{81}{16}$

20.設一球面S：$(x-3)^2+y^2+(z+2)^2=49$，



(1)過點(1，－3，4)與S相切的平面方程式為__________。

(2)點Q(1，2，－2)到球面S的最短距離為__________。

【解答】(1) $2x+3y-6z+31=0$　(2) $7-2\sqrt{2}$

【詳解】

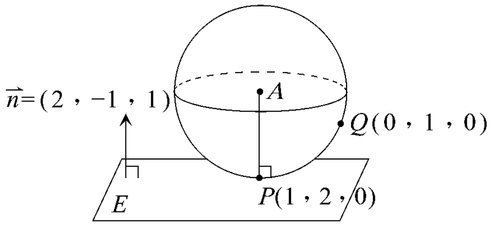
(1) $P(1，-3，4)\in S$，得切平面方程式為$(1-3)(x-3)-3y+6(z+2)=49 \Rightarrow 2x+3y-6z+31=0$

(2)最短距離 $=|\overline{AQ}-r|=|2\sqrt{2}-7|=7-2\sqrt{2}$

21.球面S切平面E：$2x-y+z=0$於點P(1，2，0)，且過點Q(0，1，0)，則球面S方程式為__________。

【解答】$(x+1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=6$

【詳解】



$\overleftrightarrow{AP}\perp E \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AP}$ //平面法向量$\vec{n}=(2，-1，1)$，

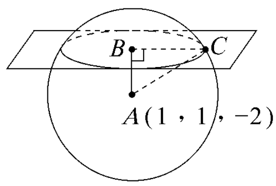
設球心$A(1+2t，2-t，t)$

$\overline{AP}^2=\overline{AQ}^2 \quad \Rightarrow \quad 4t^2+t^2+t^2=(1+2t)^2+(1-t)^2+t^2$

$\Rightarrow \quad t=-1$，即球心$A(-1，3，-1)$，半徑$R=\overline{AP}=\sqrt{6}$

故球面S的方程式為$(x+1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=6$

22.設球面S：$x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z-3=0$與平面E：$2x+y-2z-4=0$相交於一圓，則此圓的面積為__________，圓心坐標為__________。



【解答】(1) 8π　(2) $(\frac{1}{3}，\frac{2}{3}，\frac{-4}{3})$

【詳解】

球面S：$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3^2$，球心$A(1，1，-2)$，半徑$r=3$

$\overline{AB}=d(A；E)=\dfrac{|2+1+4-4|}{3}=1$

圓半徑$r=\overline{BC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}$　∴　圓面積 $=\pi r^2=8\pi$

$\overleftrightarrow{AB}$：$\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=-2-2t \end{cases}$，$t\in R$，其中平面$E$之法向量$\vec{n}=(2，1，-2)$，即為$\overleftrightarrow{AB}$之方向向量

令$B(1+2t，1+t，-2-2t)$代入E，得$t=\dfrac{-1}{3}$，即圓心$B\,(\frac{1}{3}，\frac{2}{3}，\frac{-4}{3})$

23.球面S與xy平面截出一圓，其方程式：$x^2+y^2+2x-4y-35=0$，與xz平面截出一圓，其方程式為$x^2+z^2+2x+6z-35=0$，試求$S=$__________。

【解答】$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=49$

【詳解】

由球面S與E_{xy}：$z=0$截出一圓：$x^2+y^2+2x-4y-35=0 \Rightarrow$ 交圓圓心$(-1,2,0)$，半徑$\sqrt{40}$

與xz平面截出一圓$x^2+z^2+2x+6z-35=0 \Rightarrow$ 交圓圓心$(-1,0,-3)$，半徑$\sqrt{45}$

可知球心$(-1,2,-3)$，球半徑$\sqrt{(\sqrt{40})^2+3^2}=7$，故$S$：$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=49$

24.設球面S切平面E：$x-2y-2z=5$於A(3，－2，1)，又$B(2，-3，1)\in S$，則S之球心為____。

【解答】(4，－4，－1)

【詳解】可用球係(與 21 題比較作法)

視點A爲一點球，可設之爲過球與平面之交圓之球系

$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2+k(x-2y-2z-5)=0$

$\because$ $B(2，-3，1)\in S$ $\Rightarrow$ $1+1+0+k(2+6-2-5)=0$ $\Rightarrow$ $k=-2$

$S：x^2+y^2+z^2-8x+8y+2z+24=0$，故球心爲$(4，-4，-1)$

25.球面S與xy平面交於圓$C_1：x^2+y^2-4x-6y+a=0$，與yz平面交於圓$C_2：y^2+z^2+by-2z+c=0$，又圓C_1與直線$\sqrt{2}\,x-y=8\sqrt{2}\ -3$ 相切。

(1)序對$(a，b，c)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

(2) S之中心坐標爲＿＿＿＿＿＿＿＿，半徑 $=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

(3) S與各坐標平面截出圓面積之和 $=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $(-11，-6，-11)$ (2) $(2，3，1)$，5 (3) 61π

【詳解】圓C_1整理爲$(x-2)^2+(y-3)^2=13-a$，圓C_2整理爲$(y+\frac{b}{2})^2+(z-1)^2=\frac{b^2}{4}+1-c$

球面S之球心在xy平面上的正射影爲$(2，3，0)$，

在yz平面上的正射影爲$(0，-\frac{b}{2}，1)$

$\therefore$ S之球心爲$Q(2，3，1)$且$-\frac{b}{2}=3\Rightarrow b=-6$

設S之半徑r，S之方程式爲$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=r^2$

圓C_1與直線$\sqrt{2}\,x-y=8\sqrt{2}-3$ 相切

$\Rightarrow$ 圓心$K(2，3)$到直線距離$\overline{KP}=\dfrac{|2\sqrt{2}-3+3-8\sqrt{2}|}{\sqrt{2+(-1)^2}}=2\sqrt{6}=\sqrt{13-a}\Rightarrow a=-11$，

$\therefore$ $r=\overline{QP}=\sqrt{\overline{QK}^2+\overline{KP}^2}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{6})^2}=5$，

$\therefore$ 所求爲$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=5^2$

於S的方程式中，令$x=0$ 得$(y-3)^2+(z-1)^2=21$ $\Rightarrow 21=\frac{b^2}{4}+1-c, c=-11$

故S在三個坐標平面上截圓面積和爲$(24+16+21)\ \pi=61\pi$