<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：98.01.12</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">3-3 球面方程式</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、填充題(每題 10 分)

1. 球面 $3x^2+3y^2+3z^2-6x+9y-2=0$ 的球心坐標爲__________，半徑爲__________。

【解答】$(1，-\frac{2}{3}，0)$，$\frac{\sqrt{141}}{6}$

【詳解】

$x^2+y^2+z^2-2x+3y-\frac{2}{3}=0$，配方得$(x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2+z^2=\frac{47}{12}$

球心$(1，-\frac{2}{3}，0)$，半徑$\sqrt{\frac{47}{12}}=\frac{\sqrt{141}}{6}$

2. $S：x^2+y^2+z^2+2(m+1)x+2my+2mz+4m^2+4m-2=0$，

(1)若S表一球，則m之範圍____________________。

(2)承上題，若此球之半徑爲 2，則球心爲_______________。

【解答】(1) $-3<m<1$　(2) $(0，1，1)$

【詳解】

(1) $d^2+e^2+f^2-4g=\ 4(m+1)^2+4m^2+4m^2-4(4m^2+4m-2)=4(-m^2-2m+3)$

$\because$　S表一球　$\Rightarrow$　$4(-m^2-2m+3)>0$　$\Rightarrow$　$m^2+2m-3<0$　$\Rightarrow$　$-3<m<1$

(2) $r=\frac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2+f^2-4g}\Rightarrow r^2=\frac{1}{4}(d^2+e^2+f^2-4g)$,

$r^2=-m^2-2m+3=4$　$\Rightarrow$　$m^2+2m+1=0$　$\Rightarrow(m+1)^2=0$,　$m=-1$，

球心$(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2},-\frac{f}{2})$ $=(-m-1，-m，-m)=(0，1，1)$

3. 以$A(-1，2，3)$和$B(-3，6，7)$爲直徑兩端點的球面方程式爲__________。

【解答】$(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=9$

【詳解】

以$A(-1，2，3)$和$B(-3，6，7)$爲直徑兩端點的球面方程式爲

$(x+1)(x+3)+(y-2)(y-6)+(z-3)(z-7)=0$

即$x^2+y^2+z^2+4x-8y-10z+36=0$，即$(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=9$

4. 通過四點$O(0，0，0)$，$A(1，0，0)$，$B(0，1，1)$，$C(1，0，1)$的球面方程式爲__________。

【解答】$x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$

【詳解】

設通過四點$O(0，0，0)$，$A(1，0，0)$，$B(0，1，1)$，$C(1，0，1)$的球面方程式爲

$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$，

過四點$O(0，0，0)$，$A(1，0，0)$，$B(0，1，1)$，$C(1，0，1)$代入

則$g=0$，$1+d+g=0$，$1+1+e+f+g=0$，$1+1+d+f+g=0$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}g=0\\1+d=0\\e+f+2=0\\d+f+2=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad d=-1，f=-1，e=-1，g=0$$

故所求球面方程式爲$x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$

5. 以$P(-1，2，3)$爲球心，並通過原點的球面方程式爲＿＿＿＿＿。

【解答】$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$

【詳解】

半徑$r^2=\overline{OP}^2=1+4+9=14$　∴　球面方程式爲$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$

6. 設空間中一球面通過兩點$(0，2，2)$與$(4，0，0)$，而球心在z軸上，求此球面方程式＿＿＿＿＿。

【解答】$x^2+y^2+(z+2)^2=20$

【詳解】

設球心$(0，0，t)$，$(0-0)^2+(2-0)^2+(2-t)^2=(4-0)^2+(0-0)^2+(0-t)^2 \quad \Rightarrow \quad t=-2$

$(0，0，-2)$與$(4，0，0)$距離 $=\sqrt{20}$ 即半徑，∴　球面方程式：$x^2+y^2+(z+2)^2=20$

7. 兩球面S_1：$x^2+y^2+z^2=16$ 與S_2：$x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-4=0$ 相交成一圓C，則圓C所在的平面E方程式爲＿＿＿＿＿。

【解答】$x-y+z=6$

【詳解】根平面 $S_1-S_2 \Rightarrow \ (x^2+y^2+z^2-16)-(x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-4)=0$

$\Rightarrow \quad 2x-2y+2z-12=0 \quad \Rightarrow \quad x-y+z=6$

8. 設點$A(1，1，-2)$在球面S上，若另兩球面S_1：$x^2+y^2+z^2-16=0$ 與S_2：$x^2+y^2+z^2+3x-4y-12z-34=0$ 的交點都在球面S上，則球面S的方程式爲＿＿＿＿＿。

【解答】$x^2+y^2+z^2+6x-8y-24z-52=0$

【詳解】∵S含S_1與S_2的交圓C，

根據球系：C在球平面S：$(x^2+y^2+z^2+3x-4y-12z-34)+k(x^2+y^2+z^2-16)=0$ 上

∵　$A(1，1，-2)\in S \Rightarrow (1+1+4+3-4+24-34)+k(1+1+4-16)=0, \quad k=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad S：x^2+y^2+z^2+6x-8y-24z-52=0$

9. 二球面S_1，S_2相交於一圓C，其中S_1：$x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z+1=0$，S_2：$x^2+y^2+z^2-3x-2y-4z+6=0$，則圓C之圓心爲＿＿＿＿＿。

【解答】$O(1，0，3)$

【詳解】此二球之根平面E：$S_2-S_1=0 \quad \Rightarrow \quad E：x+2y-2z+5=0$

$S_1:(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=8$ ； $S_2:(x-\dfrac{3}{2})^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\dfrac{5}{4}$

$S_1(2,2,1);\ S_2(\dfrac{3}{2},1,2) \Rightarrow \overrightarrow{S_1S_2}=(-\dfrac{1}{2},-1,1)=-\dfrac{1}{2}(1,2,-2)$

圓C之圓心C爲直線$\overleftrightarrow{S_1S_2}$與$E$之交點　$\Rightarrow$ $\begin{cases} x=2+t \\ y=2+2t \\ z=1-2t \end{cases}$ 代入E

$(2+t)+2(2+2t)-2(1-2t)+5=0, \quad t=-1 \Rightarrow \quad C(1，0，3)$

10. 若直線L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{2}$ 與球面S：$x^2+y^2+z^2=r^2$相切，則半徑r的長 $=$＿＿＿＿＿，切點坐標爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\sqrt{5}$，$(\dfrac{2}{3}，-\dfrac{5}{3}，\dfrac{4}{3})$

【詳解】

直線L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{2}$與球面$S$：$x^2+y^2+z^2=r^2$相切，

設L上一點$P(1+t，-1+2t，2+2t)$，代入$x^2+y^2+z^2=r^2$，則

$(1+t)^2+(-1+2t)^2+(2+2t)^2=r^2\Rightarrow 9t^2+6t+(6-r^2)=0$　，

因爲相切$\Rightarrow$恰有一解，$\delta=0\Rightarrow 6^2-4\times 9\times(6-r^2)=0$，$r^2=5\Rightarrow r=\sqrt{5}$

$r^2=5\Rightarrow 9t^2+6t+1=0,\quad (3t+1)^2=0,\quad t=-\dfrac{1}{3}$，切點$P$坐標爲$(\dfrac{2}{3},-\dfrac{5}{3}，\dfrac{4}{3})$

11.求空間中一點$(-4，4，4)$到球面$x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z=0$上任一點Q的最長距離 $=$______；此時之Q點坐標爲__________。

【解答】12，$(4，0，-4)$

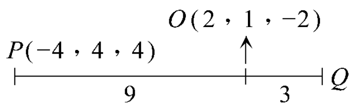
【詳解】

球面方程式：$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9\quad\Rightarrow\quad$球心$O(2，1，-2)$，半徑 3

$P(-4，4，4)$代入得$(-4-2)^2+(4-1)^2+(4+2)^2=81>9\quad\therefore\quad P$在球外

$\overline{OP}=9\quad\therefore\quad\overline{PQ}=\overline{PO}+\overline{OQ}=9+3=12$。$\overline{PO}$：$\overline{QO}=9：3=3：1$，由分點公式得

$Q(a,b)\Rightarrow(2，1，-2)=(\dfrac{-4+3a}{1+3},\dfrac{4+3b}{1+3},\dfrac{4+3c}{1+3})\Rightarrow(a,b,c)=(4，0，-4)$



12. 球面S_1：$x^2+y^2+z^2-6x+8=0$上任一點P，球面S_2：$x^2+y^2+z^2+2x+4y+4z+4=0$上任一點Q，則$\overline{PQ}$的最小值 $=$__________，最大值 $=$__________。

【解答】(1) $2\sqrt{6}-\sqrt{5}-1$　(2) $2\sqrt{6}+\sqrt{5}+1$

【詳解】

S_1：$(x-3)^2+y^2+z^2=1$，球心$S_1(3，0，0)$，半徑$r_1=1$

S_2：$(x+1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=5$，球心$S_2(-1，-2，-2)$，半徑$r_2=\sqrt{5}$

$\overline{S_1S_2}=\sqrt{4^2+2^2+2^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}>r_1+r_2\quad\therefore\quad S_1$與$S_2$外離

故$\overline{PQ}$的最小值 $=\overline{S_1S_2}-r_1-r_2=2\sqrt{6}-\sqrt{5}-1$，$\overline{PQ}$的最大值 $=\overline{S_1S_2}+r_1+r_2=2\sqrt{6}+\sqrt{5}+1$

13.求直線L：$\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{4}$與球面$S$：$x^2+y^2+z^2-12z+27=0$的交點坐標__________。

【解答】$(2，1，4)$及$(1，2，8)$

【詳解】

設交點坐標爲$(3-t，t，4t)$，代入S方程式得$(3-t)^2+t^2+(4t)^2-12(4t)+27=0$

$\Rightarrow\quad t^2-3t+2=0\quad\Rightarrow\quad t=1$或$2\quad\therefore\quad$二交點爲$(2，1，4)$及$(1，2，8)$

14.令$O(6，2，0)$，而點Q在球面S：$x^2+y^2+z^2=4$上移動，則$\overline{OQ}$中點的軌跡方程式爲____________。

【解答】$(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=1$

【詳解】設$Q(a，b，c)\in S\quad\therefore\quad a^2+b^2+c^2=4\quad\therefore\quad\overline{OQ}$中點爲$P(3+\dfrac{a}{2}，1+\dfrac{b}{2}，\dfrac{c}{2})$

設$x=3+\dfrac{a}{2}$，$y=1+\dfrac{b}{2}$，$z=\dfrac{c}{2}\quad\Rightarrow\quad a=2(x-3)$，$b=2(y-1)$，$c=2z$代入$a^2+b^2+c^2=4$

$\Rightarrow\quad[2(x-3)]^2+[2(y-1)]^2+(2z)^2=4\quad\Rightarrow\quad(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=1$

15.球面S與y軸交點的y坐標（y截距）為 -1 及 5，又過點$A(2，-1，0)$，$B(1，1，1)$，則球面S的方程式為__________。

【解答】$x^2+y^2+z^2-2x-4y+8z-5=0$

【詳解】

由S的y截距為 -1 及 5$\Rightarrow$過$C(0，-1，0)$，$B(0，5，0)$，設球心$S(p,2,q)$

$\because$ 過$A(2，-1，0)$，$B(1，1，1)$ $\Rightarrow (p-2)^2+(2+1)^2+(q-0)^2=(p-1)^2+(2-1)^2+(q-1)^2$

又過$C(0，-1，0)$ $\Rightarrow (p-2)^2+(2+1)^2+(q-0)^2=p^2+(2+1)^2+q^2$

$\therefore$ $p=1,q=-4\Rightarrow$球心$S(1,2,-4)$，半徑$\overline{SA}=\sqrt{(1-2)^2+(2+1)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{26}$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=(\sqrt{26})^2\Rightarrow S：x^2+y^2+z^2-2x-4y+8z-5=0$

16.一球面S過點$A(1，3，5)$，$B(7，3，-1)$，且球心Q在直線$L：x-1=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+3}{3}$上，則球面$S$的半徑為__________。

【解答】$\sqrt{51}$

【詳解】

設球心$Q(t+1，-2t，3t-3)$ $\because$ $A，B\in S$ $\therefore$ $\overline{AQ}=\overline{BQ}$ $=$ 半徑r

$\Rightarrow$ $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$ $\Rightarrow$ $t^2+(2t+3)^2+(3t-8)^2=(t-6)^2+(2t+3)^2+(3t-2)^2$

$\Rightarrow$ $t=1$ $\Rightarrow$ $Q(2，-2，0)$ $\therefore$ 半徑$r=\overline{AQ}=\sqrt{51}$

17.一平面 $3x+6y+2z-18=0$ 與三坐標軸相交於A，B，C三點，O為原點，則四面體O-ABC之內切球之球心為__________。

【解答】$(1，1，1)$

【詳解】

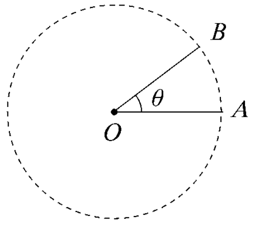
設球心為$(r，r，r)$，半徑為 r，$r>0$，$\dfrac{|3r+6r+2r-18|}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}}=r$ $\Rightarrow$ $\dfrac{|11r-18|}{7}=r$

$\because$ 球心與原點在平面之同側 $\Rightarrow$ $18-11r=7r$ $\Rightarrow$ $r=1$，故球心為$(1，1，1)$

18.球面$S：x^2+y^2+z^2=10$ 上有兩點$A(1，0，-3)$，$B(-2，\sqrt{5}，1)$，一隻螞蟻沿著球面由A爬行至B，其最小的路程為__________。

【解答】$\dfrac{2\sqrt{10}}{3}\pi$

【詳解】



球心為 $O(0，0，0)$，半徑為$\sqrt{10}$，$\overrightarrow{OA}=(1，0，-3)$，$\overrightarrow{OB}=(-2，\sqrt{5}，1)$

$\because$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos\theta$ $\Rightarrow$ $-5=\sqrt{10}\sqrt{10}\cos\theta$ $\Rightarrow$ $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\theta=120°$

$\overset{\frown}{AB}$長 $=2\pi(\sqrt{10})\cdot\dfrac{120°}{360°}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}\pi$ $\therefore$ 螞蟻爬行的最小路程為$\dfrac{2\sqrt{10}}{3}\pi$

19.已知空間中二定點$A(1，-3，1)$，$B(1，3，4)$及動點$P(x，y，z)$滿足$\overline{PA}：\overline{PB}=1：2$，則$P$點所成圖形的方程式為__________。

【解答】$x^2+y^2+z^2-2x+10y+6=0$

【詳解】

$A(1，-3，1)$，$B(1，3，4)$，$P(x，y，z)$滿足$\overline{PA}：\overline{PB}=1：2$，即$\overline{PB}=2\overline{PA}$，$\overline{PB}^2=4\overline{PA}^2$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=4[(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2]$

展開得$x^2-2x+y^2-6y+z^2-8z+26=4(x^2+y^2+z^2-2x+6y-2z+11)$

$\Rightarrow\ 3x^2+3y^2+3z^2-6x+30y+18=0\ \Rightarrow\ x^2+y^2+z^2-2x+10y+6=0$

20.設球面方程式爲$x^2+y^2+z^2=27$，若有一直線$L：\begin{cases}x+2y=3\\z=3\end{cases}$交球面於$P$，$Q$兩點，則線段$\overline{PQ}$之中點坐標爲__________。

【解答】$(\frac{3}{5}，\frac{6}{5}，3)$

【詳解】

$L：\begin{cases}x=3-2t\\y=t\\z=3\end{cases}$ 代入球面$S：x^2+y^2+z^2=27$，得$5t^2-12t-9=0$，

$(5t+3)(t-3)=0$，$t=\frac{-3}{5}$，3代入L，得$P(\frac{21}{5}，\frac{-3}{5}，3)$，$Q(-3，3，3)$，中點爲$(\frac{3}{5}，\frac{6}{5}，3)$

21.一球面與xy平面交於圓$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=16\\z=0\end{cases}$，且過點$(4，4，3)$，則此球面方程式爲________。

【解答】$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=17$

【詳解】

設球心$A(1，2，c)$，半徑R，則球面$S：(x-1)^2+(y-2)^2+(z-c)^2=R^2$，

又球面S過$P(4，4，3)\Rightarrow\ (4-1)^2+(4-2)^2+(3-c)^2=R^2$，

故$R^2=13+(c-3)^2$，且$R^2=c^2+16\cdots\cdots$①

$13+(c-3)^2=c^2+16$，得$c=1$代入① $\Rightarrow\ R^2=17$，故球面$S：(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=17$

22.a爲實數，二球面$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$及$x^2+y^2+z^2+2x+2y+6z-a=0$相交，則$a$的範圍爲__________。

【解答】$-7\le a\le 133$

【詳解】

$S_1：(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5^2$，球心$A(1，2，3)$，半徑$r_1=5$

$S_2：(x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=a+11$，球心$B(-1，-1，-3)$，半徑$r_2=\sqrt{a+11}$

球心距離$\overline{AB}=\sqrt{(1+1)^2+(2+1)^2+(3+3)^2}=7$

S_1與S_2相交（含內切、外切） $\Leftrightarrow\ |r_1-r_2|\le\overline{AB}\le r_1+r_2\ \Leftrightarrow\ |5-\sqrt{a+11}|\le 7\le 5+\sqrt{a+11}$

$\Leftrightarrow\ -7\le 5-\sqrt{a+11}\le 7$ 且 $2\le\sqrt{a+11}\ \Leftrightarrow\ 2\le\sqrt{a+11}\le 12$

$\Leftrightarrow\ 4\le a+11\le 144\ \Leftrightarrow\ -7\le a\le 133$

23.通過兩點$(1，2，3)$與$(0，0，k)$的直線與球面$x^2+y^2+z^2=1$相切，則k的值爲__________。

【解答】$\frac{-3\pm\sqrt{65}}{4}$

【詳解】

通過兩點(1，2，3)，(0，0，k)的直線L的參數式爲(x，y，z) = (t，$2t$，$(3-k)t+k$)

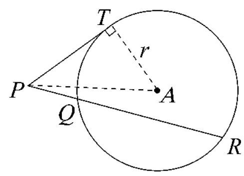
直線L與球面S：$x^2+y^2+z^2=1$ 相切，代入，則$t^2+(2t)^2+[(3-k)\,t+k]^2=1$

$\Rightarrow$ $[5+(3-k)^2]\,t^2+2k(3-k)\,t+(k^2-1)=0$ 有重根

判別式$D=0$ $\Rightarrow$ $4k^2(3-k)^2-4[5+(3-k)^2](k^2-1)=0$

$\Rightarrow$ $2k^2+3k-7=0$ $\Rightarrow$ $k=\dfrac{-3\pm\sqrt{65}}{4}$

24.球面S：$2x^2+2y^2+2z^2-4x-8y-4z-1=0$ 外一點$P(4，3，2)$，過P任作一直線交球面於Q，R 兩點，則$\overline{PQ}\times\overline{PR}$的值爲__________。



【解答】$\dfrac{9}{2}$

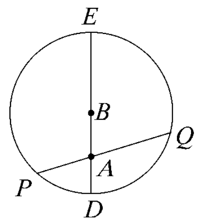
【詳解】

S：$2x^2+2y^2+2z^2-4x-8y-4z-1=0 \Rightarrow S$：$x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z-\dfrac{1}{2}=0$

$\therefore$ $P(4，3，2)$到S之切線段長$\overline{PT}=\sqrt{9+1+1-\dfrac{13}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

由切割線定理知$\overline{PQ}\times\overline{PR}=\overline{PT}^2=\dfrac{9}{2}$

25.過點$A(1，2，3)$，作直線L與球面S：$x^2+y^2+z^2+2x-4y-4z-7=0$ 交於點P與Q，則$\overline{PA}\cdot\overline{AQ}$之積 = __________。



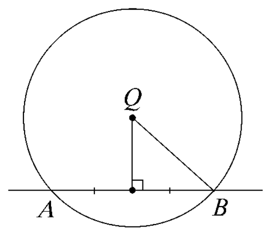
【解答】11

【詳解】

S：$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=16$，球心$B(-1，2，2)$，半徑$r=4$

點A在S的內部，$\overline{AB}=\sqrt{5}$，$\overline{PA}\cdot\overline{AQ}=\overline{AD}\cdot\overline{AE}=(r-\overline{AB})(r+\overline{AB})=r^2-\overline{AB}^2=16-5=11$

26.過兩點$A(1，3，5)$，$B(7，3，-1)$之球面有無限多個，則其中半徑最小的方程式爲__________。



【解答】$x^2+y^2+z^2-8x-6y-4z+11=0$

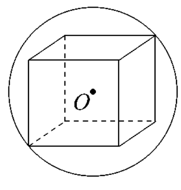
【詳解】

$\because$ 過點A，B的球面S，以$\overline{AB}$爲直徑的球面爲最小者

其方程式爲$(x-1)(x-7)+(y-3)(y-3)+(z-5)(z+1)=0$

即$x^2+y^2+z^2-8x-6y-4z+11=0$

27.球面$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-9)^2=36$ 的內接正方體的體積爲__________。



【解答】$192\sqrt{3}$

【詳解】

球的半徑 6，設球心O，若內接正方體的邊長a，

則正方體之對角線$\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3}a$ 即爲球之直徑 12。

$\sqrt{3}a=12\Rightarrow a=\dfrac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$，$\therefore$正方體的體積 $=a^3=(4\sqrt{3})^3=192\sqrt{3}$

28.球面S與S_0：$(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=2$ 同心，若S的體積爲S_0體積的 $2\sqrt{2}$ 倍，則S的方程式爲___。

【解答】$(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=4$

【詳解】

若S的體積爲S_0體積的 $2\sqrt{2}$ 倍⇒S的半徑爲S_0半徑的 $\sqrt[3]{(2\sqrt{2})}$ 倍

$\Rightarrow\quad r = \sqrt{2}\times\sqrt[3]{(2\sqrt{2})} = \sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{(2\sqrt{2})^2} = \sqrt[6]{2^3\times(2\sqrt{2})^2} = \sqrt[6]{2^3\times 2^2\times 2} = 2$

$\therefore\quad S：(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=4$

29.繪一球面S：$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$ 及一點$A(-1，0，0)$，以A爲球心而與S相切的球面有二個，一爲外切，一爲內切，則

(1)外切時的球面方程式爲__________。(2)內切時的球面方程式爲__________。

【解答】(1) $(x+1)^2+y^2+z^2=4$　(2) $(x+1)^2+y^2+z^2=16$

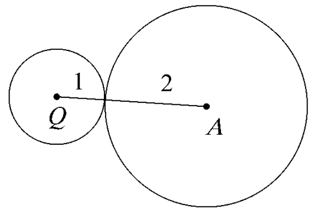
【詳解】

S：$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$，球心$Q(1，-1，2)$，半徑$r=1$，$A(-1，0，0)$

$\overline{AQ}=\sqrt{2^2+1+4}=3>r \quad\Rightarrow\quad A$在球面外

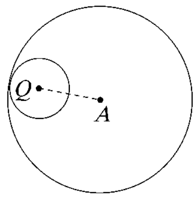
(1)兩球外切時，球之半徑爲$\overline{AQ}-r=3-1=2$，

所求球面方程式爲$(x+1)^2+y^2+z^2=4$



(2)兩球內切時，球之半徑爲$\overline{AQ}+r=3+1=4$，

所求球面方程式爲$(x+1)^2+y^2+z^2=16$



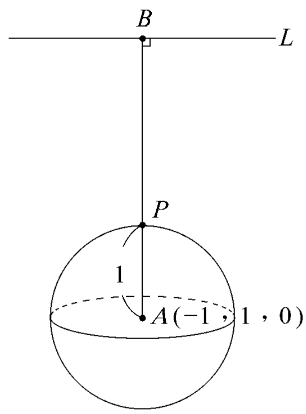
30.設點$P(a，b，c)$爲球面S：$(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=1$ 上距離直線L：

$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ 最近的一點，求

(1) $(a，b，c)=$__________。　(2)此點P與L的距離爲__________。

【解答】(1) $(\dfrac{-1}{3}，\dfrac{2}{3}，\dfrac{-2}{3})$　(2) 2

【詳解】

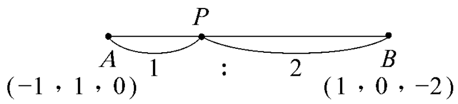


設球心 $A(-1，1，0)$到直線 L 之垂足爲 B，則 $B(3+2t，2+2t，-1+t)$

而 $\overrightarrow{AB}=(4+2t，1+2t，-1+t)\perp L$ 之方向向量 $\vec{d}=(2，2，1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{d}=0 \quad\Rightarrow\quad 9t+9=0 \quad\Rightarrow\quad t=-1$，則 $B(1，0，-2)$

故 P 與直線 L 的距離 $=\overline{BP}=\overline{AB}-\overline{AP}=3-1=2$



由分點公式 $P(a，b，c)=(\dfrac{(-1)\times 2+1\times 1}{1+2}，\dfrac{1\times 2+0\times 1}{1+2}，\dfrac{0\times 2+(-2)\times 1}{1+2})=(\dfrac{-1}{3}，\dfrac{2}{3}，\dfrac{-2}{3})$

31.點$P(x，y，z)$爲球面S：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$ 上任一點，

(1)求 $6x-2y-3z$之最大值爲______。(2)求 $\sqrt{(x-4)^2+(y+4)^2+(z-5)^2}$ 之最小值爲________。

【解答】(1) 21　(2) 3

【詳解】

(1)由柯西不等式

$[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2][6^2+(-2)^2+(-3)^2]\geq[6(x-1)-2(y-2)-3(z-3)]^2$

$\Rightarrow \quad 16 \times 49 \geq (6x - 2y - 3z + 7)^2 \quad \Rightarrow \quad -28 \leq 6x - 2y - 3z + 7 \leq 28$

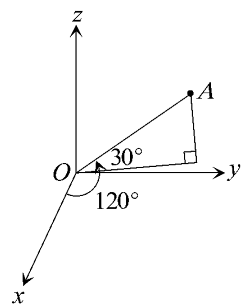
$\Rightarrow \quad -35 \leq 6x - 2y - 3z \leq 21$，故最大値爲 21

(2)設$P(x，y，z) \in S$，$Q(4，-4，5)$，則所求 $= |\overline{AQ} - R| = 7 - 4 = 3$

（其中$A(1，2，3)$及$R = 4$ 分別爲S之球心及半徑）

32.假設地球爲一圓球，半徑 6400 公里，以地心爲原點，南北兩極在z軸上，向北爲正，赤道爲於xy平面上，過零度經線爲xz平面，零度經線以東之y坐標爲正，若$A =$ (東經 120°，北緯 30°)，則A之空間坐標爲__________。

【解答】$(-1600\sqrt{3}，4800，3200)$



【詳解】

設 A 之坐標爲$(x，y，z)$，則

$x = (6400\cos 30°)\cos 120° = -1600\sqrt{3}$

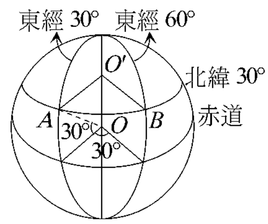
$y = (6400\cos 30°)\sin 120° = 4800$，

$z = 6400\sin 30° = 3200$，

故 $A(-1600\sqrt{3}，4800，3200)$

33.假設一地球儀的半徑爲R，在北緯 30°的緯圈上，由東經 30°的位置沿逆時針方向東移到東經 60°的位置，其所經的弧長爲__________。

【解答】$\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi R$



【詳解】

設球心 O，北緯 30°的小圓圓心 O'，半徑 r

在北緯 30°的緯圈上，東經 30°的位置爲 A，東經 60°的位置爲 B

$\therefore \quad \angle AO'B = 30°$，$r = R\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$

$\therefore \quad \overset{\frown}{AB} = r \cdot \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \times \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi R$