高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：97.12.31					
範圍	3-2 圓與直線	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選)下列有關圓的敘述，哪些是正確的？

(A)過四個點$(1，-1)，(-1，1)，(0，\sqrt{2})，(-\sqrt{2}，0)$恰可決定一圓

(B)兩圓$x^2+y^2=4$，$(x-3)^2+y^2=2$ 的公切線只有 2 條

(C)設圓$C：x^2+y^2-4x+2y+1=0$，過點$(2，2)$可對圓C作兩條切線

(D)設$A(1，4)$，$B(-5，2)$，以$\overline{AB}$為弦且弦心距為 6 的圓只有一個

(E)直線 $3x+4y+15=0$ 與圓$x^2+y^2-6x+4y+4=0$ 不相交

【解答】(A)(B)(C)(E)

【詳解】

(A)○，四個點$(1，-1)，(-1，1)，(0，\sqrt{2})，(-\sqrt{2}，0)$到原點的距離都是$\sqrt{2}$，故四點在以$(0,0)$為圓心半徑為$\sqrt{2}$的圓上。

(B)○，兩圓的連心線長為 3，兩圓半徑和為 $2+\sqrt{2}>3$，故兩圓相交，只有兩條外公切線

(C)○，代入$(2-2)^2+(2+1)^2>4$，點$(2，2)$在圓外，故過$(2，2)$可對圓C作兩條切線

(D)╳，此種圓有 2 個。

以$\overline{AB}$為弦，圓心在$\overline{AB}$中垂線(過中點的垂直線)上，圓心可設為$(-2+t,3-3t)$

弦心距為 6$\Rightarrow \sqrt{(-2+t+2)^2+(3-3t-3)^2}=6$ ，$10t^2=36,\quad t=\pm\dfrac{6}{\sqrt{10}}$

圓心兩個，即此種圓有兩個

(E)○，圓$(x-3)^2+(y+2)^2=9$，圓心$C(3，-2)$，半徑$r=3$，$d(C，L)=\dfrac{|9-8+15|}{5}=\dfrac{16}{5}>3$

2. (複選)若點$P(a，2a)$在圓$C：x^2+y^2-2x=0$ 的內部，則a值在下列哪些範圍內？

(A) $0<a<0.5$　(B) $0.2<a<0.6$　(C) $0<a<0.4$　(D) $0.4<a<1$　(E)以上皆真

【解答】(A)(C)

【詳解】

點$P(a，2a)$在圓$x^2+y^2-2x=0$ 的內部　$\Rightarrow$　$a^2+4a^2-2a<0$　$\Rightarrow$　$a(5a-2)<0$

$\Rightarrow$　$0<a<\dfrac{2}{5}$　$\Rightarrow$即 $0<a<0.4$，故 $0<a<0.5$ 也成立

3. 有一圓$C：x^2+y^2-4x+4y-2=0$ 及一點$P(4，2)$，則

(A) P點在圓上　(B)過P之切線有一為$x+3y+2=0$　(C)過P之切線有一為 $3x-y-14=0$

(D)兩切線之銳夾角為 45°　(E)兩切線互相垂直

【解答】(E)

【詳解】

$C：(x-2)^2+(y+2)^2=10$，圓心$C(2，-2)$，半徑$r=\sqrt{10}$ ，

$\overline{CP}=\sqrt{(4-2)^2+(2+2)^2}=\sqrt{20}>r$，故$P$點在圓外

設過$P(4，2)$與圓C相切之直線$L：y-2=m(x-4)$

$d(A，L)=\dfrac{|2m-4m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$　$\Rightarrow$　$m=-3$ 或$\dfrac{1}{3}$ ，

過P之切線爲 $y-2=-3(m-4)$, $y-2=\frac{1}{3}(m-4)$ ，即 $3x+y-14=0$ 及$x-3y+2=0$，

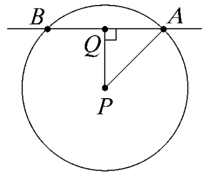
$\because$ $(-3)\times\frac{1}{3}=-1\Rightarrow$兩切線互相垂直

二、填充題(每題 10 分)

1. 直線$x-y=3$ 被圓$x^2+y^2-x+y-2=0$ 所截得的弦長 $=$__________。

【解答】$\sqrt{2}$

【詳解】

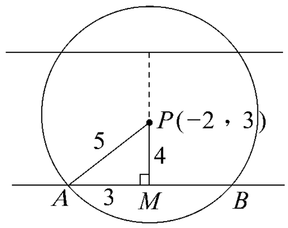


圓C：$(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{2}$ ，圓心$P(\frac{1}{2}$ ，$-\frac{1}{2})$，半徑$r=\sqrt{\frac{5}{2}}$

弦長 $=\overline{AB}=2\,\overline{AQ}=2\sqrt{\overline{PA}^2-\overline{PQ}^2}=2\sqrt{\frac{5}{2}-2}=\sqrt{2}$

（其中$\overline{PQ}=d(P，L)=\dfrac{|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ）

2. 直線 $3x-4y=k$與圓$x^2+y^2+4x-6y-12=0$ 交於A，B兩點，若$\overline{AB}=6$，則k之值爲_______。



【解答】$k=2$ 或-38

【詳解】

圓$x^2+y^2+4x-6y-12=0$ $\Rightarrow$ $(x+2)^2+(y-3)^2=5^2$，圓心$P(-2，3)$，半徑$r=5$

過P作直線 $3x-4y=k$的垂直線垂足M，則M爲 $\overline{AB}$ 中點$\Rightarrow\overline{AM}=3$，又$\overline{PA}=r=5$

$\therefore$ $\overline{PM}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，即$d(P，\overline{AB})=\dfrac{|-6-12-k|}{\sqrt{9+16}}=4$ $\Rightarrow$ $k+18=\pm 20$ $\therefore$ $k=2$ 或-38

3. 有一圓的圓心$(-3，4)$，與直線 $3x-4y+5=0$ 相切，其圓方程式爲____________________。

【解答】$(x+3)^2+(y-4)^2=16$

【詳解】

圓C的圓心$A(-3，4)$與直線L：$3x-4y+5=0$ 相切

故半徑$r=d\,(A，L)=\dfrac{|3\times(-3)-4\times 4+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4$，得圓方程式爲$(x+3)^2+(y-4)^2=4^2$

4. 過點$(1，3)$且與圓$(x+1)^2+(y-2)^2=5$ 相切的直線方程式爲_______________。

【解答】$2x+y-5=0$

【詳解】

點 $P(1，3)\in$圓 C，故所求切線 L：$(1+1)(x+1)+(3-2)(y-2)=5$，得 L：$2x+y-5=0$

5. 求過$P(1，1)$且與圓$x^2+(y-3)^2=1$ 相切的直線方程式：_________________。（兩解）

【解答】$x=1$ 或 $y-1=-\frac{3}{4}(x-1)$

【詳解】

$P(1，1)$代入圓方程式得 $1^2+(1-3)^2=5>1$ $\therefore$ P在圓外

設切線爲$y-1=m(x-1)$，即$mx-y-m+1=0$

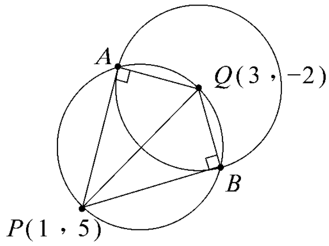
$\dfrac{|m\cdot 0-3-m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$ $\Rightarrow$ $m=-\dfrac{3}{4}$ $\Rightarrow$ 切線$y-1=-\dfrac{3}{4}(x-1)$，另一切線無斜率，即$x=1$

6. 自點$P(1，5)$向圓$x^2+y^2-6x+4y+4=0$作二切線，切點分別爲$A，B$，則

(1)切線段$\overline{PA}$長爲__________。

(2)△PAB之外接圓方程式爲________________。

(3)直線AB的方程式爲_________________。



【解答】(1) $2\sqrt{11}$　(2) $x^2+y^2-4x-3y-7=0$　(3) $2x-7y-1=0$

【詳解】

(1) $\overline{PA}=\sqrt{1+25-6+20+4}=2\sqrt{11}$

(2) $\overline{AQ}\perp\overline{AP}$，$\overline{BQ}\perp\overline{BP}$，故△$PAB$之外接圓，即爲以$P(1，5)$及$Q(3，-2)$爲直徑之圓

$\Rightarrow\quad (x-1)(x-3)+(y-5)(y+2)=0\quad\Rightarrow\quad x^2+y^2-4x-3y-7=0$

(3) 切點弦所在直線AB的方程式爲$x+5y-6(\dfrac{1+x}{2})+4(\dfrac{5+y}{2})+4=0\quad\Rightarrow\quad 2x-7y-1=0$

7. 若一圓$x^2+y^2-8x-5y+k=0$，與x軸相切，則k之值爲_________。

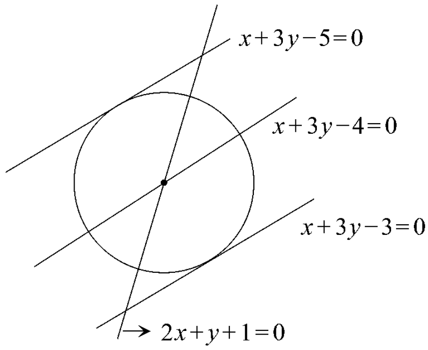
【解答】　16

【詳解】

$\begin{cases} C：x^2+y^2-8x-5y+k=0\cdots\cdots① \\ x\text{ 軸}：y=0\cdots\cdots② \end{cases}$

②代入①　$\Rightarrow\quad x^2-8x+k=0$

$\because$　相切　$\therefore$　$D：(-8)^2-4k=0$ 得$k=16$



8. 圓C與二直線$x+3y-5=0$及$x+3y-3=0$均相切且圓心在直線$2x+y+1=0$上，則圓C的方程式爲_________。

【解答】$(x+\dfrac{7}{5})^2+(y-\dfrac{9}{5})^2=\dfrac{1}{10}$

【詳解】

圓C與二平行線$x+3y-5=0$及$x+3y-3=0$均相切，且二平行線的距離 $=\dfrac{2}{\sqrt{10}}$，

故圓心在二平行線之正中間$x+3y-4=0$直線上，且半徑 $=\dfrac{1}{2}(\dfrac{2}{\sqrt{10}})=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

圓心爲二直線$x+3y-4=0$與$2x+y+1=0$的交點，解得$(x，y)=(-\dfrac{7}{5}，\dfrac{9}{5})$

故所求圓的方程式爲$(x+\dfrac{7}{5})^2+(y-\dfrac{9}{5})^2=\dfrac{1}{10}$

9. 若直線$y=2x+k$與圓$C：x^2+y^2+4x+2y-20=0$交於兩點，則k值之範圍爲___________。

【解答】$3-5\sqrt{5}<k<3+5\sqrt{5}$

【詳解】

$\begin{cases} C：x^2+y^2+4x+2y-20=0\cdots\cdots① \\ L：y=2x+k\cdots\cdots② \end{cases}$

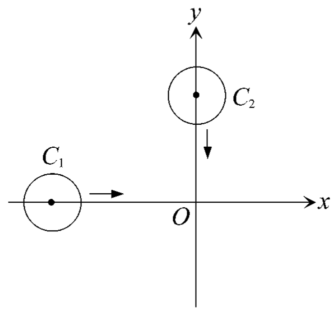
②代入①　$\Rightarrow\quad 5x^2+4(k+2)x+(k^2+2k-20)=0$

$D：16(k+2)^2-4\times5\times(k^2+2k-20)>0$（$\because$　交於兩點）

$\Rightarrow\quad k^2-6k-116<0\quad\Rightarrow\quad 3-5\sqrt{5}<k<3+5\sqrt{5}$

10.兩個半徑 1 的圓C_1，C_2；C_1之中心$(-10，0)$沿x軸正向移動，C_2之中心$(0，8)$沿y軸負向移動，兩圓移動的速度均爲每秒一單位。今若二圓同時開始運動，最初兩圓相切在第__________秒後，第二次相切在第______________秒後，又二圓相交，其共同部分面積最大時爲移動後第__________秒，其最大面積 ＝__________。

【解答】8，10，9，$\dfrac{\pi}{2}-1$



【詳解】

開始運動t秒後，C_1之圓心位置爲$O_1(-10+t，0)$，

C_2之圓心位置爲$O_2(0，8-t)$

此時$\overline{O_1O_2}=\sqrt{(-10+t)^2+(8-t)^2}=\sqrt{2t^2-36t+164}$

兩圓C_1，C_2相切時(外切)，$\sqrt{2t^2-36t+164}=1+1$

$\Rightarrow\ 2t^2-36t+160=0\ \Rightarrow\ t^2-18t+80=0\ \therefore\ t=8，10$

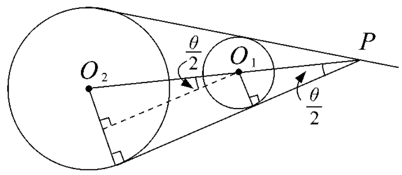
(1)第一次相切在第 8 秒後，第二次相切在第 10 秒後

(2)兩圓共同部分面積最大時，即圓心距離最小時，即

當 $2t^2-36t+164=2(t-9)^2+2$ 最小時，$t=9$，而$\overline{O_1O_2}=\sqrt{2}$， 故面積 $=2\times\dfrac{\pi}{4}-1^2=\dfrac{\pi}{2}-1$

11. 二圓$x^2+y^2+2x=0$ 及$x^2+y^2-6x-8y+21=0$ 二外公切線夾角θ，則$\sin\theta$ 的值爲__________。

【解答】$\dfrac{\sqrt{31}}{16}$



【詳解】

$x^2+y^2+2x=0\ \Rightarrow\ (x+1)^2+y^2=1$，圓心$O_1(-1，0)$，半徑$r_1=1$

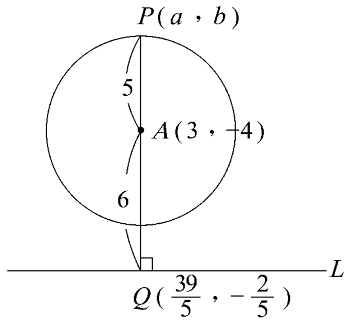
$x^2+y^2-6x-8y+21=0\ \Rightarrow\ (x-3)^2+(y-4)^2=4$，圓心$O_2(3，4)$，半徑$r_2=2$

圓心距離$\overline{O_1O_2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，外公切線長 $=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1-r_2)^2}=\sqrt{31}$

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2-1}{4\sqrt{2}}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{31}}{4\sqrt{2}}$，故$\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\cdot\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{31}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{31}}{16}$

12. 圓$x^2+y^2-6x+8y=0$ 上任一點P到直線 $4x+3y=30$ 的距離最大值 ＝___________，此時P點的坐標爲___________。

【解答】11，$(-1，-7)$



【詳解】

(1)$x^2+y^2-6x+8y=0\Rightarrow(x-3)^2+(y+4)^2=5^2$，圓心$A(3，-4)$，半徑 5

P點到直線L：$4x+3y=30$ 的最大距離

$=d(A，L)+r=\dfrac{|12-12-30|}{\sqrt{4^2+3^2}}+5=\dfrac{30}{5}+5=11$

(2)過$A(3，-4)$，與L：$4x+3y=30$ 垂直的直線L'：$\begin{cases}x=3+4t\\ y=-4+3t\end{cases}$

代入L得交點$Q(\dfrac{39}{5}，-\dfrac{2}{5})$，代入圓得交點$P\ \ (-1，-7)$

13.已知直線L：$4x+3y+4=0$ 與圓C：$x^2+y^2-6x-6y-7=0$ 相切，則切點坐標為__________。

【解答】$(-1，0)$

【詳解】

圓C：$x^2+y^2-6x-6y-7=0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2+(y-3)^2=25$，圓心$A(3，3)$，半徑$r=5$

過A且垂直L：$4x+3y+4=0$ 的直線方程式為 $3x-4y+3=0$

$\therefore$ 切點：$\begin{cases} 4x+3y+4=0 \\ 3x-4y+3=0 \end{cases}$得$(x，y)=(-1，0)$

14.若圓$x^2+y^2-6x+ky+\ell=0$ 切直線 $3x-4y=8$ 於點$(4，1)$，則 $2k+\ell$的值為__________。

【解答】$\dfrac{7}{3}$

【詳解】圓$x^2+y^2-6x+ky+\ell=0$ 切直線 $3x-4y=8$ 於點$(4，1)$

故圓在點$(4，1)$的切線方程式 $4x+y-6\cdot\dfrac{4+x}{2}+k\dfrac{1+y}{2}+\ell=0$

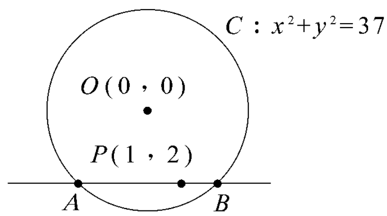
$\Rightarrow \quad 2x+(2+k)y+k+2\ell-24=0$，此即為 $3x-4y-8=0$

$\therefore \quad \dfrac{2}{3}=\dfrac{2+k}{-4}=\dfrac{k+2\ell-24}{-8}$，解得$k=\dfrac{-14}{3}$，$\ell=\dfrac{35}{3}$，所求 $2k+\ell=\dfrac{-28}{3}+\dfrac{35}{3}=\dfrac{7}{3}$

15.已知點$P(1，2)$將圓C：$x^2+y^2=37$ 的某弦三等分點，則該弦所在的直線方程式為__________。

【解答】$x=1$ 或 $3x-4y+5=0$

【詳解】



Sol一

設$A(a，b)$，$B(c，d)$且$\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$

$\therefore \quad 1=\dfrac{a+2c}{3}$，$2=\dfrac{b+2d}{3} \quad \Rightarrow \quad c=\dfrac{1}{2}(3-a)$，$d=\dfrac{1}{2}(6-b)$

$\because \quad A，B\in C$：$x^2+y^2=37 \quad \therefore \quad a^2+b^2=37$，$c^2+d^2=37$

$\Rightarrow \quad a^2+b^2=37$，$\dfrac{1}{4}(a-3)^2+\dfrac{1}{4}(b-6)^2=37$

$$\begin{cases} a^2+b^2=37 \\ \dfrac{1}{4}(3-a)^2+\dfrac{1}{4}(6-b)^2=37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=37 \\ a^2+b^2-6a-12b=103 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1,-\dfrac{27}{5} \\ b=-6,-\dfrac{14}{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad A(a，b)=A(1，-6)$或$A(-\dfrac{27}{5}，-\dfrac{14}{5})$，弦所在直線$\overleftrightarrow{AP}$其方程式為$x=1$ 或 $3x-4y+5=0$

Sol二

設所求直線 $y-2=m(x-1)\Rightarrow mx-y-m+2=0$，$\overline{AB}$ 中點M

$\overline{OM}=d(O,\overleftrightarrow{AB})=\dfrac{|0-0-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$

$\overline{AM}:\overline{PM}=(\dfrac{1}{2}\overline{AB}):(\dfrac{1}{6}\overline{AB})=3:1\Rightarrow\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OM}^2}=3\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OM}^2}$

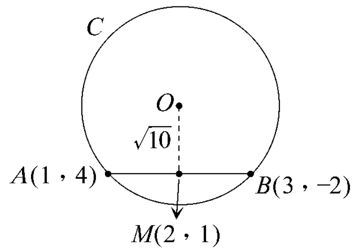
即$\overline{OA}^2-\overline{OM}^2=9(\overline{OP}^2-\overline{OM}^2)$，$37-\dfrac{(-m+2)^2}{m^2+1}=9[5-\dfrac{(-m+2)^2}{m^2+1}]\Rightarrow m^2+1=(-m+2)^2$，$m=\dfrac{3}{4}$

所求有二條：$3x-4y+5=0$，另一條直線無斜率$x=1$

16.設$A(1，4)$與$B(3，-2)$爲坐標平面上兩點，若 $\overline{AB}$ 爲圓C的一弦，且距離圓心爲$\sqrt{10}$ ，求圓C的方程式：__________。（兩解）

【解答】$(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-5)^2+(y-2)^2=20$

【詳解】



$\overline{AB}$ 中點$M(2，1)$ ，$\overrightarrow{AB}=(2,-6)=2(1,-3)$， 設圓心$O(2+3t，1+t)$

$\overline{OM}=\sqrt{10}\Rightarrow(2+3t-2)^2+(1+t-1)^2=10$，$t=\pm1$，代入$O(2+3t，1+t)$

圓心爲$(-1，0)$或$(5，2)$，半徑$\overline{OA}=\sqrt{(-1-1)^2+0-4)^2}=\sqrt{20}$

∴ 圓C：$(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-5)^2+(y-2)^2=20$

17.圓C通過$P(2，0)$，$Q(0，1)$，已知圓C在點P的切線斜率爲 -1，求圓心：__________。

【解答】$(-\frac{1}{2}，-\frac{5}{2})$

【詳解】

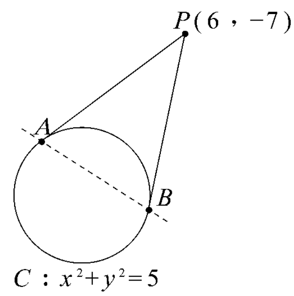
設圓C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，圓C在點P的切線爲$(2-h)(x-h)+(0-k)(y-k)=r^2$

圓C過$P(2，0)$，$Q(0，1)$，且圓C在點P的切線斜率爲 $-1\Rightarrow$圓心與點P的直線斜率爲 1

$$\Rightarrow\begin{cases}(2-h)^2+(0-k)^2=r^2\cdots\cdots①\\(0-h)^2+(1-k)^2=r^2\cdots\cdots②\\\dfrac{0-k}{2-h}=1\ \cdots\cdots③\end{cases}$$

，由③得$k=h-2\cdots\cdots$④，① − ②得 $4h-2k=3\cdots\cdots$⑤

④代入⑤得$h=-\frac{1}{2}$，$k=-\frac{5}{2}$



18.若自點$P(6，-7)$作圓$x^2+y^2=5$ 的切線，則切點坐標爲____。（兩解）

【解答】$(2，1)$，$(\frac{-22}{17}，\frac{-31}{17})$

【詳解】$\begin{cases}\text{切點弦}\overleftrightarrow{AB}：6x-7y=5\\C：x^2+y^2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{-22}{17}\\y=\dfrac{-31}{17}\end{cases}$

19.設$k\in R$，已知點$P(-1，7)$在圓C：$x^2+y^2+kx+(k-2)y-12=0$ 上，則圓C過P點的切線方程式爲__________。

【解答】$3x-4y+31=0$

【詳解】

點$P(-1，7)$在圓C：$x^2+y^2+kx+(k-2)y-12=0$ 上

$\Rightarrow\ 1^2+7^2-k+7k-14-12=0\ \Rightarrow\ k=-4$

∴ 圓C：$x^2+y^2-4x-6y-12=0$

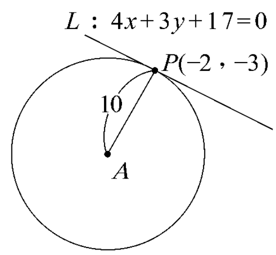
代入切線方程式公式：$-x+7y-\frac{4}{2}(x-1)-\frac{6}{2}(y+7)-12=0$

$\Rightarrow\ -x+7y-2x+2-3y-21-12=0\ \Rightarrow\ 3x-4y+31=0$

20.設圓C與直線L：$4x+3y+17=0$ 相切於$P(-2，-3)$，且圓C的半徑是 10，圓心在第一象限，則圓C的方程式為＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(x-6)^2+(y-3)^2=100$

【詳解】設圓心為A，$\overleftrightarrow{AP}$ ：$\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-3+3t \end{cases}$，$t\in R$，取$A(-2+4t，-3+3t)$



$\overline{AP}^2=16t^2+9t^2$，$10^2=25t^2$，$t=\pm 2$，取$t=2$（∵ 圓心$A$在第一象限）

$\Rightarrow A(6，3)$

∴ C：$(x-6)^2+(y-3)^2=10^2$

21.求與直線$x+2y-3=0$ 垂直且與圓$x^2+y^2-2x+2y+1=0$ 相切的直線方程式＿＿＿＿＿＿。

【解答】$2x-y-3+\sqrt{5}=0$ 或 $2x-y-3-\sqrt{5}=0$

【詳解】

SOL一

設切線方程式為 $2x-y+k=0$

圓：$x^2+y^2-2x+2y+1=0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2+(y+1)^2=1$，圓心$(1，-1)$，半徑 $=1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{|2-(-1)+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=1 \quad \Rightarrow \quad |3+k|=\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad k=-3\pm\sqrt{5}$

∴ 切線方程式為 $2x-y-3+\sqrt{5}=0$ 或 $2x-y-3-\sqrt{5}=0$

SOL二：切線公式

已知斜率 2 之切線公式：$y+1=2(x-1)\pm 1\cdot\sqrt{2^2+1}\Rightarrow y=2x-3\pm\sqrt{5}$