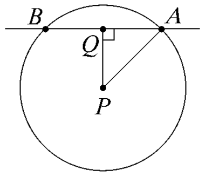
<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：98.01.07</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">3-2、3 圓與直線、球面</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

※、填充題(每題 10 分)

1. 直線$x-y=3$被圓$x^2+y^2-x+y-2=0$所截得的弦長 $=$ ＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\sqrt{2}$

【詳解】

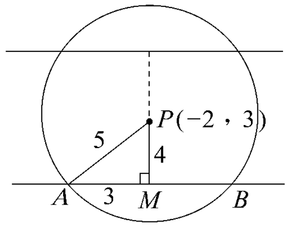


圓C：$(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{2}$，圓心$P(\frac{1}{2}，-\frac{1}{2})$，半徑$r=\sqrt{\frac{5}{2}}$

又 $\overline{PQ}=d(P，L)=\dfrac{|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

弦長 $\overline{AB}=2\,\overline{AQ}=2\sqrt{\overline{PA}^2-\overline{PQ}^2}=2\sqrt{\frac{5}{2}-2}=\sqrt{2}$

2. 直線 $3x-4y=k$與圓$x^2+y^2+4x-6y-12=0$交於A，B兩點，若$\overline{AB}=6$，則k之值爲＿＿＿＿＿。



【解答】$k=2$ 或 -38

【詳解】

圓$x^2+y^2+4x-6y-12=0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2+(y-3)^2=5^2$，圓心$P(-2，3)$，半徑$r=5$

過P作直線 $3x-4y=k$的垂直線垂足M，則M爲$\overline{AB}$中點$\Rightarrow \overline{AM}=3$，又$\overline{PA}=r=5$

$\therefore \quad \overline{PM}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，即$d(P，\overline{AB})=\dfrac{|-6-12-k|}{\sqrt{9+16}}=4 \quad \Rightarrow \quad k+18=\pm 20 \quad \therefore \quad k=2$ 或 -38

3. 有一圓的圓心$(-3，4)$，與直線 $3x-4y+5=0$ 相切，其圓方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(x+3)^2+(y-4)^2=16$

【詳解】

圓C的圓心$A(-3，4)$與直線L：$3x-4y+5=0$ 相切

故半徑$r=d\,(A，L)=\dfrac{|3\times(-3)-4\times 4+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4$，得圓方程式爲$(x+3)^2+(y-4)^2=4^2$

4. 過點$(1，3)$且與圓$(x+1)^2+(y-2)^2=5$ 相切的直線方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$2x+y-5=0$

【詳解】

點 $P(1，3)\in$圓 C，故所求切線 L：$(1+1)(x+1)+(3-2)(y-2)=5$，得 L：$2x+y-5=0$

5. 求過$P(1，1)$且與圓$x^2+(y-3)^2=1$ 相切的直線方程式：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。（兩解）

【解答】$x=1$ 或 $y-1=-\frac{3}{4}(x-1)$

【詳解】

$P(1，1)$代入圓方程式得 $1^2+(1-3)^2=5>1 \quad \therefore \quad P$在圓外

設切線爲$y-1=m(x-1)$，即$mx-y-m+1=0$

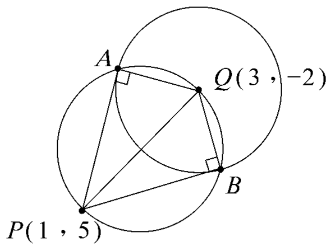
$\dfrac{|m\cdot 0-3-m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \quad \Rightarrow \quad m=-\dfrac{3}{4} \quad \Rightarrow$ 　切線$y-1=-\dfrac{3}{4}(x-1)$，另一切線無斜率，即$x=1$

6. 自點$P(1，5)$向圓$x^2+y^2-6x+4y+4=0$作二切線，切點分別爲A，B，則

(1)切線段$\overline{PA}$長爲___________。

(2)△PAB之外接圓方程式爲___________________。

(3)直線AB的方程式爲____________________。



【解答】(1) $2\sqrt{11}$ (2) $x^2+y^2-4x-3y-7=0$ (3) $2x-7y-11=0$

【詳解】

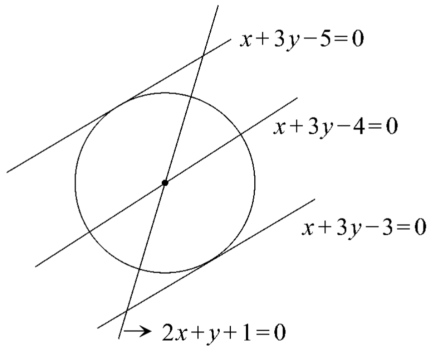
(1) $\overline{PA}=\sqrt{1+25-6+20+4}=2\sqrt{11}$

(2) $\overline{AQ}\perp\overline{AP}$ ，$\overline{BQ}\perp\overline{BP}$ ，故△PAB之外接圓，即爲以$P(1，5)$及$Q(3，-2)$爲直徑之圓

$\Rightarrow\ (x-1)(x-3)+(y-5)(y+2)=0\ \Rightarrow\ x^2+y^2-4x-3y-7=0$

(3) 切點弦所在直線AB的方程式爲$x+5y-6(\frac{1+x}{2})+4(\frac{5+y}{2})+4=0\ \Rightarrow\ 2x-7y-11=0$

7. 圓C與二直線$x+3y-5=0$及$x+3y-3=0$均相切且圓心在直線$2x+y+1=0$上，則圓C的方程式爲__________。



【解答】$(x+\frac{7}{5})^2+(y-\frac{9}{5})^2=\frac{1}{10}$

【詳解】

圓C與二平行線$x+3y-5=0$及$x+3y-3=0$均相切，

故圓心在二平行線之正中間$x+3y-4=0$直線上，

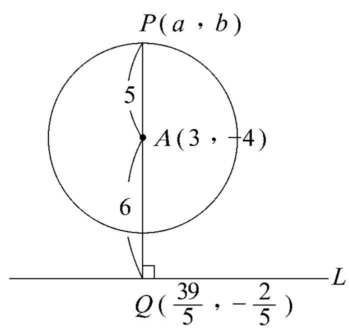
又二平行線的距離 $=\frac{|-5-(-3)|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{10}}$ ，

故半徑 $=\frac{1}{2}(\frac{2}{\sqrt{10}})=\frac{1}{\sqrt{10}}$

圓心爲二直線$x+3y-4=0$與$2x+y+1=0$的交點，解得$(x，y)=(-\frac{7}{5}，\frac{9}{5})$

故所求圓的方程式爲$(x+\frac{7}{5})^2+(y-\frac{9}{5})^2=\frac{1}{10}$

8. 圓$x^2+y^2-6x+8y=0$上任一點P到直線$4x+3y=30$的距離最大值 $=$___________，此時P點的坐標爲___________。



【解答】11，$(-1，-7)$

【詳解】

(1)$x^2+y^2-6x+8y=0\Rightarrow(x-3)^2+(y+4)^2=5^2$，圓心$A(3，-4)$，半徑 5

P點到直線L：$4x+3y=30$的最大距離

$=d(A，L)+r=\frac{|12-12-30|}{\sqrt{4^2+3^2}}+5=\frac{30}{5}+5=11$

(2)過$A(3，-4)$，與L：$4x+3y=30$垂直的直線L'：$\begin{cases}x=3+4t\\y=-4+3t\end{cases}$

代入L得交點$Q(\frac{39}{5}，-\frac{2}{5})$，代入圓得交點$P\ (-1，-7)$

9. 已知直線L：$4x+3y+4=0$與圓C：$x^2+y^2-6x-6y-7=0$相切，則切點坐標爲__________。

【解答】$(-1，0)$

【詳解】

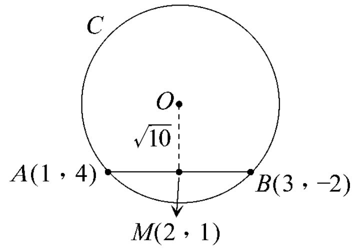
圓C：$x^2+y^2-6x-6y-7=0$　，切線 $4x+3y+4=0$

∴　切點：$\begin{cases} 4x+3y+4=0 \Rightarrow y=\dfrac{-4x-4}{3} \\ x^2+y^2-6x-6y-7=0 \end{cases}$，得$(x，y)=(-1，0)$

10.設$A(1，4)$與$B(3，-2)$為坐標平面上兩點，若$\overline{AB}$為圓C的一弦，且距離圓心為$\sqrt{10}$，求圓C的方程式：__________。（兩解）

【解答】$(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-5)^2+(y-2)^2=20$

【詳解】



$\overline{AB}$中點$M(2，1)$，$\overrightarrow{AB}=(2,-6)=2(1,-3)$，設圓心$O(2+3t，1+t)$

$\overline{OM}=\sqrt{10} \Rightarrow (2+3t-2)^2+(1+t-1)^2=10$，$t=\pm1$，代入$O(2+3t，1+t)$

圓心為$(-1，0)$或$(5，2)$，半徑$\overline{OA}=\sqrt{(-1-1)^2+0-4)^2}=\sqrt{20}$

∴　圓C：$(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-5)^2+(y-2)^2=20$

11.圓C通過$P(2，0)$，$Q(0，1)$，已知圓C在點P的切線斜率為 -1，求圓心：__________。

【解答】$(-\dfrac{1}{2}，-\dfrac{5}{2})$

【詳解】

Sol一

設圓C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，圓C在點P的切線為$(2-h)(x-h)+(0-k)(y-k)=r^2$

圓C過$P(2，0)$，$Q(0，1)$，且圓C在點P的切線斜率為 $-1 \Rightarrow$ 圓心與點P的直線斜率為 1

$\Rightarrow \begin{cases} (2-h)^2+(0-k)^2=r^2 \cdots\cdots ① \\ (0-h)^2+(1-k)^2=r^2 \cdots\cdots ② \\ \dfrac{0-k}{2-h}=1 \cdots\cdots ③ \end{cases}$，由③得$k=h-2 \cdots\cdots ④$，① − ②得 $4h-2k=3 \cdots\cdots ⑤$

④代入⑤得$h=-\dfrac{1}{2}$，$k=-\dfrac{5}{2}$

Sol二

由$\overrightarrow{PQ}=(-2,1)$，$\overline{PQ}$中點$(1,\dfrac{1}{2}) \Rightarrow$ 設圓C圓心$C(1+t,\dfrac{1}{2}+2t)$

因為圓C在點P的切線斜率為 $-1 \Rightarrow$ 圓心與點P的直線斜率為 1

$\dfrac{(\frac{1}{2}+2t)-0}{(1+t)-2}=1 \Rightarrow t=-\dfrac{3}{2}$，圓心$C(-\dfrac{1}{2}，-\dfrac{5}{2})$

12.求與直線$x+2y-3=0$ 垂直且與圓$x^2+y^2-2x+2y+1=0$ 相切的直線方程式__________。

【解答】$2x-y-3+\sqrt{5}=0$ 或 $2x-y-3-\sqrt{5}=0$

【詳解】

直線 $x+2y-3=0 \Rightarrow$ 斜率 $m=-\dfrac{1}{2}$，與直線 $x+2y-3=0$ 垂直直線之斜率 $m=2$

由切線公式，已知斜率 2 之切線公式：$y+1=2(x-1)\pm1\cdot\sqrt{2^2+1} \Rightarrow y=2x-3\pm\sqrt{5}$

13. 球面 $3x^2+3y^2+3z^2-6x+9y-2=0$ 的球心坐標為__________，半徑為__________。

【解答】$(1，-\frac{2}{3}，0)$，$\frac{\sqrt{141}}{6}$

【詳解】

$3x^2+3y^2+3z^2-6x+9y-2=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2x+3y-\frac{2}{3}=0$，

配方得$(x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2+z^2=\frac{47}{12} \Rightarrow$球心$(1，-\frac{2}{3}，0)$，半徑$\sqrt{\frac{47}{12}}=\frac{\sqrt{141}}{6}$

14. S：$x^2+y^2+z^2+2(m+1)x+2my+2mz+4m^2+4m-2=0$，

(1)若S表一球，則m之範圍____________________。

(2)承上題，若此球之半徑為 2，則球心為_______________。

【解答】(1) $-3<m<1$　(2) $(0，1，1)$

【詳解】

(1) $d^2+e^2+f^2-4g=4(m+1)^2+4m^2+4m^2-4(4m^2+4m-2)=4(-m^2-2m+3)$

$\because$　S表一球　$\Rightarrow$　$4(-m^2-2m+3)>0$　$\Rightarrow$　$m^2+2m-3<0$　$\Rightarrow$　$-3<m<1$

(2) $r^2=-m^2-2m+3=4$　$\Rightarrow$　$m^2+2m+1=0$　$\Rightarrow (m+1)^2=0,\quad m=-1$，

球心$(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2},-\frac{f}{2})=(-m-1，-m，-m)=(0，1，1)$

15. 以$A(-1，2，3)$和$B(-3，6，7)$為直徑兩端點的球面方程式為__________。

【解答】$(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=9$

【詳解】直徑式：

$(x+1)(x+3)+(y-2)(y-6)+(z-3)(z-7)=0$

即$x^2+y^2+z^2+4x-8y-10z+36=0$，即$(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=9$

16. 通過四點$O(0，0，0)$，$A(1，0，0)$，$B(0，1，1)$，$C(1，0，1)$的球面方程式為__________。

【解答】$x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$

【詳解】

設球面方程式為$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$，

過四點$O(0，0，0)$，$A(1，0，0)$，$B(0，1，1)$，$C(1，0，1)$代入

則$g=0$，$1+d+g=0$，$1+1+e+f+g=0$，$1+1+d+f+g=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} g=0 \\ 1+d=0 \\ e+f+2=0 \\ d+f+2=0 \end{cases} \Rightarrow \quad d=-1，f=-1，e=-1，g=0$$

故所求球面方程式為$x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$

17. 以$P(-1，2，3)$為球心，並通過原點的球面方程式為__________。

【解答】$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$

【詳解】半徑$r^2=\overline{OP}^2=1+4+9=14$　$\therefore$　球面方程式為$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$

18. 設空間中一球面通過兩點$(0，2，2)$與$(4，0，0)$，而球心在z軸上，求此球面方程式__________。

【解答】$x^2+y^2+(z+2)^2=20$

【詳解】

設球心$(0，0，t)$，$(0-0)^2+(2-0)^2+(2-t)^2=(4-0)^2+(0-0)^2+(0-t)^2$　$\Rightarrow$　$t=-2$

$(0，0，-2)$與$(4，0，0)$距離 $=\sqrt{20}$ 即半徑，$\therefore$　球面方程式：$x^2+y^2+(z+2)^2=20$