| 高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.12.24 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 3-1 圓方程式 | 班級 | | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選) $xy$ 平面上，下列各組條件中，何者恰可決定一圓？

(A)圓心為 $A(-1，-2)$，且與 $x$ 軸及 $y$ 軸都相切

(B)過點 $A(-1，-2)$，$B(1，2)$，$C(5，10)$

(C)與 $x$ 軸，$y$ 軸及直線 $x+y=1$ 都相切

(D)圓心在直線 $x-y+3=0$ 上，又過點 $A(-1，-2)$，$B(1，2)$

(E)過四點 $O(0，0)$，$D(1，0)$，$E(0，1)$，$F(\frac{1}{2}，\frac{1-\sqrt{2}}{2})$

【解答】(D)(E)

【詳解】

(A)與 $x$ 軸及 $y$ 軸都相切的圓，其圓心必為 $(t,t),(t,-t)$，且在直線 $x-y=0$ 或 $x+y=0$ 上，若以 $A(-1，-2)$為圓心，不合。即沒有圓滿足此條件

(B)$\because$ $A，B，C$ 共線 $\therefore$ 沒有圓過此三點

(C)與 $x$ 軸，$y$ 軸及 $x+y=1$ 都相切的圓，在第一象限有 2 個，第二、四象限各有 1 個，共 4 個

(D)設圓心為 $C(t，t+3)$，由 $\overline{CA}=\overline{CB}=$ 半徑，$(t+1)^2+(t+3+2)^2=(t-1)^2+(t+3-2)^2$
得唯一的解 $t=-2$，即恰可決定圓心 $(-2,1)$，半徑 $\sqrt{10}$ 的唯一圓

(E)$\because$ $\angle DOE=90^\circ$ $\therefore$ $\triangle DOE$ 的外接圓之圓心為斜邊中點 $C(\frac{1}{2}，\frac{1}{2})$

$\because$ 半徑 $\overline{CO}=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $\overline{OF}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore$ $O，D，E，F$ 四點共圓

二、填充題( 每題 10 分)

1. $A(1，2)$，$B(-3，1)$，求以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓$K$方程式，得____________________。(一般式)

【解答】 $x^2+y^2+2x-3y-1=0$

【詳解】

直徑式：$(x-1)(x+3)+(y-2)(y-1)=0$，得$x^2+y^2+2x-3y-1=0$

2. 已知一圓通過兩點$A(1，-2)$和$B(4，3)$，且圓心在$y$軸上，則此圓的方程式為____________。

【解答】$x^2+(y-2)^2=17$

【詳解】

設圓心坐標為$O(0，t)$，此圓過$A(1，-2)$及$B(4，3)$，則$\overline{AO}=\overline{BO}$

$\therefore$ $1^2+(t+2)^2=4^2+(t-3)^2$ $\Rightarrow$ $1+t^2+4t+4=16+t^2-6t+9$ $\Rightarrow$ $10t=20$

$\Rightarrow$ $t=2$，半徑$=\sqrt{1^2+(2+2)^2}=\sqrt{17}$，即此圓方程式為$x^2+(y-2)^2=17$

3. 直線$y=mx+4$ 通過圓$x^2+y^2+2x-6y-1=0$ 之圓心，則$m=$__________。

【解答】1

【詳解】

$x^2+y^2+2x-6y-1=0$ $\Rightarrow$ $(x+1)^2+(y-3)^2=11$，

$\therefore y=mx+4$ 過圓心$(-1，3)$　代入$\Rightarrow 3=-m+4,\quad m=1$

4. 通過三點$(1，-1)$，$(0，2)$，$(2，-2)$三點的圓方程式是__________，其圓心 =__________。

【解答】$x^2+y^2-10x-4y+4=0$，$(5，2)$

【詳解】

設圓$C$為$x^2+y^2+dx+ey+f=0$

$$\begin{cases}(1,-1)\\(0,2)\\(2,-2)\end{cases}\text{三點代入圓}C\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}1+1+d-e+f=0\\0+4+0+2e+f=0\\4+4+2d-2e+f=0\end{cases}\text{得}\begin{cases}d=-10\\e=-4\\f=4\end{cases}$$

則$C$：$x^2+y^2-10x-4y+4=0\quad\Rightarrow\quad(x-5)^2+(y-2)^2=25$，故圓心$(5，2)$

5. 圓心在$(-2，3)$，且通過$(2，0)$之圓的方程式為__________。

【解答】$(x+2)^2+(y-3)^2=25$

【詳解】

圓心 $A(-2，3)$，點 $P(2，0)$，則半徑 $r=\overline{AP}=\sqrt{(-2-2)^2+(3-0)^2}=5$

$\Rightarrow(x+2)^2+(y-3)^2=25$

6. 設$A(3，2)$，$B(-1，5)$，若點$P$滿足$\overline{PA}=2\overline{PB}$，則一切$P$點所成圖形的方程式為 $3x^2+3y^2+dx+ey+f=0$，求數對$(d，e，f)=$______________。

【解答】$(14，-36，91)$

【詳解】

設點$P$為$(x，y)$，則$\overline{PA}=2\overline{PB}\quad\Rightarrow\quad\overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$

$\Rightarrow(x-3)^2+(y-2)^2=4[(x+1)^2+(y-5)^2]$

$\Rightarrow 3x^2+3y^2+14x-36y+91=0$，　$(d，e，f)=(14，-36，91)$

7. 圓$C$與$y$軸交於點$A(0，13)$，$B(0，5)$，若圓$C$面積為 $25\pi$，則圓$C$的方程式為________。

【解答】$(x\pm3)^2+(y-9)^2=25$，$x^2+y^2\pm6x-18y+65=0$

【詳解】$\because$　圓$C$與$y$軸交於點$A(0，13)$，$B(0，5)$，則圓心可設為$(h,9)$

設圓$C$：$(x-h)^2+(y-9)^2=25$，$B(0，5)$代入$\Rightarrow h^2+16=25, h=\pm3$

$\therefore\quad C$：$(x\pm3)^2+(y-9)^2=25$或 $x^2+y^2\pm6x-18y+65=0$

8. 圓 $3x^2+3y^2+12x-6y+1=0$ 的圓心坐標為__________。

【解答】圓心$(-2，1)$

【詳解】

$x^2+y^2+4x-2y+\dfrac{1}{3}=0\quad\Rightarrow\quad(x+2)^2+(y-1)^2=-\dfrac{1}{3}+4+1=\dfrac{14}{3}$，圓心$(-2，1)$

9. 圓心在直線$y=2x+3$ 上且過兩點$(1，2)$，$(-2，3)$的圓之方程式為______________。

【解答】$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

【詳解】

圓心在直線$y=2x+3$ 上，設圓心$C(t，2t+3)$

設$A(1，2)$，$B(-2，3)$，則$\overline{CA}=\overline{CB}\Rightarrow(t-1)^2+(2t+3-2)^2=(t+2)^2+(2t+3-3)^2$

$\Rightarrow t = -1$，$C(-1,1)$，$\overline{CA}=\sqrt{(-1-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，所求方程式$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

10.三直線 $3x+y=5$，$2x-y=5$，$x-3y=-5$ 所圍成三角形的外接圓之方程式為＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$x^2+y^2-6x-2y+5=0$

【詳解】

求三角形頂點坐標 $3x+y=5\cdots\cdots①$，$2x-y=5\cdots\cdots②$，$x-3y=-5\cdots\cdots③$

解①②得交點$(2,-1)$，解①③得交點$(1,2)$，解②③得交點$(4,3)$

設外接圓的方程式為$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，頂點代入得$\begin{cases}4+1+2d-e+f=0\\1+4+d+2e+f=0\\16+9+4d+3e+f=0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}2d-e+f=-5\\d+2e+f=-5\\4d+3e+f=-25\end{cases} \Rightarrow d=-6$，$e=-2$，$f=5$，所求方程式$x^2+y^2-6x-2y+5=0$

11.已知圓$C_2$與圓$C_1$：$x^2+y^2-2x-4y-4=0$ 有相同的圓心，且平分$C_1$的面積，則$C_2$的方程式為＿。

【解答】$(x-1)^2+(y-2)^2=\dfrac{9}{2}\Rightarrow 2x^2+2y^2-4x+8y+1=0$

【詳解】

圓$C_2$與圓$C_1$同心，且平分$C_1$的面積，所以$C_2$的面積為$C_1$面積的$\dfrac{1}{2}$，$C_2$的半徑為$C_1$半徑的$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$C_1$：$(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$，$\Rightarrow C_2$半徑$r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times 3=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，圓心$(1,2)$

$C_2$：$(x-1)^2+(y-2)^2=(\dfrac{3}{\sqrt{2}})^2$，$\Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=\dfrac{9}{2}\Rightarrow 2x^2+2y^2-4x+8y+1=0$

12.設$x$，$y$為實數，且滿足$x^2+y^2+2x+4y-4=0$，則$x^2+y^2$的最小值為＿＿＿＿＿。

【解答】$14-6\sqrt{5}$

【詳解】

$x^2+y^2+2x+4y-4=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=9$，

設$x=-1+3\cos\theta$，$y=-2+3\sin\theta$

$x^2+y^2=(-1+3\cos\theta)^2+(-2+3\sin\theta)^2$

$=14-6\cos\theta-12\sin\theta$

$=14-6\sqrt{5}(\sin\theta\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}+\cos\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}})$

$=14-6\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)$，其中$\cos\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

又$-1\le\sin(\theta+\varphi)\le 1\Rightarrow \therefore x^2+y^2$最小值為 $14-6\sqrt{5}$

13.一圓$C$過點$(2,1)$且與兩坐標軸均相切，則圓$C$的方程式為＿＿＿＿＿。（有二解）

【解答】$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

【詳解】

圓$C$過第一象限的點$(2,1)$且與$x$軸，$y$軸均相切$\Rightarrow$圓心必在第一象限內且與$x$軸，$y$軸等距

設圓心$(t，t)$，$t>0$，半徑$t$，則圓的方程式為$(x-t)^2+(y-t)^2=t^2$

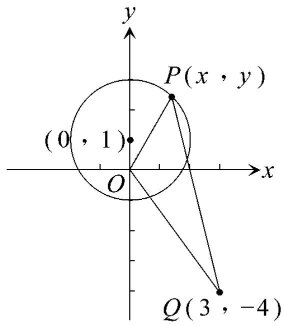
過點$(2，1)$ $\Rightarrow$ $(2-t)^2+(1-t)^2=t^2$ $\Rightarrow$ $t^2-6t+5=0$ $\Rightarrow$ $t=1$ 或$t=5$

故圓的方程式為$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

14.若$P$為$x^2+(y-1)^2=4$ 上的任一點，令$O$為原點，$Q$為$(3，-4)$，則△$POQ$面積的最大值為______。

【解答】$\dfrac{13}{2}$

【詳解】




$P$為$x^2+(y-1)^2=4$ 上的任一點，設$P(x，y)=(2\cos\theta，1+2\sin\theta)$，$\theta\in R$

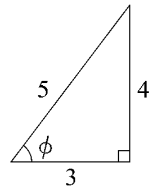
$\because$ $\overrightarrow{OP}=(2\cos\theta，1+2\sin\theta)$，$\overrightarrow{OQ}=(3，-4)$

$\therefore$ △$POQ$面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2\cos\theta & 1+2\sin\theta\\ 3 & -4\end{vmatrix}\right|$

$=\dfrac{1}{2}|(-8\cos\theta-3-6\sin\theta)|$

$=|-3\sin\theta-4\cos\theta-\dfrac{3}{2}|$

$=|5(\dfrac{3}{5}\sin\theta+\dfrac{4}{5}\cos\theta)+\dfrac{3}{2}|$




$=|5(\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi)+\dfrac{3}{2}|$，其中（$\sin\phi=\dfrac{4}{5}$，$\cos\phi=\dfrac{3}{5}$）

$=|5\sin(\theta+\phi)+\dfrac{3}{2}|$，故當$\sin(\theta+\phi)=1$ 時，△$POQ$面積的最大值為$\dfrac{13}{2}$

15.設方程式$x^2+y^2-2mx+2(m-2)y+4m^2-2=0$

(1)若圖形為一圓，則$m$範圍為____________________。

(2)若$m=a$時，使圓之面積$b$為最大，則數對$(a，b)=$______________。

【解答】(1) $-1<m<3$ (2)$(-1，8\pi)$

【詳解】

原式配方 $\Rightarrow$ $C：(x^2-2mx+m^2)+[y^2+2(m-2)y+(m-2)^2]=-4m^2+2+m^2+(m-2)^2$

$-4m^2+2+m^2+(m-2)^2=-2m^2-4m+6$

(1)一圓$\Rightarrow$ $-2m^2-4m+6>0\Rightarrow m^2-2m-3<0, (m-3)(m+1)<0$， $-1<m<3$

(2)$r^2=-2m^2-4m+6=-2(m+1)^2+8$

當$m=-1$ 時，$r^2=8$，即最大面積$\pi r^2=8\pi$

16.過圓$C：x^2+y^2-2x+4y-11=0$ 內一點$A(-2，-1)$的所有弦的中點軌跡方程式為__________。

【解答】$x^2+y^2+x+3y=0$

【詳解】

$C：(x-1)^2+(y+2)^2=4^2$，圓心$B(1，-2)$

圓內過$A(-2，-1)$的所有弦的中點軌跡即為以$\overline{AB}$ 為直徑之圓

方程式為$(x-1)(x+2)+(y+2)(y+1)=0$，即$x^2+y^2+x+3y=0$