高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.12.10					
範圍	2-6 一次方程組	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 滿足 $x + 6y = 2xy$，$3x + 8y = xy$ 的實數 x，y 共若干組？(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

【解答】(C)

【詳解】

$\because$ $x + 6y = 2xy$，$3x + 8y = xy$

(1) $xy = 0$ 時 $\therefore$ $x = 0$，$y = 0$

(2) $xy \neq 0$ 時 $\therefore$ $\dfrac{x+6y}{xy} = 2$ 且 $\dfrac{3x+8y}{xy} = 1$ $\therefore$ $\dfrac{6}{x} + \dfrac{1}{y} = 2$ 且 $\dfrac{8}{x} + \dfrac{3}{y} = 1$

$\Rightarrow$ $x = 2$，$y = -1$ $\therefore$ 原方程組共兩組解

2. 若方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 之解為(4，$-$1)，則方程組 $\begin{cases} 2a_1x + 3b_1y = c_1 \\ 2a_2x + 3b_2y = c_2 \end{cases}$ 之解(x，y)為

(A) $(2，-\dfrac{1}{3})$ (B) (2，3) (C) (2，$-$3) (D) $(\dfrac{1}{2}，\dfrac{1}{3})$ (E) $(-\dfrac{1}{2}，-\dfrac{1}{3})$

【解答】(A)

【詳解】

$$\begin{cases} 2a_1x + 3b_1y = c_1 \\ 2a_2x + 3b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(2x) + b_1(3y) = c_1 \\ a_2(2x) + b_2(3y) = c_2 \end{cases}，\begin{cases} 2x = 4 \\ 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{-1}{3} \end{cases}$$

3. 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$，則行列式 $\begin{vmatrix} 2a-3b & 5a-b \\ 2c-3d & 5c-d \end{vmatrix}$ 之值為(A) 0 (B) 2 (C) 12 (D) 20 (E) 26

【解答】(E)

【詳解】

$$\begin{vmatrix} 2a-3b & 5a-b \\ 2c-3d & 5c-d \end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-3)} = \begin{vmatrix} -13a & 5a-b \\ -13c & 5c-d \end{vmatrix} = (-13) \times \begin{vmatrix} a & 5a-b \\ c & 5c-d \end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-5)} = (-13) \times \begin{vmatrix} a & -b \\ c & -d \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 26$$

4.(複選)下列何者為無限多解？

(A) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ x + 7y - 3z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x - 4y + 6z = 8 \\ -x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x - 4y + 6z = 8 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x - 4y + 6z = 7 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

(E) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ x + 7y - 3z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

【解答】(B)(C)(E)

【詳解】

(A)無解，表三平面兩兩交於一直線，但三交線不共點

(B)無限多解，表三平面重合

(C)無限多解，表二平面重合且與另一平面交於一直線

(D)無解，表二平面平行且與另一平面分別交於一直線

(E)無限多解，表三平面交於一直線

5. (複選)方程組$(L)\begin{cases}x-4y+2z=0\\-2x+4y+3z=1\\-3x+8y+z=2\end{cases}$中，各方程式分別表平面$E_1$，$E_2$，$E_3$，則下列何者正確？

(A) (L)恰有一組解　(B) (L)無限多解　(C) (L)無解　(D)三平面共線

(E) E_1，E_2，E_3兩兩相交於一線且三線不共點

【解答】(C)(E)

【詳解】

將方程組$\begin{cases}x-4y+2z=0\\-2x+4y+3z=1\\-3x+8y+z=2\end{cases}$的增廣矩陣作列運算：

$$\begin{bmatrix}1&-4&2&0\\-2&4&3&1\\-3&8&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[3R_1+R_3]{2R_1+R_2}\begin{bmatrix}1&-4&2&0\\0&-4&7&1\\0&-4&7&2\end{bmatrix}\xrightarrow{(-1)R_2+R_3}\begin{bmatrix}1&-4&2&0\\0&-4&7&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$\therefore$　方程組無解，又E_1，E_2，E_3係數均不成比例

$\Rightarrow$　三平面兩兩相交於一線且三線不共點

二、填充題(每題 10 分)

1. 若$\begin{cases}\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{y}=4\\ax+by=4\end{cases}$與$\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}=-1\\3ax-4by=26\end{cases}$均有解且爲同義方程組，求數對$(a，b)=$__________。

【解答】(3，4)

【詳解】

解$\begin{cases}\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{y}=4\\\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}=-1\end{cases}$得$\begin{cases}x=2\\y=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$代入$\begin{cases}ax+by=4\\3ax-4by=26\end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases}2a-\dfrac{1}{2}b=4\\6a+2b=26\end{cases}$得$\begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}$

2. 方程組$\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}=3\\\dfrac{x-y}{xy}=1\end{cases}$的解$(x，y)=$__________。

【解答】$(1，\dfrac{1}{2})$

【詳解】

原式　$\Rightarrow$　$\begin{cases}\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=3\cdots\cdots①\\\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=1\cdots\cdots②\end{cases}$，解①②　$\Rightarrow$　$\dfrac{1}{y}=2$，$\dfrac{1}{x}=1$，則$x=1$，$y=\dfrac{1}{2}$

3. 方程組$\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$的解爲__________。

【解答】$(1，1，\dfrac{1}{2})$

【詳解】

原式化爲$\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}=2\\ \dfrac{y+z}{yz}=3\\ \dfrac{z+x}{zx}=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2\cdots\cdots①\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3\cdots\cdots②\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=3\cdots\cdots③\end{cases}$

①+②+③得 $2(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z})=8 \Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4\cdots\cdots④$

由④－①得$\dfrac{1}{z}=2 \Rightarrow z=\dfrac{1}{2}$；④－②得$\dfrac{1}{x}=1 \Rightarrow x=1$；④－③得$\dfrac{1}{y}=1 \Rightarrow y=1$

4. $\begin{cases}\dfrac{2}{3x-y}-\dfrac{4}{2x+y}=1\\ \dfrac{5}{3x-y}+\dfrac{8}{2x+y}=7\end{cases}$之解$(x，y)=$__________。

【解答】$(1，2)$

【詳解】

設令$\dfrac{1}{3x-y}=s$，$\dfrac{1}{2x+y}=t$，則$\begin{cases}2s-4t=1\\5s+8t=7\end{cases}$ $\therefore$ $s=1$，$t=\dfrac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases}3x-y=1\\2x+y=4\end{cases} \Rightarrow x=1$，$y=2$

5. 已知$xyz\neq 0$ 且 $8x-3y-6z=0$，$10x-5y-8z=0$，則$\dfrac{3x^2-2y^2+z^2-5xy}{4x^2-5y^2-6z^2+2zx}$之值爲__________。

【解答】$-\dfrac{37}{52}$

【詳解】

$\begin{cases}8x-3y-6z=0\\10x-5y-8z=0\end{cases} \Rightarrow x：y：z=\begin{vmatrix}-3 & -6\\-5 & -8\end{vmatrix}：\begin{vmatrix}-6 & 8\\-8 & 10\end{vmatrix}：\begin{vmatrix}8 & -3\\10 & -5\end{vmatrix}=(-6)：4：(-10)=3：(-2)：5$

設 $x=3k$，$y=-2k$，$z=5k$ 代入

則原式 $=\dfrac{3(3k)^2-2(-2k)^2+(5k)^2-5(3k)(-2k)}{4(3k)^2-5(-2k)^2-6(5k)^2+2(5k)(3k)}=\dfrac{27-8+25+30}{36-20-150+30}=-\dfrac{37}{52}$

6. 設$\begin{cases}(a+3)x+4y=5-3a\\2x+(5+a)y=8\end{cases}$，若方程組無解，則$a=$__________。

【解答】-7

【詳解】

$\dfrac{a+3}{2} \overset{①}{=} \dfrac{4}{5+a} \overset{②}{\leq} \dfrac{5-3a}{8}$，由① $\Rightarrow$ $a^2+8a+7=0$ $\Rightarrow$ $(a+1)(a+7)=0$

$\Rightarrow$ $a=-1$，-7 代入②，得$a=-7$

7. $\begin{cases} x+3y+2z=-3 \\ 2x+y+3z=1 \\ x+ay+z=b \end{cases}$ 有無限多組解，則數對$(a，b)=$__________。

【解答】$(-2，4)$

【詳解】

$\Rightarrow$ $k(x+3y+2z+3)+\ell(2x+y+3z-1)=x+ay+z-b$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} k+2\ell=1 \\ 3k+\ell=a \\ 2k+3\ell=1 \\ -3k+\ell=b \end{cases}$ 解之得 $k=-1$，$\ell=1$，代入得 $a=-2$，$b=4$

8. 已知x，y，$z\in R$，求聯立方程組$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+y-z=0 \\ xyz+2xy+x-3=0 \end{cases}$ 的解爲__________。

【解答】$(3，0，3)$

【詳解】

$\begin{cases} x+2y-z=0 & \cdots\cdots① \\ x+y-z=0 & \cdots\cdots② \\ xyz+2xy+x-3=0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$

由①，② $\Rightarrow$ $x:y:z=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1:0:1$

令 $x=t$，$y=0$，$z=t$ 代入③ $\Rightarrow$ $t-3=0$ 得 $t=3$，故數對$(x，y，z)=(3，0，3)$

9. 有一工程，如甲、乙、丙三人合作，10 天可完成；如乙、丙二人合作，15 天可完成；如甲作 15 天後餘下由丙來作，丙再作 30 天才完成，問如乙獨做需__________天完成。

【解答】20

【詳解】

設一工程甲獨作需 x 天，乙獨作需 y 天，丙獨作需 z 天完成

$\therefore$ $\begin{cases} 10(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=1 \\ 15(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=1 \\ \frac{15}{x}+\frac{30}{z}=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}\cdots\cdots ① \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}\cdots\cdots ② \\ \frac{1}{x}+\frac{2}{z}=\frac{1}{15}\cdots\cdots ③ \end{cases}$

由①－②得$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{30}$ $\Rightarrow$ $x=30$，代入③得$\dfrac{1}{30}+\dfrac{2}{z}=\dfrac{1}{15}$ $\Rightarrow$ $z=60$

代入②得$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{60}=\dfrac{1}{15}$ $\Rightarrow$ $y=20$，故乙獨作需 20 天完成

10.甲，乙二人同解方程組$\begin{cases}2x-ay=3\\bx+y=7\end{cases}$，若甲看錯$a$得解爲(2，－1)，乙看錯$b$得解爲(1，－1)，求正確的($a$，$b$) =__________，又正確的解($x$，$y$) =__________。

【解答】(1，4)，($\frac{5}{3}$，$\frac{1}{3}$)

【詳解】

$\begin{cases}2x-ay=3 & \cdots\cdots① \\ bx+y=7 & \cdots\cdots②\end{cases}$

甲看錯 a 得解(2，－1)代入② $\Rightarrow$ $2b-1=7$ $\Rightarrow$ $b=4$

乙看錯 b 得解(1，－1)代入① $\Rightarrow$ $2+a=3$ $\Rightarrow$ $a=1$

$\therefore$ (a，b) = (1，4)，原方程組$\begin{cases}2x-y=3\\4x+y=7\end{cases}$解得($x$，$y$) = ($\frac{5}{3}$，$\frac{1}{3}$)

11.有一個三位正整數，其百位數字與個位數字之和等於十位數字，如果將百位數字與十位數字交換，所得的三位數比原數大 450，如果將原數的十位數字與個位數字交換，所得的三位數比原數小 27，則此三位數爲__________。

【解答】385

【詳解】

令此三位數爲$\boxed{a\mid b\mid c}$，依題意列方程組如下：

$\begin{cases}a+c=b\\100b+10a+c=100a+10b+c+450\\100a+10c+b=100a+10b+c-27\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}a-b+c=0\\a-b+5=0\\b-c-3=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $a=3$，$b=8$，$c=5$

12.若兩方程組$\begin{cases}x+y+z=6\\x-2y+2z=3\\2x-3y=-4\end{cases}$與$\begin{cases}ax+by+cz=5\\bx+cy+az=6\\cx+ay+bz=1\end{cases}$有相同的解，則數對($a$，$b$，$c$) =__________。

【解答】(1，－1，2)

【詳解】

由$\begin{cases}x+y+z=6 & \cdots\cdots①\\x-2y+2z=3 & \cdots\cdots②\\2x-3y=-4 & \cdots\cdots③\end{cases}$，①×2－②得 $x+4y=9\cdots\cdots④$

③－④×2 得 $-11y=-22$ $\Rightarrow$ $y=2$，代入④得 $x=1$，代入①得 $z=3$

將 $x=1$，$y=2$，$z=3$ 代入第二個方程組得$\begin{cases}a+2b+3c=5\\b+2c+3a=6\\c+2a+3b=1\end{cases}$ $\Rightarrow$ $6(a+b+c)=12$

$\Rightarrow$ $a+b+c=2$ $\therefore$ $\begin{cases}b+2c=3\\c+2a=4\\a+2b=-1\end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=-1$，$c=2$

13.若$\begin{cases}(5m+11)x-(m+4)y+12=0\\(m+15)x+(2m-1)y-20=0\end{cases}$之解中，$y$值爲$x$值的 3 倍，則$m$ =__________，解(x，y) =____。

【解答】$m=-1$，(x，y) = (4，12)

【詳解】

令 $x=t$，$y=3t$ 代入原式得 $\begin{cases}(5m+11)t-3(m+4)t=-12\\(m+15)t+3(2m-1)t=20\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}(2m-1)t=-12\\(7m+12)t=20\end{cases}$

$\therefore$ $t=\dfrac{-12}{2m-1}=\dfrac{20}{7m+12}$，得 $m=-1$ $\therefore$ $x=\dfrac{-12}{-3}=4$，$y=3\times4=12$

14.設當$x=x_0$時，$\begin{vmatrix}\log_3(9\sqrt{3}+1-x) & \log_3(9\sqrt{3}-1+x)\\-1 & 1\end{vmatrix}$有最大值$M$，則$(x_0，M)=$__________。

【解答】(1，5)

【詳解】

$$\begin{vmatrix}\log_3(9\sqrt{3}+1-x) & \log_3(9\sqrt{3}-1+x)\\-1 & 1\end{vmatrix}=\log_3(9\sqrt{3}+1-x)+\log_3(9\sqrt{3}-1+x)$$

$$=\log_3[(9\sqrt{3}+1-x)(9\sqrt{3}-1+x)]$$

$$=\log_3[243-(1-x)^2]$$

$\because$ $243-(1-x)^2=-(x-1)^2+243\le243$，當$x=1$ 時，最大值 243

$\therefore$ 當$x_0=1$ 時，原式有最大值$M=\log_3 243=\log_3 3^5=5$

15.小明使用高斯-喬登消去法，在紙上解三元一次聯立方程式如下：$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix}1 & 2 & a & 18\\0 & -1 & -5 & b\\0 & 12 & c & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\cdots$

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 5\\0 & 0 & 1 & -6\end{bmatrix}$，數字$a$，$b$，$c$不慎汙損，請幫他找回$(a，b，c)$爲__________。

【解答】(–1，25，10)

【詳解】

由題意可知$\begin{cases}x+2y+az=18 & \cdots\cdots①\\-y-5z=b & \cdots\cdots②\\12y+cz=0 & \cdots\cdots③\end{cases}$ 之解爲$\begin{cases}x=2\\y=5 & \cdots\cdots④\\z=-6\end{cases}$

④代入①，$2+10-6a=18$，$a=-1$；④代入②，$-5+30=b$，$b=25$

④代入③，$60-6c=0$，$c=10$ $\Rightarrow$ $(a，b，c)=(-1，25，10)$

16.若 $k\in R$且方程組$\begin{cases}2x+5y=kx\\3x+4y=ky\end{cases}$，

(1)若方程組除了(0，0)外，還有其他解，則$k=$__________。

(2)若方程組有$x>0$，$y>0$ 之解，則$k=$__________。

【解答】(1) -1，7 (2) 7

【詳解】方程組$\begin{cases}(2-k)x+5y=0\\3x+(4-k)y=0\end{cases}$

(1)若方程組除了(0，0)外，尚有其他解即無限多解 $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix}2-k & 5\\3 & 4-k\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow$ $k^2-6k-7=0$ $\Rightarrow$ $k=-1$，7

(2)①$k=-1$ 時，原方程組$\begin{cases}3x+5y=0\\3x+5y=0\end{cases}$，其解即 $3x+5y=0$ 之解$\Rightarrow$ x，y爲一正一負（不合）

②$k=7$ 時，原方程組$\begin{cases}-5x+5y=0\\ 3x-3y=0\end{cases}$，解即$x-y=0$之解$\Rightarrow$ $x=y$，方程組有$x>0$，$y>0$之解

17.平面上以$\bar{u}=(a，b)$和$\bar{v}=(c，d)$爲相鄰兩邊的平行四邊形面積爲 10，則以 $3\bar{u}-2\bar{v}$ 與 $2\bar{u}+3\bar{v}$ 爲相鄰兩邊的平行四邊形面積爲__________。

【解答】130

【詳解】已知 $\left|\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right|=10$，$3\bar{u}-2\bar{v}=(3a-2c，3b-2d)$，$2\bar{u}+3\bar{v}=(2a+3c，2b+3d)$

所求$=\left|\begin{vmatrix} 3a-2c & 3b-2d\\ 2a+3c & 2b+3d\end{vmatrix}\right|=\left|\left(\begin{vmatrix} 3a-2c & 3b\\ 2a+3c & 3d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3a-2c & -2d\\ 2a+3c & 2b\end{vmatrix}\right)\right|$

$=\left|\left(\begin{vmatrix} 3a & 3b\\ 3c & 3d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2c & 3b\\ 2a & 3d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3a & -2d\\ 3c & 2b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2c & -2d\\ 2a & 2b\end{vmatrix}\right)\right|$

$=\left|\left(9\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}+(-6cd-6ab)+(6ab+6cd)+4\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right)\right|=13\left|\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right|=130$

18.若△ABC的三邊長爲a，b，c，且滿足$a-2b+c=0$，$5a+4b-5c=0$，已知△ABC的周長$=30$，則△ABC的面積=__________。

【解答】$15\sqrt{3}$

【詳解】

$\begin{cases}a-2b+c=0\\ 5a+4b-5c=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $a：b：c=\begin{vmatrix} -2 & 1\\ 4 & -5\end{vmatrix}：\begin{vmatrix} 1 & 1\\ -5 & 5\end{vmatrix}：\begin{vmatrix} 1 & -2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=6：10：14=3：5：7$

令 $a=3k$，$b=5k$，$c=7k$ $\because$ $a+b+c=30$ $\Rightarrow$ $15k=30$ $\Rightarrow$ $k=2$

$\therefore$ 三邊長爲 6，10，14 $\Rightarrow$ △的面積 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{15\times9\times5\times1}=15\sqrt{3}$

19.設 $3ab=2(a+b)$，$4bc=3(b+c)$，$5ca=6(c+a)$，則a之値爲__________。

【解答】0 或$\frac{3}{7}$

【詳解】(1)當 $abc=0$ 時，$a=0$，$b=0$，$c=0$

(2)當 $abc\neq0$ 時，$\frac{a+b}{ab}=\frac{3}{2}$，$\frac{b+c}{bc}=\frac{4}{3}$，$\frac{c+a}{ca}=\frac{5}{6}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{3}{2},\\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{4}{3},\\ \frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{5}{6},\end{cases}$ $\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{11}{3}$，

$\Rightarrow\frac{1}{a}=\frac{11}{3}-\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$ $\Rightarrow$ $a=\frac{3}{7}$