| 高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.12.17 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 2-6、3-1<br>一次方程組，圓方程式 | 班級 | | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

一、選擇題(每題 10 分)

1. 滿足 $x+6y=2xy$，$3x+8y=xy$ 且 $xy\neq 0$ 時，實數 $x$，$y$ 共若干組？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

【解答】(B)

【詳解】

$\because$ $x+6y=2xy$，$3x+8y=xy$，且 $xy\neq 0$

$xy\neq 0$ 時，同除以 $xy$ $\therefore$ $\dfrac{x+6y}{xy}=2$ 且 $\dfrac{3x+8y}{xy}=1$

$\therefore$約分後 $\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{y}=2$ 且 $\dfrac{8}{x}+\dfrac{3}{y}=1$ $\Rightarrow$ $x=2$，$y=-1$，$\therefore$ 原方程組共 1 組解

2. 若方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 之解為(4，1)，則方程組 $\begin{cases}2a_1x+3b_1y=c_1\\2a_2x+3b_2y=c_2\end{cases}$ 之解($x$，$y$)為

(A) $(2，-\dfrac{1}{3})$ (B) (2，3) (C) (2，$-$ 3) (D) $(2，\dfrac{1}{3})$ (E) $(-2，-\dfrac{1}{3})$

【解答】(D)

【詳解】

$$\begin{cases}2a_1x+3b_1y=c_1\\2a_2x+3b_2y=c_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1(2x)+b_1(3y)=c_1\\a_2(2x)+b_2(3y)=c_2\end{cases}，\begin{cases}2x=4\\3y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

3. 若 $\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=3$，則行列式 $\begin{vmatrix}2a-3b & 5a-b\\2c-3d & 5c-d\end{vmatrix}$ 之値為(A) 9 (B) 19 (C) 29 (D) 39 (E) 49

【解答】(D)

【詳解】

$$\begin{vmatrix}2a-3b & 5a-b\\2c-3d & 5c-d\end{vmatrix}\underset{\times(-3)}{=}\begin{vmatrix}-13a & 5a-b\\-13c & 5c-d\end{vmatrix}=(-13)\times\begin{vmatrix}a & 5a-b\\c & 5c-d\end{vmatrix}\underset{\times(-5)}{=}(-13)\times\begin{vmatrix}a & -b\\c & -d\end{vmatrix}=13\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=39$$

4. (複選)方程組($L$) $\begin{cases}x-2y+3z=4\\x+7y-3z=1\\x+y+z=3\end{cases}$ 中，各方程式分別表平面$E_1$，$E_2$，$E_3$，則下列何者正確？

(A) ($L$)恰有一組解 (B) ($L$)無限多解 (C) ($L$)無解 (D)三平面共線

(E) $E_1$，$E_2$，$E_3$兩兩相交於一線且三線不共點

【解答】(B)(D)

【詳解】

將方程組$\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ x+7y-3z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$的增廣矩陣作列運算：$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{互換}]{R_1 \leftrightarrow R_3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)R_1+R_3]{(-1)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\frac{1}{2})R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$　方程組無限多解，又$E_1$，$E_2$，$E_3$係數均不成比例$\Rightarrow$　三平面交於一線

5. 有一圓通過$A(1，1)$，且與圓$C$：$x^2+y^2-4x-2y=0$有相同的圓心$(a，b)$，則
   (A)圓心為(1，2)　(B)半徑為$\sqrt{5}$　(C)圓方程式為$(x-2)^2+(y-1)^2=5$
   (D) $a+b=3$　(E)圓面積為$5\pi$

【解答】(D)

【詳解】$C$：$(x-2)^2+(y-1)^2=5$　$\Rightarrow$　圓心$P(a，b)=(2，1)$，半徑$r=\overline{AP}=1$

6. (複選)設方程式$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$表示$xy$平面上的一個圓，則下列敘述何者正確？
   (A) $a=1$　(B) $b=0$　(C) $c$之值可為 $-2$　(D) $a=c$　(E) $d^2+e^2-4af>0$

【解答】(B)(C)(D)(E)

【詳解】

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 表一圓　$\Rightarrow$　$b=0$，$a=c\neq 0$

$ax^2+ay^2+dx+ey+f=0$　$\Rightarrow$　$x^2+y^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}y+\frac{f}{a}=0$

$\Rightarrow [x^2+\frac{d}{a}x+(\frac{d}{2a})^2]+[y^2+\frac{e}{a}y+(\frac{e}{2a})^2]=-\frac{f}{a}+(\frac{d}{2a})^2+(\frac{e}{2a})^2$

$\Rightarrow$　$(x+\frac{d}{2a})^2+(y+\frac{e}{2a})^2=\frac{d^2}{4a^2}+\frac{e^2}{4a^2}-\frac{f}{a}>0$

$\Rightarrow$　$(x+\frac{d}{2a})^2+(y+\frac{e}{2a})^2=\frac{1}{4a^2}(d^2+e^2-4af)>0$　$\Rightarrow$　$d^2+e^2-4af>0$

## 二、填充題( 每題 10 分)

1. 方程組$\begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=3 \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=1 \end{cases}$的解$(x，y)=$__________。

【解答】$(1，\frac{1}{2})$

【詳解】$\begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=3 \cdots\cdots ① \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=1 \cdots\cdots ② \end{cases}$，解①+②　$\Rightarrow$　$\frac{1}{y}=2$，$\frac{1}{x}=1$，則 $x=1$，$y=\frac{1}{2}$

2. $\begin{cases}\dfrac{2}{3x-y}-\dfrac{4}{2x+y}=1\\ \dfrac{5}{3x-y}+\dfrac{8}{2x+y}=7\end{cases}$ 之解$(x，y)=$__________。

【解答】(1，2)

【詳解】

設令$\dfrac{1}{3x-y}=s$，$\dfrac{1}{2x+y}=t$，則$\begin{cases}2s-4t=1\\5s+8t=7\end{cases}$ $\therefore$ $s=1$，$t=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow\begin{cases}3x-y=1\\2x+y=4\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x=1$，$y=2$

3. 已知$xyz\neq 0$ 且 $8x-3y-6z=0$，$10x-5y-8z=0$，則$\dfrac{3x^2-2y^2+z^2+5xy}{4x^2-5y^2-6z^2+2zx}$之值爲__________。

【解答】$-\dfrac{7}{52}$

【詳解】

$\begin{cases}8x-3y-6z=0\\10x-5y-8z=0\end{cases}$，過原點

又 $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(\begin{vmatrix}-3&-6\\-5&-8\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-6&8\\-8&10\end{vmatrix},\begin{vmatrix}8&-3\\10&-5\end{vmatrix})=(-6，4，(-10))=-6(3，(-2)，5)$

設 $x=3t$，$y=-2t$，$z=5t$ 代入

則原式 $=\dfrac{3(3t)^2-2(-2t)^2+(5t)^2+5(3t)(-2t)}{4(3t)^2-5(-2t)^2-6(5t)^2+2(5t)(3t)}=\dfrac{27-8+25-30}{36-20-150+30}=-\dfrac{7}{52}$

4. 設$\begin{cases}(a+3)x+4y=5-3a\\2x+(5+a)y=8\end{cases}$，若方程組無限多解，則$a=$__________。

【解答】$-1$

【詳解】

$\dfrac{a+3}{2}=\dfrac{4}{5+a}=\dfrac{5-3a}{8}$，由$\dfrac{a+3}{2}=\dfrac{4}{5+a}\Rightarrow$ $a^2+8a+7=0$ $\Rightarrow$ $(a+1)(a+7)=0$

$\Rightarrow$ $a=-1$，$-7$ 代入$\dfrac{4}{5+a}=\dfrac{5-3a}{8}$，得$a=-7$

5. 有一工程，如甲、乙、丙三人合作，10 天可完成；如乙、丙二人合作，15 天可完成；如甲作 15 天後餘下由丙來作，丙再作 30 天才完成，問如丙獨做需__________天完成。

【解答】60

【詳解】

設一工程甲獨作需 $x$ 天，乙獨作需 $y$ 天，丙獨作需 $z$ 天完成

$$\therefore\quad \begin{cases} 10(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=1 \\ 15(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=1 \\ \frac{15}{x}+\frac{30}{z}=1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}\cdots\cdots ① \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}\cdots\cdots ② \\ \frac{1}{x}+\frac{2}{z}=\frac{1}{15}\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

由① − ②得$\frac{1}{x}=\frac{1}{30} \quad\Rightarrow\quad x=30$，代入③得$\frac{1}{30}+\frac{2}{z}=\frac{1}{15} \quad\Rightarrow\quad z=60$

6. 甲，乙二人同解方程組$\begin{cases} 2x-ay=3 \\ bx+y=7 \end{cases}$，若甲看錯$a$得解爲$(2，-1)$，乙看錯$b$得解爲$(1，-1)$，求正確的$(a，b)=$__________，又正確的解$(x，y)=$__________。

【解答】$(1，4)$，$(\frac{5}{3}，\frac{1}{3})$

【詳解】

$$\begin{cases} 2x-ay=3 \cdots\cdots ① \\ bx+y=7 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

甲看錯 $a$ 得解$(2，-1)$代入② $\Rightarrow\quad 2b-1=7 \quad\Rightarrow\quad b=4$

乙看錯 $b$ 得解$(1，-1)$代入① $\Rightarrow\quad 2+a=3 \quad\Rightarrow\quad a=1$

$\therefore\quad (a，b)=(1，4)$，原方程組$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x+y=7 \end{cases}$解得$(x，y)=(\frac{5}{3}，\frac{1}{3})$

7. 小明使用高斯消去法，在紙上解三元一次聯立方程式如下：$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 18 \\ 0 & -1 & -5 & b \\ 0 & 12 & c & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$，數字$a$，$b$，$c$不慎汙損，請幫他找回$(a，b，c)$爲__________。

【解答】$(-1，25，10)$

【詳解】

由題意可知$\begin{cases} x+2y+az=18 \cdots\cdots ① \\ -y-5z=b \cdots\cdots ② \\ 12y+cz=0 \cdots\cdots ③ \end{cases}$ 之解爲$\begin{cases} x=2 \\ y=5 \cdots\cdots ④ \\ z=-6 \end{cases}$

④代入①，$2+10-6a=18$，$a=-1$；④代入②，$-5+30=b$，$b=25$

④代入③，$60-6c=0$，$c=10 \quad\Rightarrow\quad (a，b，c)=(-1，25，10)$

8. 通過三點$(1，-1)$，$(0，2)$，$(2，-2)$三點的圓方程式是__________，其面積 =__________。

【解答】$x^2+y^2-10x-4y+4=0$，$25\pi$

【詳解】

設圓$C$爲$x^2+y^2+dx+ey+f=0$

$\begin{cases}(1,-1)\\(0,2)\\(2,-2)\end{cases}$ 三點代入圓$C$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}1+1+d-e+f=0\\0+4+0+2e+f=0\\4+4+2d-2e+f=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}d=-10\\e=-4\\f=4\end{cases}$

則$C$：$x^2+y^2-10x-4y+4=0$ $\Rightarrow$ $(x-5)^2+(y-2)^2=25$，故圓面積 $=\pi r^2=25\pi$

9. 圓心在$(-1，4)$，且通過$(2，0)$之圓的方程式爲__________。

【解答】$(x+1)^2+(y-4)^2=25$

【詳解】設圓心 $A(-1，4)$，點 $P(2，0)$，則半徑 $r=\overline{AP}=5\Rightarrow(x+1)^2+(y-4)^2=25$

10. $A(1，2)$，$B(-3，0)$，求以$\overline{AB}$爲直徑的圓$K$方程式，得______________________。(一般式)

【解答】 $x^2+y^2+2x-2y-3=0$

【詳解】

直徑式：$(x-1)(x+3)+(y-2)(y-0)=0$，得$x^2+y^2+2x-2y-3=0$

11. 直線$y=mx+2$ 通過圓$x^2+y^2+2x-6y-1=0$ 之圓心，則$m=$__________。

【解答】$-1$

【詳解】

$x^2+y^2+2x-6y-1=0$ $\Rightarrow$ $(x+1)^2+(y-3)^2=11$，$\therefore y=mx+2$ 過$(-1，3)$ $\Rightarrow$ $m=-1$

12. 圓 $3x^2+3y^2+9x-6y+1=0$ 的圓心坐標爲__________。

【解答】圓心$(-\frac{3}{2}，1)$

【詳解】

$x^2+y^2+3x-2y+\frac{1}{3}=0$ $\Rightarrow$ $(x+\frac{3}{2})^2+(y-1)^2=\frac{9}{4}+1-\frac{1}{3}=\frac{35}{12}$，圓心$(-\frac{3}{2}，1)$

13.一圓$C$過點$(2，1)$且與兩坐標軸均相切，則圓$C$的方程式爲__________。（有二解）

【解答】$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

【詳解】

圓$C$過第一象限的點$(2，1)$且與$x$軸，$y$軸均相切⇒圓心必在第一象限內且與$x$軸，$y$軸等距

設圓心$(t，t)$，$t>0$，半徑$t$，則圓的方程式爲$(x-t)^2+(y-t)^2=t^2$

過點$(2，1)$ $\Rightarrow$ $(2-t)^2+(1-t)^2=t^2$ $\Rightarrow$ $t^2-6t+5=0$ $\Rightarrow$ $t=1$ 或$t=5$

故圓的方程式爲$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

16.設方程式$x^2+y^2-2mx+2(m-2)y+4m^2-2=0$ 之圖形爲一圓，則 $m$ 範圍________________。

【解答】$-3<m<1$

【詳解】 圖形爲一圓，則$d^2+e^2-4f>0\Rightarrow$ $(-2m)^2+[2(m-2)]^2-4(4m^2-2)>0$

$\Rightarrow$ $4m^2+4(m-2)^2-16m^2+8>0$

$\Rightarrow$ $-8m^2-16m+24>0$

$\Rightarrow$ $m^2+2m-3<0$

$\Rightarrow(m+3)(m-1)<0$

$\Rightarrow$ $-3<m<1$