

高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.11.20			
範圍	2-5 空間直線	班級	姓名
		座號	

一、選擇題(每題 10 分)

1. 空間中點 $A(1, 2, 3)$ 到直線 $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ 之距離為 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

【解答】(D)

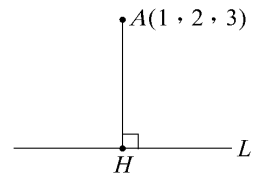
【詳解】

SOL 一：

設 $H \in L$ ，則 $H(-1+2t, -2-t, 2t)$

$$\overline{AH} = \sqrt{(2-2t)^2 + (4+t)^2 + (3-2t)^2} = \sqrt{9t^2 - 12t + 29} = \sqrt{9\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + 25}$$

當 $t = \frac{2}{3}$ 時， \overline{AH} 有最小值 5，即 $d(A; L) = 5$



SOL 二：

設 $\overline{AH} \perp L$ 於 $H(-1+2t, -2-t, 2t) \Rightarrow \overline{AH} = (-2+2t, -4-t, -3+2t)$ ， $\vec{v} = (2, -1, 2)$

$\overline{AH} \perp \vec{v} \Rightarrow \overline{AH} \cdot \vec{v} = 0$ ，即 $2(-2+2t) - (-4-t) + 2(-3+2t) = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$

$$\overline{AH} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{14}{3}, -\frac{5}{3}\right), d(A; L) = \overline{AH} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{14}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2} = 5$$

SOL 三：

取直線 L 上一點 $B(-1, -2, 0)$ ， $\overline{BA} = (2, 4, -3)$ ， $\vec{v} = (2, -1, 2)$

$$d(A, L) = \frac{|\overline{BA} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5^2 + (-10)^2 + (-10)^2}}{3} = 5$$

2. 設相異兩點 A, B 都在直線 $L_1: \begin{cases} 3x - y + z - 7 = 0 \\ 2x + y - 3z + 14 = 0 \end{cases}$ 上，也都在直線 $L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ 上，

$m, n, b, c \in R$ ，則 $m+n$ 之值為 (A) 5 (B) 6 (C) 11 (D) 16 (E) 17

【解答】(D)

【詳解】

$\overline{AB} = L_1 = L_2$ 同一直線

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \end{vmatrix} \Rightarrow L_1 \text{ 的方向向量為 } (2, 11, 5)$$

$$\therefore (2, 11, 5) = (2, m, n) \Rightarrow m = 11, n = 5 \Rightarrow m + n = 16$$

$$\therefore (1, b, c) \in L_2 \quad \therefore (1, b, c) \in L_1, \text{ 代入 } \begin{cases} 3 - b + c - 7 = 0 \\ 2 + b - 3c + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 2, c = 6$$

3. 已知點 $A(-1, m, n)$ 在直線 $L: \frac{x+81}{8} = \frac{y+108}{11} = \frac{z-127}{-13}$ 上，則實數序對 $(m, n) =$

(A) (2, -3) (B) (2, 3) (C) (-2, 3) (D) (-4, 3) (E) (5, -8)

【解答】(A)

$$\because A(-1, m, n) \in L \quad \therefore \frac{80}{8} = \frac{m+108}{11} = \frac{n-127}{-13} \Rightarrow \begin{cases} m+108=110 \\ n-127=-130 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=-3 \end{cases}$$

4. (複選) 在空間中，直線 $L: \begin{cases} x=1+4t \\ y=2 \\ z=3-5t \end{cases}, t \in R$ ，下列敘述何者正確？

- (A) L 與平面 $E: 4x - 5z + 11 = 0$ 恰交一點 (B) L 與平面 $E: 10x + y + 8z + 1 = 0$ 平行
 (C) L 與平面 $E: 5x + 3y + 4z + 1 = 0$ 垂直 (D) L 與 x 軸平行 (E) L 與 y 軸垂直

【解答】(A)(B)

【詳解】

(A) L 代入 E ， $4(1+4t) - 5(3-5t) + 11 = 0 \Rightarrow t = 0$ ，表 L 與 E 恰交一點

(B) L 之方向向量 $\vec{v} = (4, 0, -5)$ 與平面 E 之法向量 $\vec{n} = (10, 1, 8)$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{n}, \text{ 且 } L \notin E, \therefore L // E$$

(C) L 方向向量 $\vec{v} = (4, 0, -5)$ 與平面 E 之法向量 $\vec{n} = (5, 3, 4)$ 不平行， $\therefore L$ 與 E 不垂直

(D) L 方向向量 $\vec{v} = (4, 0, -5)$ 與 x 軸方向向量 $\vec{v}_x = (1, 0, 0)$ 不平行， $\therefore L$ 與 x 軸不平行

(E) L 與 y 軸不相交且不平行 $\therefore L$ 與 y 軸歪斜

二、填充題(每題 10 分)

1. 試求包含 $A(4, 3, 1)$ 及直線 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ 之平面方程式為_____。

【解答】 $2x - 6y + z + 9 = 0$

【詳解】

取直線 L 上一點 $P(1, 2, 1) \quad \therefore \vec{PA} = (3, 1, 0)$

直線 L 之方向向量 $\vec{v} = (2, 1, 2) \Rightarrow \vec{PA} \times \vec{v} = (2, -6, 1)$

\therefore 包含 A 點及直線 L 之平面方程式為 $2(x-4) - 6(y-3) + (z-1) = 0$ ， $2x - 6y + z + 9 = 0$

2. 包含直線 $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases}$ 及點 $(1, -1, -1)$ 之平面方程式為_____。

【解答】 $7x - 5y + 3z - 9 = 0$

【詳解】平面族

設含直線 $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases}$ 的平面方程式為 $(x+y+z-3) + k(2x-y+z-3) = 0$

過點 $(1, -1, -1)$ ，得 $(1-1-1-3) + k(2+1-1-3) = 0 \Rightarrow k = -4$

所求平面方程式為 $(x+y+z-3) - 4(2x-y+z-3) = 0$ ，即 $7x - 5y + 3z - 9 = 0$

3. 空間中二直線 $L_1: \frac{x}{2} = y - 1 = 2 - z$ ， $L_2: \frac{x-1}{2} = y + 1 = 8 - z$ ，

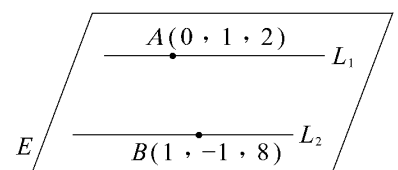
(1) 則 L_1, L_2 的最短距離 = _____。 (2) 包含直線 L_1 和 L_2 的平面方程式為_____。

【解答】(1) $\sqrt{35}$ (2) $4x - 13y - 5z + 23 = 0$

【詳解】

(1) $A(0, 1, 2) \in L_1, P(1+2t, -1+t, 8-t) \in L_2$

$$\overline{AP} = \sqrt{(1+2t)^2 + (-2+t)^2 + (6-t)^2} = \sqrt{6(t-1)^2 + 35}$$



當 $t=1$ 時， \overline{AP} 有最小值為 $\sqrt{35}$ ，即 $d(L_1; L_2) = \sqrt{35}$

(2)已知 $\overline{AB} = (1, -2, 6)$ 及方向向量 $\overline{v} = (2, 1, -1)$ ， $\overline{AB} \times \overline{v} = (-4, 13, 5)$

取 $\overline{n} = (4, -13, -5)$ 為所求平面 E 之法向量，且平面 E 過 $A(0, 1, 2)$

$\therefore E: 4(x-0) - 13(y-1) - 5(z-2) = 0 \Rightarrow E: 4x - 13y - 5z + 23 = 0$

4. 過點 $A(1, 0, 2)$ 且垂直於直線 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}$ 之平面方程式為_____。

【解答】 $2x + 2y + z = 4$

【詳解】

平面 E 垂直直線 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1} \Rightarrow E$ 的法線向量即為直線的方向向量 $(2, 2, 1)$ ，

又 $A(1, 0, 2)$ 在 E 上， E 之方程式為 $2(x-1) + 2(y-0) + 1 \cdot (z-2) = 0$ ，即 $2x + 2y + z = 4$

5. 若直線 $L: \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-1}{c}$ 與平面 $E: 3x - y + 2z = 2$ 垂直且交點 H ，則數對 $(b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ ， H 的坐標是_____。

【解答】 $(-2, 4)$ ， $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$

【詳解】

(1) $\because L \perp E \therefore$ 方向向量 $\overline{v} = (6, b, c) \parallel$ 法向量 $\overline{n} = (3, -1, 2)$

則 $\frac{6}{3} = \frac{b}{-1} = \frac{c}{2}$ ， $\Rightarrow b = -2, c = 4$ ，數對 $(b, c) = (-2, 4)$

(2) $\because H \in L: \begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \therefore$ 設 $H(-2 + 6t, 1 - 2t, 1 + 4t)$ ， H 代入 E

$\Rightarrow (-6 + 18t) - (1 - 2t) + (2 + 8t) = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$ ，則 $H(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$

6. 空間二直線 $L: x - 3 = 1 - y = z - 1$ ， $M: x - 1 = a(y + 1) = z + b$ ，若 $L \parallel M$ 且 L 與 M 的距離為 $2\sqrt{2}$ ，則序對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】 $(-1, -1)$

【詳解】

$L: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ ， $M: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{\frac{1}{a}} = \frac{z+b}{1}$

(1) $L \parallel M \Rightarrow \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1$

(2) L 上取一點 $A(3, 1, 1)$ ， M 上取一點 $B(1, -1, -b)$ ， L 與 M 的距離即 A 點到 M 的距離

$\overline{BA} = (2, 2, 1+b)$ ， L 之方向向量 $\overline{v} = (1, -1, 1)$

$$d(L, M) = d(A, M) = \frac{|\overline{BA} \times \overline{v}|}{|\overline{v}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 1+b \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1+b & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{3}} \\ = \frac{\sqrt{(-4)^2 + (2+1+b)^2 + (1+b-2)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2b^2 + 4b + 26}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore 2b^2 + 4b + 26 = 24 \Rightarrow (b+1)^2 = 0, \quad b = -1$$

7. 包含直線 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$ 的平面 E , 若與平面 $F: 2x - y + 3z + 7 = 0$ 垂直, 則其方程式為 _____。

【解答】 $10x - y - 7z + 25 = 0$

【詳解】

設平面 E, F 的法線向量各為 \vec{n}_1, \vec{n}_2 , 其中 $\vec{n}_2 = (2, -1, 3)$

$\therefore E \perp F \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \quad \therefore E$ 包含 $L \Rightarrow \vec{n}_1 \perp L$ 的方向向量 $(3, 2, 4)$

$$\begin{array}{ccccccc} \left. \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right\} & \begin{array}{ccccccc} -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ & \times & \times & \times & \\ & 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \end{array} & \left. \right\} & \therefore \vec{n}_1, L \text{ 的公垂向量 } \vec{n}_1 = (10, -1, -7) \end{array}$$

\therefore 點 $(-1, 1, 2) \in L \Rightarrow (-1, 1, 2) \in E$

$$E: 10(x+1) - (y-1) - 7(z-2) = 0 \Rightarrow 10x - y - 7z + 25 = 0$$

8. 過點 $(1, -1, 5)$ 且平行於直線 $\begin{cases} 3x - y + z + 2 = 0 \\ x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$ 之直線方程式為 _____。

【解答】 $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{7}$

【詳解】

$$\text{直線 } L: \begin{cases} 3x - y + z + 2 = 0 \\ x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = (3, -1, 1) \\ \vec{n}_2 = (1, 2, 1) \end{cases}$$

$$\text{直線 } L \text{ 方向向量 } \vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-3, -2, 7)$$

$$\text{所求直線方程式為 } \frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{7}$$

9. 若 $P(1, 0, -1), Q(2, 1, -1)$, 則直線 \overrightarrow{PQ} 與 $x + 2y - 3z = 0$ 之交點坐標為 _____。

【解答】 $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -1)$

【詳解】

$$\overrightarrow{PQ}: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 + t \\ z = -1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ 設交點 } A(1+t, t, -1) \text{ 代入 } E: x + 2y - 3z = 0 \Rightarrow t = -\frac{4}{3}$$

\therefore 交點 $A(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -1)$

10. 設 $L: \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{1}$ 與 $M: \frac{x-k}{2} = \frac{y-k}{3} = \frac{z+k}{1}$ 兩直線相交於一點, 若平面 E 包含 L 及 M ,

則(1)平面 E 方程式為 _____。(2) $k =$ _____。

【解答】 (1) $x - y + z = -1$ (2) 1

【詳解】

L 之方向向量 $\vec{\ell}_1 = (4, 5, 1)$, M 方向向量 $\vec{\ell}_2 = (2, 3, 1)$, $\vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2 = (2, -2, 2) = 2(1, -1, 1)$

L 上一點 $(3, 1, -3)$ 在 E 上, $E: (x-3) - (y-1) + (z+3) = 0$, 故平面 E 為 $x - y + z = -1$

設 $P(x, y, z)$ 在 L, M 上 $\therefore \begin{cases} x = 3 + 4t = k + 2s \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y = 1 + 5t = k + 3s \cdots \cdots \textcircled{2} \\ z = -3 + t = -k + s \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 得 $s = t - 2 \cdots \cdots \textcircled{4}$ 代入 $\textcircled{1}$ 得 $k = 2t + 7 \cdots \cdots \textcircled{5}$

$\textcircled{4}, \textcircled{5}$ 代入 $\textcircled{3}$ 得 $t = -3$ 代入 $\textcircled{5}$ 得 $k = 1 \therefore P(-9, -14, -6)$

11. 直線 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-4}$, 說明下列各直線與直線 L 的關係為

(A) 重合 (B) 平行 (C) 相交於一點 (D) 互為歪斜線

(1) 直線 $L_1: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$: _____。 (2) 直線 $L_2: \frac{x+3}{-1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-6}{2}$: _____。

(3) 直線 $L_3: \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} \\ z = 2 \end{cases}$: _____。

【解答】(1) (C) (2) (A) (3) (D)

【詳解】

(1) $L: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 + 2t \\ z = -2 - 4t \end{cases}, L_1: \begin{cases} x = 0 - 2s \\ y = -1 + s \\ z = 0 + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2t = -2s \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2t = -1 + s \cdots \cdots \textcircled{2} \\ -2 - 4t = s \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$

由 $\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow t = \frac{-1}{2}, s = 0$ 代入 $\textcircled{3}$ 合 $\therefore L$ 及 L_1 交於一點

(2) $\vec{v}_2 = (-1, -1, 2) // \vec{v} = (2, 2, -4)$, 且 L_2 上一點 $P(-3, -4, 6) \in L, \therefore L$ 及 L_2 重合

(3)(i) $\vec{v}_3 = (2, 3, 0) \nparallel \vec{v} = (2, 2, -4), \therefore L_3 \nparallel L$

(ii) $L: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = -2 - 4t \end{cases}, L_3: \begin{cases} x = 0 + 2s \\ y = -1 + 3s \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 2s \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2t = -1 + 3s \cdots \cdots \textcircled{2} \\ -2 - 4t = 2 \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$

由 $\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow t = \frac{-1}{2}, s = 0$ 代入 $\textcircled{3}$ 不合 $\therefore L$ 及 L_3 不相交

由 (i), (ii) 可知 L 及 L_3 互為歪斜

12. $\triangle ABC$ 的三頂點坐標為 $A(2, -3, 5), B(3, 0, 10), C(x, y, 0)$, 則當 x, y 之值為 _____ 時, $\triangle ABC$ 之周長最小。

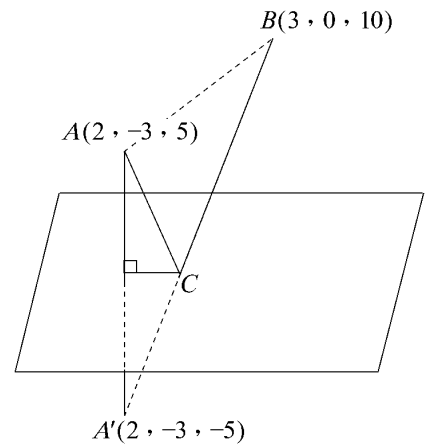
【解答】 $(\frac{7}{3}, -2, 0)$

【詳解】點 C 在 xy 平面上, 且 A, B 在 xy 平面的同側

點 $A(2, -3, 5)$ 與 $A'(2, -3, -5)$ 對稱於 xy 平面, $\overrightarrow{A'B}: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 3t \\ z = -5 + 15t \end{cases}, t \in R$

當點 C 為 $\overline{A'B}$ 與 xy 平面的交點, 使 $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{A'C} + \overline{BC}$ 最小,

當 $z = 0$ 即 $-5 + 15t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$, 代入得 $x = \frac{7}{3}, y = -2$, 故所求之點 C 的坐標為 $(\frac{7}{3}, -2, 0)$



13. 直線 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}$ 在平面 $x+y+az=b$ 上，數對 $(a, b) =$ _____。

【解答】(1, 3)

【詳解】

直線 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}$ 在平面 $x+y+az=b$ 上， $(2, -3, 1) \perp (1, 1, a) \Rightarrow 2 - 3 + a = 0 \Rightarrow a = 1$

點 $(1, -2, 4)$ 在平面上 $\Rightarrow 1 - 2 + 4a = b \Rightarrow 1 - 2 + 4 = b \Rightarrow b = 3$

14. 給定一點 $A(1, 2, 3)$ ，平面 $E: x+y+z=0$ ，

(1) 過 A 點垂直平面 E 的直線參數式為 _____。

(2) A 點在 E 上的正射影坐標為 _____。

(3) A 點對 E 的對稱點坐標為 _____。

【解答】(1) $x=1+t, y=2+t, z=3+t, t \in R$ (2) $(-1, 0, 1)$ (3) $(-3, -2, -1)$

【詳解】

(1) 垂直 $E: x+y+z=0$ 之直線方向向量即為 E 的法線向量 $(1, 1, 1)$ ，直線過 $A(1, 2, 3)$

$$\therefore \text{所求直線參數式為} \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t, t \in R \\ z=3+t \end{cases}$$

(2) 將(1)的參數式代入 E ， $(1+t) + (2+t) + (3+t) = 0 \Rightarrow t = -2$

\therefore 直線與 E 的交點為 $B(-1, 0, 1)$ ，即為 A 在 E 上的正射影

(3) 設 A 對 E 的對稱點 A' ，則 $\overline{AA'}$ 中點 B ，得 $A'(-2-1, 0-2, 2-3) = (-3, -2, -1)$

15. 原點在直線 $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{1}$ 上投影的坐標為 _____，關於直線 L 對稱點坐標為 _____。

【解答】 $(1, -3, 4), (2, -6, 8)$

【詳解】

設原點 O 在 $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{1}$ 上的投影 $A(3+2t, -1+2t, 5+t)$

則 $\overline{OA} \perp L \Rightarrow \overline{OA} \perp (2, 2, 1) \Rightarrow (2, 2, 1) \cdot (3+2t, -1+2t, 5+t) = 0$

$\Rightarrow 2(3+2t) + 2(-1+2t) + (5+t) = 0 \Rightarrow t = -1$

$\therefore A(1, -3, 4)$ ，設 O 的對稱點 $B \Rightarrow A$ 為 \overline{OB} 中點， $\therefore B(2, -6, 8)$

16. 若兩直線 $L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{4} = z-6$ 和 $L_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{3} = z+k$ (其中 $k \in R$) 都在平面 E 上，則 $k =$ _____。

【解答】-8

【詳解】

L_1, L_2 都在平面 E 上，但 $L_1 \not\parallel L_2 \therefore L_1, L_2$ 必相交於一點

$$\text{則} \begin{cases} 1+3t = -1+2s \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 4+4t = 4+3s \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 6+t = -k+s \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}, \text{由} \textcircled{1}\textcircled{2} \Rightarrow t = -6, s = -8, \text{代入} \textcircled{3} \text{得} k = -8$$

17. 設 O - xyz 空間中，兩歪斜線 $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{1}$ 與 $L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ ，

(1) 若平面 E 包含 L_1 而 E 平行 L_2 ，則 E 之方程式為_____。

(2) 二歪斜線 L_1 與 L_2 之距離為_____。

【解答】(1) $x - y - z = 0$ (2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

【詳解】

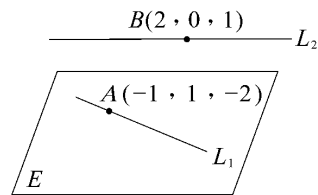
(1) 平面 E 包含 L_1 且 E 平行 L_2 ，故平面 E 之法向量 \vec{n} 與 L_1 及 L_2 之方向向量 $\vec{d}_1 = (2, 1, 1)$ 及 $\vec{d}_2 = (1, -1, 2)$ 均垂直

$$\therefore \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = (3, -3, -3) // (1, -1, -1)$$

取平面 E 之法向量 $\vec{n} = (1, -1, -1)$ ，過 $A(-1, 1, -2)$ ，

$$E: (x+1) - (y-1) - (z+2) = 0, \text{ 即 } E: x - y - z = 0$$

$$(2) d(L_1; L_2) = d(B; E) = \frac{|2 - 0 - 1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



18. 設空間二直線 $\begin{cases} L_1: \frac{x}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+7}{-2} \\ L_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+6}{4} = \frac{z+1}{1} \end{cases}$ ，

(1) 若 L_1 與 L_2 之公垂線與 L_1, L_2 的交點分別為 P, Q ，則 P 坐標為_____。

(2) L_1 與 L_2 之公垂線方程式_____。(對稱比例式)

(3) L_1 與 L_2 間之最短距離為_____。

【解答】(1) $(-3, 1, -1)$ (2) 3

【詳解】

$$(1) L_1: \begin{cases} x = t \\ y = 7 + 2t \\ z = -7 - 2t \end{cases} \text{ 及 } L_2: \begin{cases} x = 5 - 3s \\ y = -6 + 4s \\ z = -1 + s \end{cases} \Rightarrow P(t, 7 + 2t, -7 - 2t), Q(5 - 3s, -6 + 4s, -1 + s)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (5 - 3s - t, -13 + 4s - 2t, 6 + s + 2t)$$

與 L_1 及 L_2 之方向向量 $\vec{d}_1 = (1, 2, -2)$ 及 $\vec{d}_2 = (-3, 4, 1)$ 均垂直

$$\text{則 } \begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d}_1 = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3s - 9t - 33 = 0 \\ 26s - 3t - 61 = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} t = -3 \\ s = 2 \end{cases}, \text{ 即 } P(-3, 1, -1), Q(-1, 2, 1)$$

$$(2) L_1 \text{ 與 } L_2 \text{ 之公垂線 } \overrightarrow{PQ} = (2, 1, 2) \Rightarrow \overrightarrow{PQ}: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$$

$$(3) d(L_1; L_2) = \overline{PQ} = \sqrt{4+1+4} = 3$$