高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：97.11.13
範圍	2-3、4 空間向量、平面	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 兩平面 $2x-y-2z+1=0$，$4x-2y-4z=5$ 的距離為(A) 6 (B) $\frac{7}{6}$ (C) 3 (D) 2 (E) $\frac{1}{2}$

【解答】(B)

【解 1】

$\because$ 兩平行平面 $ax+by+cz+d=0$，$ax+by+cz+e=0$ 距離為 $\frac{|d-e|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\therefore 2x-y-2z+1=0$，$4x-2y-4z=5$ 的距離,，即 $2x-y-2z+1=0$，$2x-y-2z-\frac{5}{2}=0$ 距離

$\therefore \frac{1+\frac{5}{2}}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{7}{6}$ 為所求

2. 已知空間二點 $A(2,0,1)$，$B(-1,1,2)$，線段 $\overline{AB}$ 之垂直平分面方程式為 $ax+by+cz+1=0$，則 $a+b+c$ 之值為(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

【解答】(A)

【詳解】

平面 E 之法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{BA}=(3,-1,-1)$，且過 A，B 之中點 $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

則 E：$3(x-\frac{1}{2})-(y-\frac{1}{2})-(z-\frac{3}{2})=0 \Rightarrow 3x-y-z+\frac{1}{2}=0$

$\Rightarrow 6x-2y-2z+1=0 \quad \therefore \quad a+b+c=6+(-2)+(-2)=2$

3. 兩平面 E_1：$x-y+z=8$，E_2：$x+y+\sqrt{6}z=5$ 的銳夾角 θ 為(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{12}$ (E) $\frac{4\pi}{9}$

【解答】(C)

【詳解】

取平面 E_1 的法線向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,1)$，$E_2$ 的法線向量為 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,\sqrt{6})$

$\because$ E_1，E_2 的銳夾角為 $\theta \Rightarrow \pm\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ 的銳夾角為 θ

$$\Rightarrow \cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=60^\circ=\frac{\pi}{3}$$

二、填充題(每題 10 分)

1. 空間中，設 $A(3,1,-2)$，$B(2,7,0)$，$C(-4,-1,1)$，

(1)△ABC 之重心坐標為＿＿＿＿＿＿。 (2)內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$＿＿＿＿＿＿。

(3)外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=$＿＿＿＿＿＿。 (4)△$ABC$ 的面積為＿＿＿＿＿＿。

(5)線段 $\overline{AB}$ 的垂直平分面方程式為＿＿＿＿＿＿。

(6)通過 A，B，C 三點的平面方程式為＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $(\frac{1}{3}，\frac{7}{3}，-\frac{1}{3})$　　(2) 1　　(3) (22，－11，44)　　(4) $\frac{11}{2}\sqrt{21}$

(5) $2x-12y-4z+39=0$　　(6) $2x-y+4z+3=0$

【詳解】

(1) $\triangle ABC$ 之重心坐標 $(\frac{3+2-4}{3},\frac{1+7-1}{3},\frac{-2+0+1}{3})=(\frac{1}{3}，\frac{7}{3}，-\frac{1}{3})$

(2) $\overrightarrow{AB}=(-1，6，2)$，$\overrightarrow{AC}=(-7，-2，3)$，$\overrightarrow{BC}=(-6，-8，1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\times(-7)+6\times(-2)+2\times3=1$

(3)

$$\begin{array}{cccc} 6 & 2 & -1 & 6 \\ -2 & 3 & -7 & -2 \\ \hline & 22 \quad -11 & 44 & \end{array}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(22，-11，44)$

(4) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{41\cdot62-1}=\frac{11\sqrt{21}}{2}$

(5)線段 $\overline{AB}$ 的垂直平分面 π 之法向量爲 $\overrightarrow{AB}=(-1，6，2)$, $\overline{AB}$ 之中點 $M(\frac{5}{2}，4，-1)$ 在平面 π 上

$\Rightarrow \pi:-(x-\frac{5}{2})+6(y-4)-(z+1)=0\Rightarrow\pi：2x-12y-4z+39=0$

(6)通過 A，B，C 三點的平面 δ 之法向量爲 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(22，-11，44)=11(2,-1,4)$

$\therefore$ A 點在平面 δ 上 $\Rightarrow 2(x-3)-(y-1)+4(z+2)=0\Rightarrow$ ，δ ：$2x-y+4z+3=0$

2. 設 $A(-1，2，3)$，$B(2，6，3)$，$C(-2，4，5)$ 爲空間中的相異三點，E 爲 $\triangle ABC$ 所在的平面，則

(1) $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影爲__________。

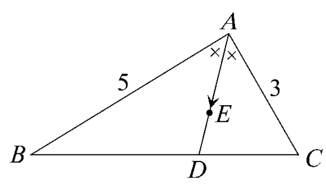
(2)若 $\angle BAC$ 之內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點，設 E 在 $\overleftrightarrow{AD}$ 上，且 $\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則 $\beta=$______。

【解答】(1) $(\frac{3}{5}，\frac{4}{5}，0)$　　(2) $\frac{20}{3}$

【詳解】

(1) $\overrightarrow{AB}=(3，4，0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1，2，2)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3+8+0=5$

$\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影 $=(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|^2})\overrightarrow{AB}=(\frac{5}{25})(3，4，0)=(\frac{3}{5}，\frac{4}{5}，0)$



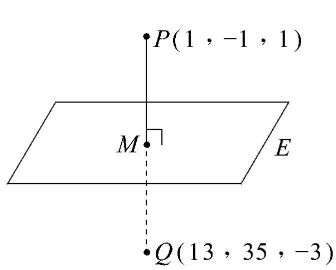
(2) ▱$ABEC$ 中，$\overline{AE}$ 爲 $\angle BAC$ 之角平分線 $\Rightarrow 4|\overrightarrow{AB}|=\beta|\overrightarrow{AC}|$，

$\therefore 4\times\sqrt{3^2+4^2+0^2}=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}\Rightarrow\beta=\frac{20}{3}$

3. 空間中含 $A(1，0，0)$，$B(0，1，0)$，$C(0，0，1)$ 之平面方程式爲________。

【解答】$x+y+z=1$

【詳解】用截距式得 $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1$，即 $x+y+z=1$



4. 點$P(1，-1，1)$對於平面E之對稱點為$Q(13，35，-3)$，則E之方程式為________________。

【解答】$3x+9y-z-175=0$

【詳解】

$\overline{PQ}$之中點$M(7，17，-1)\in E$，$\overrightarrow{PQ}=(12，36，-4)\perp E$，取平面$E$之法向量$\vec{n}=(3，9，-1)$

$\therefore\ E：3(x-7)+9(y-17)-(z+1)=0 \Rightarrow E：3x+9y-z-175=0$

5. 設四點$A(1，6，2)$，$B(3，5，1)$，$C(4，5，0)$，$D(k，4，2)$共平面，則實數$k=$_______。

【解答】3

【詳解】

參閱1.(6)，平面ABC的方程式為$x+y+z=9$

$\because\ A，B，C，D$共平面　$\therefore D(k，4，2)$在平面ABC上，代入，$\therefore k+4+2=9 \Rightarrow k=3$

6. 平面π的y截距為-2，又過點$A(1，0，1)$，$B(-3，4，1)$，則π的z截距為__________。

【解答】$\dfrac{2}{3}$

【詳解】平面π的y截距為-2，即π過點$C(0，-2，0)$，π又過$A(1，0，1)$，$B(-3，4，1)$

參閱1.(6)三點求平面$\Rightarrow \pi：x+y-3z+2=0$，令$x=0$，$y=0$，$\therefore z=\dfrac{2}{3}$，$\therefore \pi$的$z$截距為$\dfrac{2}{3}$

7. 同時垂直於$E_1：x-y+2z+3=0$，$E_2：2x+y+3z+5=0$，且過點$A(2，3，2)$之平面方程式為_______________。

【解答】$5x-y-3z-1=0$

【詳解】

$\overrightarrow{n_1}=(1，-1，2)$，$\overrightarrow{n_2}=(2，1，3) \Rightarrow \overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(-5，1，3)$

$E：5(x-2)-(y-3)-3(z-2)=0 \Rightarrow 5x-y-3z-1=0$

8. $A(1，3，2)$在平面E上之投影點為$B(2，1，0)$，則

(1) 平面E方程式______________________。(2) $C(3，5，1)$到平面E的距離為____________。

【解答】(1) $x-2y-2z=0$　(2) 3

【詳解】

(1) $\overrightarrow{AB}=(1，-2，-2)$，取$\overrightarrow{AB}=\vec{N} \Rightarrow E：(x-2)-2(y-1)-2z=0 \Rightarrow x-2y-2z=0$

(2) $d(C，E)=\dfrac{|3-10-2|}{\sqrt{1+4+4}}=3$

9. 兩平面$2x-y-3z=5$與$3x+2y-z=8$的夾角為__________。

【解答】$\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$

【詳解】$\cos\theta=\pm\dfrac{2\times3+(-1)\times2+(-3)\times(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta=\pm\dfrac{1}{2}$　$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$

10. 設平面$E：x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z=1$，求平面$E$與$xy$平面之銳角的夾角為__________。

【解答】$\dfrac{\pi}{4}$

【詳解】

平面$E：x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z=1$，法向量$\overrightarrow{n_1}=(1，\sqrt{2}，\sqrt{3})$，$xy$平面之法向量$\overrightarrow{n_2}=(0，0，1)$

∴　所夾銳角 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{(1，\sqrt{2}，\sqrt{3})\cdot(0，0，1)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　∴　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

11.兩平面$ax+3y+5z=3$ 與 $2ax-y+az=1$ 互相垂直，則$a=$__________。

【解答】$\dfrac{1}{2}$ 或 -3

【詳解】.兩平面$ax+3y+5z=3$ 與 $2ax-y+az=1$ 互相垂直

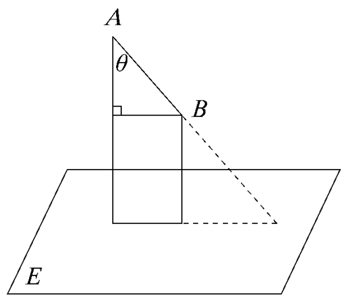
兩平面法向量$(a，3，5)$，$(2a，-1，a)$互相垂直$\Rightarrow a(2a)+3(-1)+5\cdot a=0\quad\Rightarrow 2a^2+5a-3=0$

∴　$(a+3)(2a-1)=0\quad\Rightarrow\quad a=-3$ 或$\dfrac{1}{2}$

12.設$A(5，3，-4)$，$B(3，4，-2)$，平面E：$2x+y-2z=3$，

(1) $\overline{AB}$ 在平面E上的正射影長為__________。

(2)若直線AB與平面E交於P點，則 $\overline{PA}$：$\overline{PB}=$ __________。



【解答】(1) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　(2) 18：11

【詳解】

$A(5，3，-4)$，$B(3，4，-2)$，平面 E：$2x+y-2z=3$

(1) $\overrightarrow{AB}=(-2，1，2)$，平面 E 的法向量$\vec{n}=(2，1，-2)$

$\overrightarrow{AB}$與$\vec{n}$夾角$\theta\quad\Rightarrow\quad\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{|-4+1-4|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}}=\dfrac{7}{9}\quad\Rightarrow\quad\sin\theta=\sqrt{1-(\dfrac{7}{9})^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

∴　正射影長 $=\overline{AB}\times\sin\theta=\sqrt{9}\times\dfrac{4\sqrt{2}}{9}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

(2) $\overline{PA}$：$\overline{PB}=d(A，E)$：$d(B，E)=\dfrac{|10+3+8-3|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}$：$\dfrac{|6+4+4-3|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=18$：$11$

13.過$A(1，2，3)$，$B(4，1，2)$兩點，且與平面E：$3x-2y+z=4$ 垂直之平面方程式為________。

【解答】$x+2y+z=8$

【詳解】

$\overrightarrow{AB}=(3，-1，-1)$，$E$ 的法向量$\vec{n}=(3，-2，1)$

$\vec{n}\times\overrightarrow{AB}=(3，6，3)$　∴　平面 F 過 A 點 $3(x-1)+6(y-2)+3(z-3)=0\Rightarrow x+2y+z=8$

14.求過點$A(1，1，-1)$，且與兩平面 $2x+y-3z+97=0$，$x-4y+2z+2008=0$ 皆垂直的平面方程式為______________________。

【解答】$10x+7y+9z-8=0$

【詳解】兩平面之法向量分別為$\overrightarrow{n_1}=(2，1，-3)$，$\overrightarrow{n_2}=(1，-4，2)$

$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(\begin{vmatrix}1&-3\\-4&2\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}-3&2\\2&1\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}2&1\\1&-4\end{vmatrix})=(-10，-7，-9)$

所求平面法向量取$\vec{n}=(10，7，9)$，又過 $A(1，1，-1)$

則所求為 $10(x-1)+7(y-1)+9(z+1)=0$，得 $10x+7y+9z-8=0$

15.設過點$A(1，0，0)$，$B(0，0，\frac{1}{3})$的平面E與平面F：$x+z=\frac{1}{2}$的銳夾角爲 45°，則E的方程式爲________________________。

【解答】$x\pm\sqrt{6}y+3z=1$

【詳解】∵　平面E過點$A(1，0，0)$，$B(0，0，\frac{1}{3})$　∴　E的x截距爲 1，z截距爲$\frac{1}{3}$

設E：$\frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{\frac{1}{3}}=1$　∴　E的法線向量爲$\overrightarrow{n_1}=(1，\frac{1}{b}，3)$

而F：$x+z=\frac{1}{2}$的法線向量爲$\overrightarrow{n_2}=(1，0，1)$

$\cos 45°=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$　$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{10+\frac{1}{b^2}}\cdot\sqrt{2}}$　$\Rightarrow b^2=\frac{1}{6}$　$\Rightarrow b=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$，$\therefore E$：$x\pm\sqrt{6}y+3z=1$

16.若平面E：$2x+y+2z+13=0$ 與平面F：$x+y-7=0$ 之夾角爲θ，則$\sin\theta=$ __________。

【解答】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【詳解】∵　平面 E：$2x+y+2z+13=0$ 之法向量$\overrightarrow{n_1}=(2，1，2)$

平面 F：$x+y-7=0$ 之法向量$\overrightarrow{n_2}=(1，1，0)$

$\therefore E$、F 夾角θ 即是$\overrightarrow{n_1}$ 與$\overrightarrow{n_2}$ 夾角θ 、$\pi-\theta$

$\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\pm\frac{2+1+0}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{1+1+0}}=\pm\frac{3}{3\sqrt{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，　$\therefore\sin\theta$

$=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

17.設$A(1，2，3)$，$B(1，4，2)$，$C(4，0，3)$，O爲原點，

(1)若$ABCD$爲平行四邊形，則D點坐標爲__________。(2)四面體$OABC$的體積爲__________。

【解答】(1) $(4，-2，4)$　　(2)$\frac{13}{3}$

【詳解】$A(1，2，3)$，$B(1，4，2)$，$C(4，0，3)$

(1) $ABCD$ 爲平行四邊形，設 $D(x，y，z)\Rightarrow(x+1，y+4，z+2)=(1+4，2+0，3+3)$

∴　$(x，y，z)=(4，-2，4)$

(2) $\overrightarrow{AB}=(0，2，-1)$，$\overrightarrow{AC}=(3，-2，0)$

$\triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(2^2+1^2)(3^2+2^2)-(-4)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{49}=\frac{7}{2}$

平面 ABC 法向量$\vec{n}\Rightarrow$　$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$，$\therefore\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2,3,6)$

∴　平面 ABC 方程式爲 $2(x-1)+3(y-2)+6(z-3)=0$，即 $2x+3y+6z-26=0$

四面體 $OABC$ 體積 $=\frac{1}{3}\times\Delta ABC\times d=\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}\times\frac{|0+0+0-26|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{13}{3}=\frac{1}{6}\times2\times13=\frac{13}{3}$

18.若$R(x，y，z)$是平面 $3x-2y+4z+18=0$ 上任一點，則$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2$的最小值是__________，此時R點的坐標是__________。

【解答】29，$(-2，0，-3)$

【詳解】

利用柯西不等式知$(3x-2y+4z-11)^2 \le [(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2][3^2+(-2)^2+4^2]$

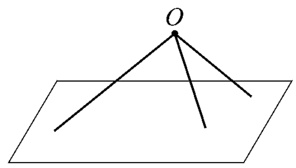
$\Rightarrow\ (-18-11)^2 \le [(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2]\times 29$

$\Rightarrow\ 29 \le (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2$

故最小値爲 29，此時設$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{4}=t$，則$x=1+3t$，$y=-2-2t$，$z=1+4t$

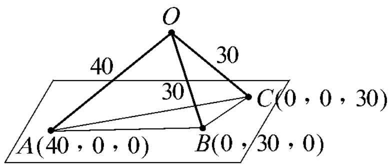
代入 $3x-2y+4z+18=0$，得$t=-1$　$\therefore R(-2，0，-3)$

19.阿草上工藝課時，用鐵條焊接了一個三隻腳都互相垂直的三腳架，若將此腳架放在水平地面上，使每一隻腳的底端都在地面上，如圖所示。已知三隻腳的長分別爲 30 公分，40 公分，30 公分，則頂端O點到地面的距離爲__________公分。



【解答】$\dfrac{120\sqrt{41}}{41}$

【詳解】



$\because$　三隻腳兩兩互相垂直，建立空間坐標系

$\therefore$　令$\overleftrightarrow{OA}$，$\overleftrightarrow{OB}$，$\overleftrightarrow{OC}$分別爲x軸，y軸，軸之正向

則平面E_{ABC}：$\dfrac{x}{40}+\dfrac{y}{30}+\dfrac{z}{30}=1\ \Rightarrow\ E_{ABC}：3x+4y+4z-120=0$

所求 $=d(O；E_{ABC})=\dfrac{|0+0+0-120|}{\sqrt{9+16+16}}=\dfrac{120\sqrt{41}}{41}$

20.空間中$A(1，0，0)$，$B(1，3，4)$，C在z軸正向上，如果過A，B，C三點的平面與yz平面所夾的銳角爲 45°，則C點坐標爲__________。

【解答】$(0，0，\dfrac{5}{3})$

【詳解】

設$C(0，0，c)$，$c>0$，$\overrightarrow{AB}=(0，3，4)$，$\overrightarrow{AC}=(-1，0，c)$

$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(3c，-4，3)$爲$E_{ABC}$之法向量，而$E_{yz}$之法向量爲$\overrightarrow{n_2}=(1，0，0)$

$\cos 45^\circ=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{|3c|}{\sqrt{9c^2+25}\times 1}$

$\Rightarrow\ 9c^2+25=18c^2$，$c=\dfrac{5}{3}$及$-\dfrac{5}{3}$（不合，$c>0$）　$\therefore\ C(0，0，\dfrac{5}{3})$

21.在空間中，已知平面E通過$(1，0，0)$，$(0，-1，0)$及正z軸上一點$(0，0，a)$，如果平面E與xy平面的夾角成 45 度，則$a=$__________。

【解答】$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

【詳解】

$\begin{cases} E: \dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{a}=1 \\ E_{xy}: z=0 \end{cases}$ 之法向量分別爲 $\begin{cases} \overrightarrow{n_1}=(1,-1,\dfrac{1}{a}) \\ \overrightarrow{n_2}=(0,0,1) \end{cases}$

$\cos45^\circ=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{|\frac{1}{a}|}{\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}\times1} \Rightarrow \sqrt{2+\dfrac{1}{a^2}}=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{|a|}$

兩邊平方，$2+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{2}{a^2} \Rightarrow \dfrac{1}{a^2}=2$，得 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$（不合 $\because$ $a>0$）

22.垂直於xy平面，且過點$A(2，-1，0)$與$B(3，0，5)$的平面爲__________。

【解答】$x-y-3=0$

【詳解】

xy 平面：$z=0$，法向量$(0，0，1)=\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{AB}=(1，1，5)$

所求平面之法向量爲 $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{AB}=(\begin{vmatrix}0&1\\1&5\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}1&0\\5&1\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix})=(-1，1，0)$

$\therefore$ 所求方程式：$-1\cdot(x-2)+1\cdot(y+1)+0\cdot(z-0)=0 \Rightarrow x-y-3=0$

23.平面E包含兩平面 $2x+y-4=0$ 及$y+2z=0$ 之交線，且垂直平面 $3x+2y-3z-6=0$，則E之方程式爲__________。

【解答】$2x+3y+4z-4=0$

【詳解】平面族

設 E：$(2x+y-4)+k(y+2z)=0\cdots\cdots(*)$

$\Rightarrow$ E：$2x+(k+1)y+2kz-4=0$，法向量$\vec{n}=(2，k+1，2k)$

而 E'：$3x+2y-3z-6=0$ 之法向量 $\overrightarrow{n'}=(3，2，-3)$

$\because$ $E\perp E'$ $\therefore$ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{n'}=6+2k+2-6k=0 \Rightarrow k=2$ 代入$(*)\Rightarrow$ E：$2x+3y+4z-4=0$

24.設O- xyz空間中，$A(1，1，1)$，$B(2，-1，1)$，$C(1，3，-1)$，則$\triangle ABC$之垂心的坐標爲__________。

【解答】$(-1，2，4)$

【詳解】設$\triangle ABC$ 之垂心坐標爲 $H(a，b，c)$，則

$\begin{cases} \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC} \\ H\in E_{ABC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1,b-1,c-1)\cdot(-1,4,-2)=0 \\ (a-2,b+1,c-1)\cdot(0,2,-2)=0 \\ 2a+b+c-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=4 \end{cases}$，$\therefore$垂心 $H(-1，2，4)$

25.平面 $2x+3y+6z=12$，交x，y，z軸於點A，B，C，則$\triangle ABC$在平面 $2x-2y+z=1$ 上正射影的面積 $=$__________。

【解答】$\dfrac{8}{3}$

【詳解】

平面 $2x+3y+6z=12$ 與 x，y，z 軸交點分別爲 $A(6，0，0)$，$B(0，4，0)$，$C(0，0，2)$

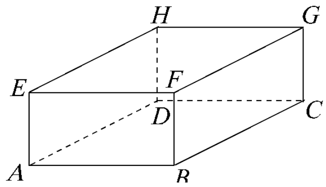
$\overrightarrow{AB}=(-6，4，0)$，$\overrightarrow{AC}=(-6，0，2)$

$\Rightarrow$ $\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{784}=\dfrac{28}{2}=14$

$2x+3y+6z=12$ 與 $2x-2y+z=1$ 所夾銳角$\theta\Rightarrow$ $\cos\theta=\dfrac{|(2，3，6)\cdot(2，-2，1)|}{\sqrt{4+9+36}\cdot\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{4}{3\times 7}=\dfrac{4}{21}$

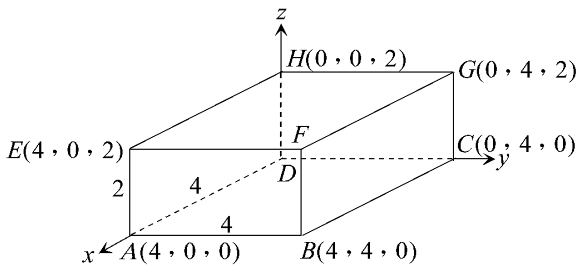
$\triangle ABC$ 在 $2x-2y+z=1$ 上正射影的面積爲$(\triangle ABC)\cos\theta=14\times\dfrac{4}{21}=\dfrac{8}{3}$

26.有一長方體$ABCD$ - $EFGH$（如下圖），已知$\overline{AB}=4$，$\overline{AE}=2$，$\overline{AD}=4$，若此長方體的兩條對角線$\overline{EC}$與$\overline{AG}$的銳夾角爲θ，則$\cos\theta$=______，平面ACH與平面ABC的銳夾角爲α，則$\cos\alpha$=________。



【解答】(1)$\dfrac{7}{9}$　(2)$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

【詳解】如圖，建立空間坐標系



(1) $\overrightarrow{EC}=(-4，4，-2)$，$|\overrightarrow{EC}|=6$；

$\overrightarrow{AG}=(-4，4，2)$，$|\overrightarrow{AG}|=6$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AG}}{|\overrightarrow{EC}|\cdot|\overrightarrow{AG}|}=\frac{16+16-4}{6\times 6}=\frac{7}{9}$$

(2) E_{ACH}：$\begin{cases}\overrightarrow{AC}=(-4，4，0)\\ \overrightarrow{AH}=(-4，0，2)\end{cases}$ $\Rightarrow\left(\begin{vmatrix}4&0\\0&2\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}0&-4\\2&-4\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}-4&4\\-4&0\end{vmatrix}\right)$ 取法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1，1，2)$

E_{ABC}：$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(0，4，0)\\ \overrightarrow{AC}=(-4，4，0)\end{cases}$ $\Rightarrow\left(\begin{vmatrix}4&0\\4&0\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}0&0\\0&-4\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}0&4\\-4&4\end{vmatrix}\right)$ 取法向量 $\overrightarrow{n_2}=16(0，0，1)$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{0+0+2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

27.求過$A(1，0，0)$，$B(0，0，1)$且與平面$x+z=0$夾$\dfrac{\pi}{4}$之平面方程式爲__________。

【解答】$x\pm\sqrt{2}y+z=1$

【詳解】

平面 E：$x+z=0$ 之法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1，0，1)$，$\overrightarrow{AB}=(-1，0，1)$

設所求過 A，B 兩點且與 E 夾角$\dfrac{\pi}{4}$之平面爲 F，其法向量 $\overrightarrow{n_2}=(a，b，c)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{n_1}=|\overrightarrow{n_2}|\cdot|\overrightarrow{n_1}|\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+c=0\cdots\cdots ①\\ (a+c)^2=a^2+b^2+c^2\cdots\cdots ②\end{cases}$$

①代入②得 $b=\pm\sqrt{2}a$　$\Rightarrow$　$(a，b，c)=(a，\pm\sqrt{2}a，a)=a(1，\pm\sqrt{2}，1)$

$\therefore$　F：$x\pm\sqrt{2}y+z=1$

28.設一平面E平行平面 $2x+y+2z-1=0$ 且與三坐標平面所成四面體之體積爲 9，則此平面E的方程式爲__________。

【解答】$2x+y+2z=\pm 6$

【詳解】

$\because$ 平面E與平面 $2x+y+2z-1=0$ 平行　令平面E的方程式爲 $2x+y+2z=k$，

則平面E與三軸分別交於 $(\frac{k}{2},0,0);(0,k,);(0,0,\frac{k}{2})$

$\therefore$ E與三坐標平面所圍成的四面體體積 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times|\frac{k}{2}\times k|\times|k|=\frac{1}{6}|\frac{k}{2}\cdot k\cdot\frac{k}{2}|=\frac{1}{24}|k^3|$

$\therefore$ $\frac{1}{24}|k|^3=9 \Rightarrow |k|^3=6^3 \quad \therefore |k|=6 \Rightarrow k=\pm 6$

故平面E的方程式爲 $2x+y+2z=\pm 6$