高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：97.11.05					
範圍	2-2、3 空間坐標(2)、空間向量	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 在空間中，設三角形 ABC 的三頂點 $A(1，1，1)$，$B(1，2，3)$，$C(3，3，0)$，若$\triangle ABC$ 在 xy 平面上之正射影爲$\triangle A'B'C'$，則

(1)$\triangle ABC$ 爲　(A)直角　(B)銳角　(C)鈍角　(D)等腰直角　(E)正　三角形

(2)$\triangle A'B'C'$ 爲　(A)直角　(B)銳角　(C)鈍角　(D)等腰直角　(E)正　三角形

【解答】(1) (A)　(2) (C)

【詳解】

$\because$ $A(1，1，1)$，$B(1，2，3)$，$C(3，3，0)$

$\therefore$ $A'(1，1，0)$，$B'(1，2，0)$，$C'(3，3，0)$

(1)$\because$ $\overline{AB}=\sqrt{0+1+4}=\sqrt{5}$，$\overline{AC}=\sqrt{4+4+1}=3$，$\overline{BC}=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$

$\therefore$ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ $\Rightarrow$ $\triangle ABC$ 爲直角三角形，但不是等腰三角形

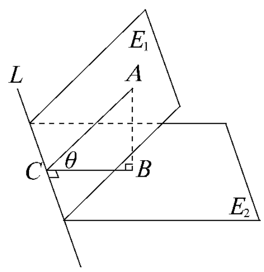
(2)$\because$ $\overline{A'B'}=\sqrt{0+1+0}=1$，$\overline{A'C'}=\sqrt{4+4+0}=2\sqrt{2}$，$\overline{B'C'}=\sqrt{4+1+0}=\sqrt{5}$

$\therefore$ $\overline{A'B'}^2+\overline{B'C'}^2=1+5=6<8=\overline{A'C'}^2$ $\Rightarrow$ $\triangle A'B'C'$爲鈍角三角形

2. 設兩平面E_1，E_2交於一直線L，平面E_1有一點A，A在平面E_2之正射影點B，自B作L的垂直線垂足爲C，若$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=12$，則

(1) $\overline{BC}$ =(A) $3\sqrt{3}$　(B) $4\sqrt{3}$　(C) $5\sqrt{3}$　(D) $6\sqrt{3}$　(E) $7\sqrt{3}$

(2)兩平面之銳交角爲(A) 15°　(B) 30°　(C) 45°　(D) 60°　(E) 75°



【解答】(1) (D)　(2) (B)

【詳解】

(1)$\because$ $\overline{AB}\perp E_2$ $\therefore$ $\overline{AB}\perp\overline{BC}$

$\Rightarrow$ $\angle ABC=90°$，由畢氏定理：$\overline{BC}^2+\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$

$\because$ $\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=12$ $\therefore$ $\overline{BC}^2=12^2-6^2=108$ $\Rightarrow$ $\overline{AB}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$

(2)$\because$ $\overline{AB}\perp E_2$，$\overline{BC}\perp L$於C $\therefore$ 由三垂線定理知$\overline{AC}\perp L$於C

$\Rightarrow$ $\angle ACB$爲此二面角的平面角，設爲θ，則$\sin\theta=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore$ $\theta=30°$

3. 空間一點 $P(1，-2，3)$ (每小題 5 分)

(1) P 點到 xy 平面的距離爲(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D)$\sqrt{5}$　(E)$\sqrt{13}$

(2) P 點到 yz 平面的距離爲(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D)$\sqrt{5}$　(E)$\sqrt{13}$

(3) P 點到 x 軸的距離爲(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D)$\sqrt{5}$　(E)$\sqrt{13}$

(4) P 點到 z 軸的距離爲(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D)$\sqrt{5}$　(E)$\sqrt{13}$

【解答】(1) (C)　(2) (A)　(3) (E)　(4) (D)

【詳解】

$P(a，b，c)=P(1，-2，3)$，P 到 xy 平面的距離 $=|c|=3$，P 到 yz 平面的距離 $=|a|=1$

P 到 x 軸的距離 $=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$，$P$ 到 z 軸的距離 $=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

4. (複選)空間中三點 A，B，C，下列何者使 A，B，C 三點共線？

(A) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$　(B) $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$　(C) $2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

(D) $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$　(E) $\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

【解答】(A)(C)(E)

【詳解】

(A) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$　∴　A，B，C 共線

(B) $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

∵　$-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}\neq 1$　∴　A，B，C 不共線

(C) $2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$　∴　A，B，C 共線

(D) $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{2}\overrightarrow{OB}$

∵　$\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{5}{2}\neq 1$　∴　A，B，C 不共線

(E) $\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$　∵　$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$　∴　A，B，C 共線

【PS】設 A，B，C 為空間中三點，O 為任一點，

(1)若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，則 A，B，C 共線　$\Leftrightarrow$　$x+y=1$

(2)若 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，則 A，B，C 共線　$\Leftrightarrow$　$x+y+z=0$

5. (複選)設 $A(6，-4，4)$，$B(2，1，2)$，$C(3，-1，4)$，則下列敘述何者正確？

(A) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$　(B) $\cos\angle ABC=-\frac{1}{\sqrt{5}}$　(C) $\sin\angle ABC=\frac{2}{\sqrt{5}}$

(D) A 到 $\overleftrightarrow{BC}$ 的距離為 3　(E) $\triangle ABC$ 面積 $=\frac{9}{2}$

【解答】(A)(D)(E)

【詳解】

$\overrightarrow{BA}=(4，-5，2)$，$\overrightarrow{BC}=(1，-2，2)$

(A) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(4，-5，2)\cdot(1，-2，2)=4+10+4=18$

(B) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overline{BA}\cdot\overline{BC}\cos\angle ABC \Rightarrow \cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}=\frac{18}{3\sqrt{5}\cdot 3}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

(C) $\sin\angle ABC=\frac{1}{\sqrt{5}}$

(D)(E) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{\overline{BA}^2\times\overline{BC}^2-(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{45\times 9-18^2}=\frac{9}{2}$

而 $\triangle ABC=\frac{1}{2}(\overline{BC})$ (A 到 $\overleftrightarrow{BC}$ 的距離) $=\frac{9}{2}$　$\Rightarrow$　A 到 $\overleftrightarrow{BC}$ 的距離 $=3$

二、填充題(每題 10 分)

1. 設$P(2,1,7)$，$Q(3,a,5)$，$R(4,5,b)$三點共線，則數對$(a,b)=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$(3,3)$

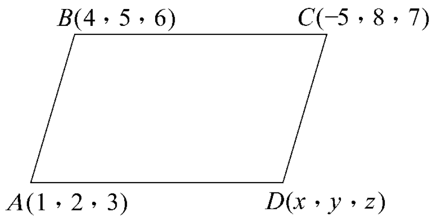
【詳解】$P(2,1,7)$，$Q(3,a,5)$，$R(4,5,b)\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(3-2,a-1,5-7),\overrightarrow{PR}=(4-2,5-1,b-7)$

P，Q，R 三點共線$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}//\overrightarrow{PR}$，即$\dfrac{3-2}{4-2}=\dfrac{a-1}{5-1}=\dfrac{5-7}{b-7}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{a-1}{4}=\dfrac{-2}{b-7}=\dfrac{1}{2}$，$a=3$，$b=3$

2. 已知平行四邊形三頂點，$A(1,2,3)$，$B(4,5,6)$，$C(-5,8,7)$，則D之坐標爲＿＿＿＿＿。

【解答】$(-8,5,4)$；$(10,-1,2)$；$(-2,11,10)$；

【詳解】



如圖，$\square ABCD\Rightarrow (1-5,2+8,3+7)=(x+4,y+5,z+6)$，

則 $D(x,y,z)=(-8,5,4)$

同理$\square ACBD\Rightarrow D(x,y,z)=(10,-1,2)$

$\square ABDC\Rightarrow D(x,y,z)=(-2,11,10)$

3. 設$A(1,-3,5)$與$B(2,1,-4)$是空間中兩點，P是x軸上一點，求$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$的最小值爲＿＿＿

【解答】$\dfrac{103}{2}$

【詳解】$\because\ P\in x$軸 $\therefore$ 設$P(t,0,0)$

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=[(t-1)^2+(-3)^2+5^2]+[(t-2)^2+1^2+(-4)^2]=2t^2-6t+56=2(t-\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{103}{2}$

當$t=\dfrac{3}{2}$時，$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$有最小値爲$\dfrac{103}{2}$

4. 第一卦限中的點$P(x,y,z)$至x軸，y軸，z軸的距離分別爲 2，$\sqrt{6}$，$\sqrt{6}$，則點$P(x,y,z)$的坐標爲＿＿＿＿＿。

【解答】$(2,\sqrt{2},\sqrt{2})$

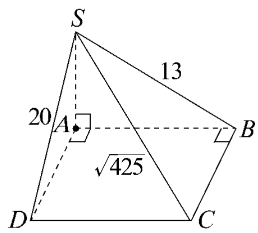
【詳解】

$P(x,y,z)$投影至x，y，z軸之投影點坐標爲$P_x=(x,0,0)$，$P_y=(0,y,0)$，$P_z=(0,0,z)$

已知$\begin{cases}\overline{PP_x}=2\\ \overline{PP_y}=\sqrt{6}\\ \overline{PP_z}=\sqrt{6}\end{cases}$，$\begin{cases}y^2+z^2=4\cdots\cdots①\\ x^2+z^2=6\cdots\cdots②\\ x^2+y^2=6\cdots\cdots③\end{cases}$，由$\dfrac{①+②+③}{2}\quad\Rightarrow\quad x^2+y^2+z^2=8\ \cdots\cdots④$

④−①得$x^2=4$，④−②得$y^2=2$，④−③得$z^2=2$ $\therefore$ $\begin{cases}x=2\\ y=\sqrt{2}\\ z=\sqrt{2}\end{cases}$ $\because P$在第一卦限$P(2,\sqrt{2},\sqrt{2})$

5. 四角錐S - $ABCD$的底面$ABCD$爲矩形，側稜$\overline{SA}$垂直於底面$ABCD$且$\overline{SB}=13$，$\overline{SC}=\sqrt{425}$，$\overline{SD}=20$，則矩形$ABCD$面積爲＿＿＿＿＿平方單位。



【解答】80

【詳解】

$\overleftrightarrow{SA}$垂直平面 $ABCD$ 於 A，$\overleftrightarrow{AB}\perp\overleftrightarrow{BC}$，由三垂線定理可得$\angle SBC=90°$

$\therefore$ 於直角$\triangle SBC$ 中，$\overline{BC}=\sqrt{\overline{SC}^2-\overline{SB}^2}=16$

$\overleftrightarrow{SA}$垂直平面 $ABCD$ 於 A，$\overleftrightarrow{AD}\perp\overleftrightarrow{CD}$，由三垂線定理可得$\angle SDC=90°$

$\therefore$ 於直角$\triangle SDC$ 中，$\overline{CD}=\sqrt{\overline{SC}^2-\overline{SD}^2}=5$，矩形 $ABCD$ 的面積 $=16\times5=80$

6. 已知點P的x，y，z坐標都相等，且P點與原點的距離爲$\sqrt{6}$，求P點的坐標爲__________。

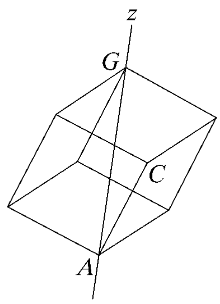
【解答】$(\sqrt{2}，\sqrt{2}，\sqrt{2})$或$(-\sqrt{2}，-\sqrt{2}，-\sqrt{2})$

【詳解】

設$P(x，y，z)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x=y=z & \cdots\cdots① \\ x^2+y^2+z^2=(\sqrt{6})^2=6 & \cdots\cdots② \end{cases}$

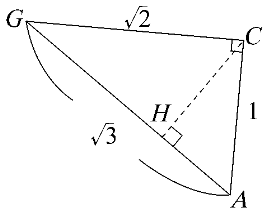
將①代入②$3x^2=6\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$，$\therefore y=z=\pm\sqrt{2}$，故$P(\sqrt{2}，\sqrt{2}，\sqrt{2})$或$(-\sqrt{2}，-\sqrt{2}，-\sqrt{2})$

7. 如下圖，有一邊長爲 1 的正立方體，今置頂點A於空間坐標系中的原點(0，0，0)，置頂點G於正z軸上，則頂點C之z坐標爲__________。



【解答】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【詳解】



C 點之 z 坐標即爲$\overline{AH}$長

直角ΔAGC 中，$\overline{CH}\perp\overline{AG}$，母子相似

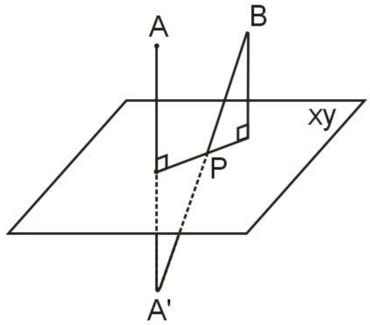
$\overline{AC}^2=\overline{AH}\times\overline{AG}\Rightarrow 1^2=\overline{AH}\times\sqrt{3}$

$\overline{AH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore$ C 點之 z 坐標爲$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

8. 設點$A(3，4，5)$，$B(-1，2，1)$，而點P在xy平面上移動，則$\triangle ABP$的最小周長爲________。

【解答】$6+2\sqrt{14}$

【詳解】xy 平面的方程式爲 $z=0$，



$\therefore$ 點 $A(3，4，5)$，$B(-1，2，1)$在 xy 平面的同側

$\because$ $A(3，4，5)$對於 xy 平面的對稱點爲 $A'(3，4，-5)$

$\therefore$ $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA'}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}=2\sqrt{14}$

$\therefore$ $\triangle ABP$ 的周長 $=\overline{AB}+\overline{PA}+\overline{PB}\geq\overline{AB}+2\sqrt{14}=6+2\sqrt{14}$，

$\therefore\triangle ABP$ 的最小周長爲 $6+2\sqrt{14}$

9. 長方體相鄰三邊$\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$的長分別爲 2，4，3，

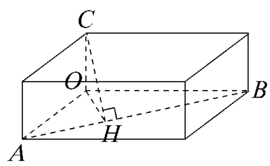
(1)作$\overline{CH}\perp\overline{AB}$於 H，求$\overline{OH}=$_________，與$\overline{CH}=$_________。(2)$\triangle ABC$ 的面積=____________。

(3)點 O 到平面 ABC 的距離=____________。

【解答】(1)$\overline{OH}=\dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{\overline{AB}^2}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$，$\overline{CH}=\sqrt{\overline{OC}^2+\overline{OH}^2}=\sqrt{\dfrac{61}{5}}=\dfrac{\sqrt{305}}{5}$ (2)$\triangle ABC=\sqrt{61}$ (3)$\dfrac{12}{\sqrt{61}}$

【詳解】圖中，(1) $\triangle OAB$ 中，$\angle AOB=90°$，$\overline{OA}=2$，$\overline{OB}=4$

因$\overline{OC}\perp\overline{OA}$，$\overline{OC}\perp\overline{OB}$ $\Rightarrow$ $\overline{OC}\perp$ 平面 OAB



又$\overline{CH}\perp\overline{AB}$，故$\overline{OH}\perp\overline{AB}$（三垂線定理）

$\therefore\quad \frac{1}{2}\overline{OH}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}\Rightarrow\overline{OH}\cdot\frac{2\times4}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{8}{2\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$

又$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CO}^2+\overline{OH}^2}=\sqrt{3^2+\frac{16}{5}}=\sqrt{\frac{61}{5}}=\frac{\sqrt{305}}{5}$

(2) $\triangle ABC$的面積 $=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CH}=\frac{1}{2}\sqrt{20}\cdot\sqrt{\frac{61}{5}}=\sqrt{61}$

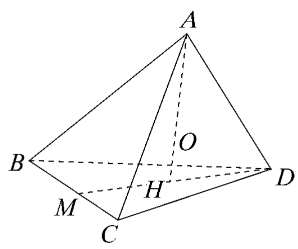
(3)設點O到平面ABC的距離為d，三角錐$OABC$的體積 $=\frac{1}{3}\triangle ABC\cdot d=\frac{1}{3}\triangle OAB\cdot\overline{OC}$

$\therefore\quad \sqrt{61}\,d=\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\cdot3$，故$d=\frac{12}{\sqrt{61}}$

10. 設$ABCD$是邊長a的正四面體（三角錐），則

其體積 = ____________，內切球半徑 = __________ ，外接球半徑 =____________ 。

（錐體體積 $=\frac{1}{3}$底面積 × 高；$R:r=3:1$）



【解答】$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$，$\frac{\sqrt{6}}{12}a$，$\frac{\sqrt{6}}{4}a$

【詳解】

(1)因H為$\triangle BCD$之重心 $\therefore\quad \overline{HD}=\frac{2}{3}\overline{DM}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore\quad \overline{AH}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{HD}^2}=\sqrt{a^2-\frac{1}{3}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a\quad\therefore$ 體積 $=\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2)\cdot(\frac{\sqrt{6}}{3}a)=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

(2)內切球球心O，內切球半徑r， $r=\frac{1}{4}\overline{AH}=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a$

(3)外接球球心即內切球球心，設外接球半徑 $=R=\frac{3}{4}\overline{AH}=\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{6}}{4}a$

11.設二向量$\vec{a}=(1，x-1，2)$，$\vec{b}=(-1，0，3)$

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$的夾角45°，求x的值__________。

(2) 承(1)若$2\vec{a}+t\vec{b}$平分$\vec{a}$，$\vec{b}$之夾角，求實數t的值___________。

【解答】(1) 1 (2)$\sqrt{2}$

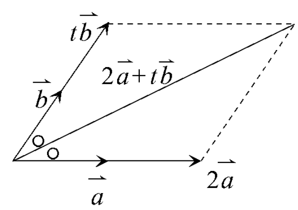
【詳解】

$\vec{a}=(1，x-1，2)$，$\vec{b}=(-1，0，3)$

$|\vec{a}|=\sqrt{1+(x-1)^2+4}=\sqrt{x^2-2x+6}$，$|\vec{b}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1+0+6=5$

(1)由$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos45°$知，$5=\sqrt{x^2-2x+6}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\quad 25=5(x^2-2x+6)\quad\Rightarrow\quad x^2-2x+1=0\quad\Rightarrow\quad x=1$

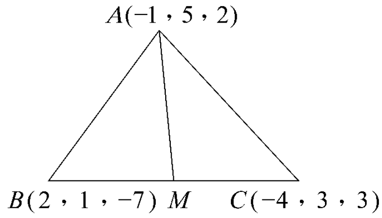


(2)因為 $\vec{a}=(1，0，2)$，$\vec{b}=(-1，0，3)$

$2\vec{a}+t\vec{b}$平分$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角必$|2\vec{a}|=|t\vec{b}|=t|\vec{b}|$

$\sqrt{2^2+0+4^2}=t\sqrt{1^2+0+3^2}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{20}=\sqrt{10}t\quad\Rightarrow\quad t=\sqrt{2}$

12.設△ABC的三頂點坐標分別爲$A(-1，5，2)$，$B(2，1，-7)$，$C(-4，3，3)$，則$\overline{BC}$上的中線長爲__________。



【解答】5

【詳解】

中點 $M(\frac{2+(-4)}{2}，\frac{1+3}{2}，\frac{(-7)+3}{2})=(-1，2，-2)$，

中線長 $\overline{AM}=\sqrt{0^2+3^2+4^2}=5$

13.設 $\overrightarrow{AB}=(1，2，3)$，若$B$之坐標爲$(-1，1，-1)$，則

(1)A之坐標爲__________，(2)若$|\bar{u}|=\sqrt{126}$ 且 $\bar{u}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 反向，則$\bar{u}=$ __________。

【解答】(1) $(-2，-1，-4)$ (2) $(-3，-6，-9)$

【詳解】

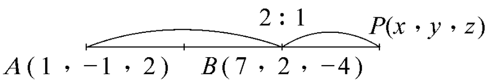
(1)設 $A(x，y，z)$，$\overrightarrow{AB}=(-1-x,1-y,-1-z)=(1,2,3)\Rightarrow$ 即 $A(-2，-1，-4)$

(2) $|\bar{u}|=\sqrt{126}=3|\overrightarrow{AB}|$，又 $\bar{u}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 反向，$\bar{u}=-3\overrightarrow{AB}=-3(1，2，3)=(-3，-6，-9)$

14.已知空間中相異兩點$A(1，-1，2)$，$B(7，2，-4)$，設P點在$\overleftrightarrow{AB}$上，但不在$\overline{AB}$上，且$\overline{AP}：\overline{PB}=3：1$，則$P$點坐標爲__________。

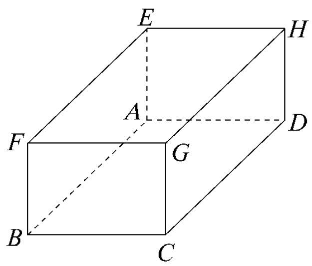
【解答】$(10，\frac{7}{2}，-7)$

【詳解】P 爲外分點



由分點公式 $B(7，2，-4)=(\frac{2x+1}{3}，\frac{2y-1}{3}，\frac{2z+2}{3})$，得 P 點之坐標爲$(10，\frac{7}{2}，-7)$

15.如圖，長方體之長，寬，高各爲 4，5，3，試求$\overline{AG}$與$\overline{FD}$的夾角的度量$\theta=$ __________。



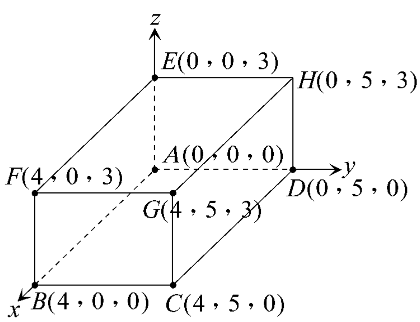
【解答】$\frac{\pi}{2}$

【詳解】坐標化，

$\overrightarrow{AG}=(4，5，3)$，$\overrightarrow{FD}=(-4，5，-3)$

$\cos\theta=\pm\frac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{FD}|}=\pm\frac{-16+25-9}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}}=0$

$\therefore$ $\overline{AG}$與$\overline{FD}$的夾角度量$\theta=\frac{\pi}{2}$



16.空間中有三點 $P(6，-4，4)$，$Q(2，1，2)$，$R(3，-1，4)$，則

(1)△PQR 之面積=____________，

(2) P 點到直線 QR 的最短距離=___________。

【解答】(1) $\dfrac{9}{2}$　(2) 3

【詳解】

$\overrightarrow{QP}=(4，-5，2)$，$\overrightarrow{QR}=(1，-2，2)$

(1) $|\overrightarrow{QP}|=\sqrt{16+25+4}=3\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{QR}|=\sqrt{1+4+4}=3$，$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=4+10+4=18$

$\therefore$　$\triangle QPR$ 之面積$=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{QP}\right|^2\left|\overrightarrow{QR}\right|^2-(\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt{5})^2\cdot 3^2-18^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{81}=\dfrac{9}{2}$

(2)設 P 到 $\overleftrightarrow{QR}$ 之最短距離$=d$，　則$\triangle QPR$ 之面積$=\dfrac{1}{2}\cdot d\cdot\overline{QR}$　$\Rightarrow$　$\dfrac{9}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot d$　$\Rightarrow d=3$

17.設 $\vec{a}=(2，1，3)$，$\vec{b}=(1，-2，4)$，$\vec{c}=(2，5，1)$，已知$(\vec{a}+t\vec{b})\perp\vec{c}$，則實數$t=$__________。

【解答】3

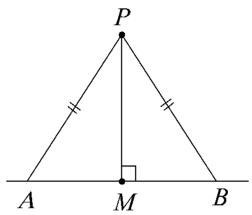
【詳解】

$\vec{a}+t\vec{b}=(2+t，1-2t，3+4t)$，$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{c}=0$　$\Rightarrow$　$2(2+t)+5(1-2t)+(3+4t)=0$　$\Rightarrow$　$t=3$

18.設P是y軸上的點，且P到$A(4，0，3)$，$B(3，2，0)$兩點等距，則P點坐標爲__________。

【解答】$(0，-3，0)$

【詳解】



設 $P(0，y，0)$，$\overline{AB}$ 中點 $M(\dfrac{7}{2}，1，\dfrac{3}{2})$，$\overrightarrow{AB}=(-1，2，-3)$

$\because$　P 到 A，B 兩點等距離　$\therefore$　$\overline{PM}\perp\overline{AB}$

$\Rightarrow$　$(-\dfrac{7}{2}，y-1，-\dfrac{3}{2})\cdot(-1，2，-3)=0$

$\Rightarrow$　$y=-3$　$\therefore$　$P(0，-3，0)$

19.設 $\vec{u}=(2，1，-1)$，$\vec{v}=(1，3，3)$，且 $\vec{a}\perp\vec{u}$，$\vec{a}\perp\vec{v}$，若 $\vec{a}=(-6，p，q)$，則數對$(p，q)=$____。

【解答】$(7，-5)$

【詳解】

$\vec{u}\times\vec{v}=(\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix})=(6，-7，5)$

$\because$　$\vec{a}\perp\vec{u}$，$\vec{a}\perp\vec{v}$　$\therefore$　$\vec{a}=(-6，p，q)//\vec{u}\times\vec{v}=(6，-7，5)$，得$(p，q)=(7，-5)$

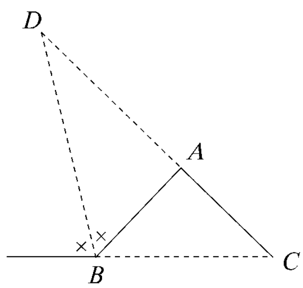
20.設$A(2，-1，5)$，$B(5，4，3)$，$C(-1，3，4)$，則$\triangle ABC$的重心坐標爲_____________。

【解答】$(2，2，4)$

【詳解】

$\triangle ABC$ 的重心坐標爲$(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}，\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}，\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3})$

$=(\dfrac{2+5-1}{3}，\dfrac{-1+4+3}{3}，\dfrac{5+3+4}{3})=(2，2，4)$



21.△ABC中，$A(4，1，3)$，$B(6，3，4)$，$C(3，1，-2)$，$\angle B$之外角平分線交AC於D，則D點坐標爲__________。

【解答】$(\frac{19}{4}，1，\frac{27}{4})$

【詳解】

$A(4，1，3)$，$B(6，3，4)$，$C(3，1，-2)$，$\overline{BA}=3$，$\overline{BC}=7$

∵ D 是$\angle B$ 之外角平分線與直線 AC 之交點 ∴ $\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\frac{3}{7}$

∵ $D，A，C$ 在一直線上，由外分點公式

$D=\frac{7}{7-3}(4，1，3)+\frac{-3}{7-3}(3，1，-2)=(\frac{19}{4}，1，\frac{27}{4})$

22.設三向量$\vec{a}=(1，2，\lambda-1)$，$\vec{b}=(4，1，-\lambda)$，$\vec{c}=(-1，2，\lambda+3)$兩兩互相垂直，則實數λ之值爲__________。

【解答】-2

【詳解】

$\vec{a}\perp\vec{b}$ ⇒ $(1，2，\lambda-1)\cdot(4，1，-\lambda)=0$ ⇒ $\lambda=3$ 或 $\lambda=-2$

$\vec{b}\perp\vec{c}$ ⇒ $(4，1，-\lambda)\cdot(-1，2，\lambda+3)=0$ ⇒ $\lambda=-1$ 或 $\lambda=-2$

$\vec{c}\perp\vec{a}$ ⇒ $(-1，2，\lambda+3)\cdot(1，2，\lambda-1)=0$ ⇒ $\lambda=0$ 或 $\lambda=-2$

同時成立， $\lambda=-2$

23.設$\vec{i}=(1，0，0)$，$\vec{j}=(0，1，0)$，$\vec{k}=(0，0，1)$且$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$，

(1)若$\vec{a}\perp\vec{c}$，則$t=$__________。 (2)若$(2\vec{a}-\vec{b})\,//\,\vec{c}$，則$t=$__________。

(3)當 $|\vec{c}|$ 有最小值時，$t=$__________。

【解答】(1) -3 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{3}{2}$

【詳解】

$\vec{a}=(2，-1，2)$，$\vec{b}=(1，-1，0)$，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(2+t，-1-t，2)$

(1) $\vec{a}\perp\vec{c}$ ⇒ $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ ⇒ $(2，-1，2)\cdot(2+t，-1-t，2)=0$

⇒ $2(2+t)-(-1-t)+4=0$ ⇒ $9+3t=0$ ∴ $t=-3$

(2)∵ $2\vec{a}-\vec{b}=2(2，-1，2)-(1，-1，0)=(4，-2，4)-(1-1，0)=(3，-1，4)$

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(2+t，-1-t，2)$ ∴ $(2\vec{a}-\vec{b})\,//\,\vec{c}$ ⇒ $\frac{2+t}{3}=\frac{-1-t}{-1}=\frac{2}{4}$ ⇒ $t=-\frac{1}{2}$

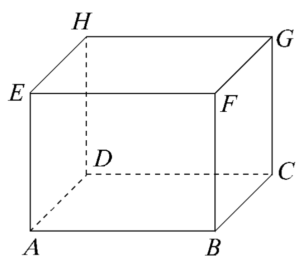
(3)∵ $|\vec{c}|=\sqrt{(2+t)^2+(-1-t)^2+4}=\sqrt{2t^2+6t+9}=\sqrt{2(t+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{2}+9}=\sqrt{2(t+\frac{3}{2})^2+\frac{9}{2}}$

∴ 當 $t=-\frac{3}{2}$ 時，$|\vec{c}|=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 爲最小值

24.如圖，長方體$ABCD$-$EFGH$中，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=2$，$\overline{AE}=3$，則$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CH}$ = __________。

【解答】-7

【詳解】



建立空間坐標系，$D(0，0，0)$，$A(2，0，0)$，$C(0，4，0)$，$H(0，0，3)$

$\therefore\ G(0,4,3)$，$\overrightarrow{AG}=(-2,4,3)$，$\overrightarrow{CH}=(0,-4,3)$

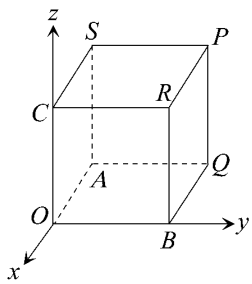
$\therefore\ \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CH}=(-2,4,3)\cdot(0,-4,3)=0-16+9=-7$

25.如下圖所示，正立方體各邊（稜）長爲 1，

(1)點P之坐標爲__________。

(2)對角線 $\overline{AR}$ 與 $\overline{BS}$ 的一個夾角爲θ，$\sin\theta$ 之值爲__________。

(3)點R至平面BCP的距離爲__________。



【解答】(1) $(-1,1,1)$　(2)$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　(3)$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

【詳解】

(1)如圖，$P(-1,1,1)$

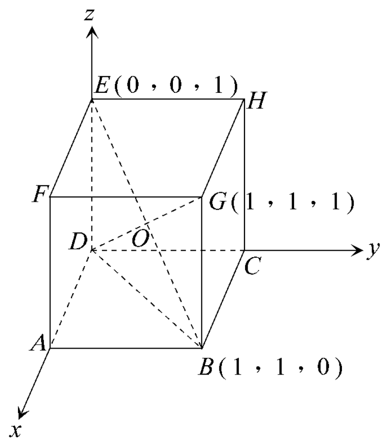
(2)$\vec{a}=\overrightarrow{AR}=(1,1,1)$，$\vec{b}=\overrightarrow{BS}=(-1,-1,1)$，$\vec{c}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{BS}=(2,2,0)$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3+3-8}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{-1}{3}\quad\therefore\quad \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(3) $B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$，$R(0,1,1)$，設平面 BCP 方程式π：$\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{1}=1$

$P(-1,1,1)$代入得 $m=1\ \Rightarrow\ \pi$：$x+y+z-1=0\quad\therefore\quad d(R,\pi)=\dfrac{|0+1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

26.如圖，$ABCD$ - $EFGH$ 是一正方體，四邊形 $EFBG$ 是一矩形，對角線 $\overline{DG}$，$\overline{EB}$ 交於 O 點，求 $\cos\angle BOG$ 及 $\cos\angle BDG$。



【解答】$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

【詳解】

(1) $\overrightarrow{EB}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{DG}=(1,1,1)$，令$\angle BOG=\theta$，則$\theta$爲 $\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{DG}$ 的夾角，$\therefore\quad \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{EB}}{|\overrightarrow{DG}||\overrightarrow{EB}|}=\dfrac{1+1-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$

(2)令$\angle BDG=\phi$，則 $\cos\phi=\dfrac{\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DG}||\overrightarrow{DB}|}=\dfrac{1+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

27.設$\vec{a}=(1,0,2)$，$\vec{b}=(2,-1,1)$，求與$\vec{a}$，$\vec{b}$ 同時垂直且長度$\sqrt{2}$的向量。

【解答】$\pm(\dfrac{2}{\sqrt{7}},\dfrac{3}{\sqrt{7}},\dfrac{-1}{\sqrt{7}})$

【詳解】

$\vec{a}=(1,0,2)$，$\vec{b}=(2,-1,1)$的外積

$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}0&2\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\end{vmatrix}\right)=(2,3,-1)$爲垂直$\vec{a}$與$\vec{b}$ 的一向量

$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$ $\quad\therefore$ 垂直 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的單位向量爲 $\pm\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{14}}(2，3，-1)$

而知垂直 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 且長度 $\sqrt{2}$ 的向量爲 $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}}(2，3，-1)=\pm(\dfrac{2}{\sqrt{7}}，\dfrac{3}{\sqrt{7}}，\dfrac{-1}{\sqrt{7}})$

28.設 $x，y，z\in R$，若 $x^2+y^2+z^2=4$，則 $x-2y+2z$ 之最小值爲________，此時 $(x，y，z)=$ ________。

【解答】$-6，(\dfrac{-2}{3}，\dfrac{4}{3}，\dfrac{-4}{3})$

【詳解】

$(x-2y+2z)^2\le(x^2+y^2+z^2)[1^2+(-2)^2+2^2]=4\cdot 9=36$ $\quad\therefore\quad x-2y+2z$ 最小值爲 -6

此時 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{2}=\dfrac{-6}{1^2+(-2)^2+2^2}=\dfrac{-2}{3}$ $\quad\therefore\quad x=\dfrac{-2}{3}$，$y=\dfrac{4}{3}$，$z=\dfrac{-4}{3}$

29.設空間中有二向量 $\vec{a}=(1，2，3)$，$\vec{b}=(x，y，z)$，已知 $|\vec{b}|=2\sqrt{14}$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最大值爲__________，此時的 $\vec{b}$ 爲___________。

【解答】(1) 28 (2) $\vec{b}=(2，4，6)$

【詳解】已知 $|\vec{b}|^2=x^2+y^2+z^2=(2\sqrt{14})^2=56$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=x+2y+3z$

由柯西不等式知 $(x+2y+3z)^2\le(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+3^2)$ $\Rightarrow$ $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\le 56\times 14$

$\Rightarrow$ $-28\le\vec{a}\cdot\vec{b}\le 28$，得 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 之最大值 $M=28$

此時設 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}=t$，則 $x=t$，$y=2t$，$z=3t$

$28=\vec{a}\cdot\vec{b}=x+2y+3z=t+4t+9t=14t$ $\Rightarrow$ $t=2$，得 $x=2$，$y=4$，$z=6$，即 $\vec{b}=(2，4，6)$

30.設 $a，b，c$ 均爲正數且 $a+b+c=9$，則 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{16}{c}$ 之最小值爲__________。

【解答】9

【詳解】

$(\dfrac{2}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}+\dfrac{3}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}+\dfrac{4}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{c})^2\le[(\dfrac{2}{\sqrt{a}})^2+(\dfrac{3}{\sqrt{b}})^2+(\dfrac{4}{\sqrt{c}})^2][(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2]$

$\Rightarrow$ $(2+3+4)^2\le(\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{16}{c})(a+b+c)$

$\Rightarrow$ $9^2\le(\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{16}{c})\cdot 9$ $\Rightarrow$ $9\le\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{16}{c}$