| 高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：97.10.22 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 2-1 空間基本概念 | 班級 | | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選)二條歪斜線在同一平面的正射影可能是下列的哪一種情形？
(A)兩點　(B)兩條平行線　(C)一直線與線外的一點　(D)一直線　(E)相交的二直線

【解答】(B)(C)(E)

【詳解】

(A)(D)若二條直線在同一平面的正射影為兩點或一直線，則此兩直線平行，不是歪斜線
(B)(C)(E)均可能為二條歪斜線在同一平面的正射影

2. (複選)在空間中，下列敘述何者正確？
(A)任意兩相異平面一定有公垂面　(B)任意兩相異直線一定有公垂線　(C)相交於一點的兩直線可決定唯一平面　(D)兩直線不相交必平行　(E)相異三點可決定唯一平面

【解答】(A)(B)(C)

【詳解】

(A)對　(B)對　(C)對　(D)錯。可能歪斜　(E)錯。不共線之相異三點可決定唯一平面

3. (複選)下列敘述何者正確？
(A)在空間中，一線段的垂直平分線只有一條　(B)任意三點可決定一個平面　(C)設平面$E$與直線$L$相交於$A$點，若平面$E$上有兩條通過$A$點的相異直線均與$L$垂直，則$L \perp E$　(D)在空間中，兩直線$L_1$，$L_2$若不相交，則$L_1 // L_2$　(E)給定一平面$E$及其外一點$P$，有無限多個平面通過$P$點且與$E$垂直

【解答】(C)(E)

【詳解】

(A)錯。無限多條
(B)錯。不共線三點可決定一個平面
(C)直線垂直平面判別定理：若平面 $E$ 上存在兩條通過 $P$ 點的相異直線分別與 $L$ 垂直，則 $L \perp E$
(D)錯。可能歪斜
(E)對。一平面 $E$ 及其外一點 $P$，有無限多個平面過 $P$ 點且與 $E$ 垂直

4. (複選)在空間中，下列敘述何者正確？
(A)過直線外一點恰有一直線垂直於此直線　(B)過直線外一點恰有一直線平行於此直線　(C)過平面外一點恰有一直線垂直於此平面　(D)過平面外一點恰有一直線平行於此平面

【解答】(A)(B)(C)

【詳解】(A)(B)(C)正確　(D)錯誤：過平面外一點，有無限多條直線平行此平面

5. (複選)下列敘述何者正確？
(A)空間中兩平行線決定一平面　(B)平面上兩相異直線，若不相交則必平行　(C)空間中任意三相異點決定一平面　(D)兩歪斜線恰有一條公垂線

【解答】(A)(B)(D)

【詳解】

(A)○：設$L_1 // L_2$，則$L_1$，$L_2$共平面，記為$E_1$，$L_1$與在$L_2$上一點$P$決定唯一平面，記為$E_2$，但$L_1$，

$L_2$共平面　$\therefore$　$E_1 = E_2$，所以兩平行線決定一平面

(B)○：由定義可知

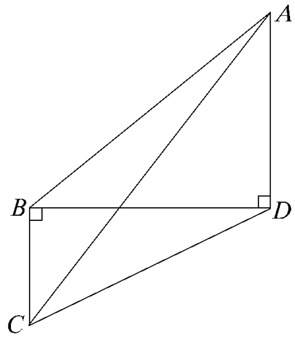
(C)╳：取在同一直線上$A$，$B$，$C$相異三點，它們無法形成一平面

(D)○：

## 二、填充題( 每題 10 分)

1. 如圖，四面體$A$-$BCD$，已知$\overline{BC} \perp \overline{BD}$，$\overline{AD}\perp$平面$BCD$，且$\overline{BC} = 7$，$\overline{AB} = 24$，$\overline{AD} = 15$，(1) $\overline{AC}$ 的長度爲__________。

(2)若平面$ABD$和平面$ACD$所夾二面角的度量爲$\theta$，則$\sin\theta$ 的值爲____。




【解答】(1) 25　(2) $\dfrac{7}{20}$

【詳解】

(1) $\overline{AD}\perp$平面$BCD$　$\Rightarrow$　$\overline{AD}\perp\overline{BD}$，$\overline{AD}\perp\overline{CD}$

已知$\overline{AB} = 24$，$\overline{AD} = 15$　$\therefore$　$\overline{BD}^2 = 24^2 - 15^2 = 351$

又$\overline{BC}\perp\overline{BD}$　$\Rightarrow$　$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 = 351 + 49 = 400$，$\overline{CD} = 20$

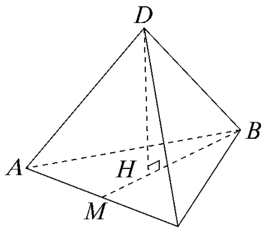
$\therefore$　$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 15^2 + 400 = 25^2$　$\Rightarrow$　$\overline{AC} = 25$

(2) $\overline{AD}\perp\overline{BD}$，$\overline{AD}\perp\overline{CD} \Rightarrow \angle BDC$爲二面角$B$-$AD$-$C$的平面角，即$\sin\theta = \sin(\angle BDC) == \dfrac{7}{20}$

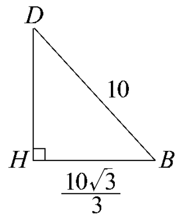
2. 如圖，若 $D$ - $ABC$ 爲一正四面體，邊長爲 10，$\overline{DH}$ 垂直平面 $ABC$ 於 $H$，求下列各題？(1) $\overline{DH} =$_______________

(2)若平面 $ABC$ 與平面 $ADC$ 的夾角爲$\theta$，則 $\cos\theta=$________

(3) $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 的距離爲___________




【解答】(1) $\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$　(2) $\dfrac{1}{3}$　(3) $5\sqrt{2}$




【詳解】

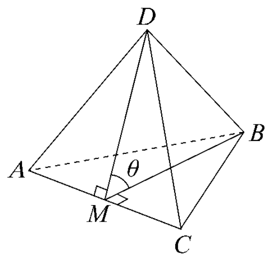
(1) $\overline{BH} = \dfrac{2}{3}\,\overline{BM} = \dfrac{2}{3}\cdot(10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$，於直角△$BDH$ 中，

$$\overline{DH} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{10^2 - (\frac{10\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

(2) 如右圖，$M$ 爲 $\overline{AC}$ 之中點　$\therefore$　$\overline{DM}\perp\overline{AC}$，$\overline{BM}\perp\overline{AC}$

$\therefore$　$\angle DMB$ 即爲平面 $ABC$ 與平面 $ADC$ 之夾角$\theta$，則

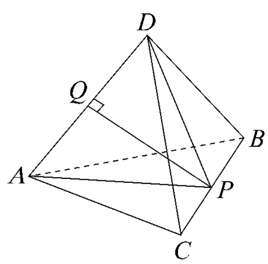
$$\cos\theta = \cos(\angle DMB) = \frac{\overline{BM}^2 + \overline{DM}^2 - \overline{BD}^2}{2\overline{BM}\cdot\overline{DM}} = \frac{(5\sqrt{3})^2 + (5\sqrt{3})^2 - 10^2}{2\cdot 5\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$




(3) 如右下圖，設 $P$，$Q$ 分別爲 $\overline{BC}$ 及 $\overline{AD}$ 之中點

△$APD$ 中，$\because$ $\overline{PD} = \overline{PA}$ 且 $Q$ 爲 $\overline{AD}$ 之中點，$\therefore$　$\overline{PQ}\perp\overline{AD}$，同理$\overline{PQ}\perp\overline{BC}$

故$\overline{AD}$與$\overline{BC}$之距離爲$\overline{PQ}$，即$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PD}^2 - \overline{DQ}^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 - 5^2} = 5\sqrt{2}$

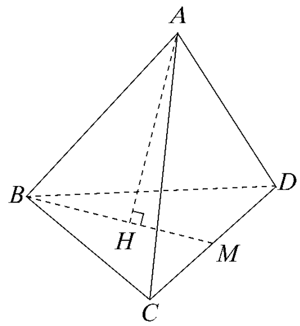



3. 由四個全等正三角形所拼成的立體爲正四面體。設正四面體 $ABCD$ 的各稜長爲 $a$，求此正四面體的高爲_____________及體積________。

【解答】$\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，$\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

【詳解】

正四面體$ABCD$，如右圖




(1)設$M$為$\overline{CD}$的中點，並自$A$作底$BCD$的垂線，其垂足為$H$，則$H$

是△$BCD$的重心，∴ $\overline{BH}=\dfrac{2}{3}\overline{BM}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

故正四面體的高 $\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{a^2-(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

(2)正四面體之體積$V=\dfrac{1}{3}$(底面積)$\times$(高)$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}a=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

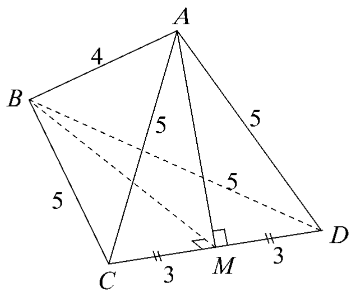
4. 空間中決定一平面的條件有四種：__________，__________，__________，__________。

【解答】(1)不共線的相異三點　(2)一線及不在此線上一點　(3)二相交相異直線　(4)二平行直線

5. 空間中任意二直線的相互關係有四種：_________，___________，_________，_________。

【解答】(1)平行　(2)重合　(3)相交於一點　(4)不共平面（歪斜線）

6. 設四面體$ABCD$中，$\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=5$，$\overline{AB}=4$，$\overline{CD}=6$，若平面$ACD$與平面$BCD$的夾角為$\theta$，則$\sin\theta$ 之值為_________。




【解答】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

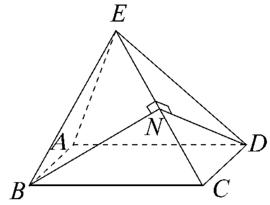
【詳解】

如圖，$M$ 為$\overline{CD}$中點　∴　$\overline{CM}=\overline{MD}=3$

又$\overline{AM}\perp\overline{CD}$，$\overline{BM}\perp\overline{CD}$且$\overline{AC}=\overline{AD}=5$，$\overline{BC}=\overline{BD}=5$，∴ $\overline{AM}=\overline{BM}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

在△$ABM$ 中，$\overline{AB}=\overline{AM}=\overline{BM}=4$(正三角)，∴ $\angle AMB=60°=\theta$，$\sin\theta=\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. 求：一底面為正方形，側面為正三角形的金字塔，其兩側面的夾角之 cos 值__________。




【解答】$-\dfrac{1}{3}$

【詳解】

如圖所示，設稜長 $=a$，則$\overline{BD}=\sqrt{2}a$，取$\overline{EC}$之中點 $N$

∴ $\overline{BN}\perp\overline{CE}$，且$\overline{DN}\perp\overline{CE}$，故 $BCE$ 與 $CDE$ 之二面角即$\angle BND$，且$\overline{BN}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$\overline{DN}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

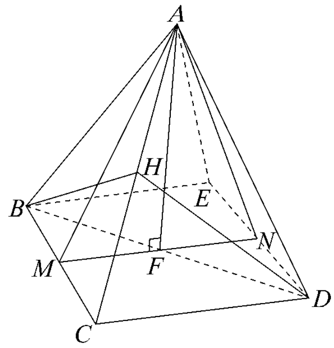
$$故\ \cos\angle BND=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2-(\sqrt{2}a)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{-\frac{1}{2}a^2}{\frac{3}{2}a^2}=-\frac{1}{3}$$

8. 設有一座金字塔，底面為正方形，四個側面皆為正三角形，各邊（稜）長為 1，

(1)設底面與側面的夾角為 $\alpha$，試求 $\cos\alpha$ 之值______________。

(2)設相鄰兩側面的夾角為 $\beta$，試求 $\tan\beta$ 之值______________。（提 示：先求 $\cos\beta$）

(3)試求此金字塔之高________________。




【解答】(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(2) $-2\sqrt{2}$　(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【詳解】

(1) $\overline{MN}=1$，$\overline{AM}=\overline{AN}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \cos\angle AMN=\dfrac{1^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

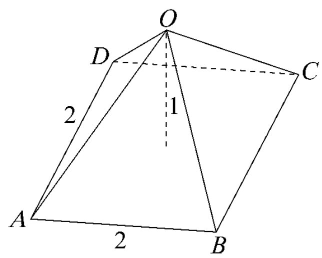
(2) $\overline{BD}=\sqrt{2}$，$\overline{BH}=\overline{DH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \cos(\angle BHD)=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-1}{3},$$

$$\tan\beta=\tan\angle BHD=-\sqrt{\sec^2\beta-1}=-\sqrt{\frac{1}{(-\frac{1}{3})^2}-1}=-2\sqrt{2}$$

(3) $\overline{AF}$ 垂直且平分 $\overline{MN}$，$\therefore$　$\triangle AMF$ 為一直角三角形　$\therefore$　$\overline{AF}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

9. 下圖是一個正四角錐，它的底面是一個邊長為 2 的正方形，此正四角錐的高為 1，則兩相鄰側面的夾角之度數為______________。

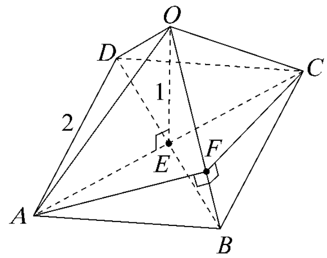



【解答】120°

【詳解】

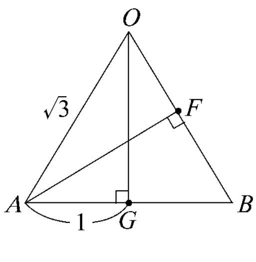
$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=2\sqrt{2}$，則 $\overline{AE}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=\sqrt{2}$ 於直角$\triangle AOE$ 中，

$\overline{AO}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{OE}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$




$F\in\overline{OB}$，使得 $\overline{AF}\perp\overline{OB}$ 且 $\overline{CF}\perp\overline{OB}$，則$\angle AFC$ 即為平面 $AOB$ 與平面 $COB$ 之二面角（即為兩相鄰側面的夾角）

如右圖，$\overline{OG}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{AG}^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$




$\triangle AOB$ 之面積 $=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OG}=\dfrac{1}{2}\overline{OB}\cdot\overline{AF}$

$\Rightarrow \overline{AF}=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{OG}}{\overline{OB}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，同理 $\overline{CF}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

如圖，$\cos(\angle AFC)=\dfrac{(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2+(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\dfrac{-1}{2}$，故夾角 120°