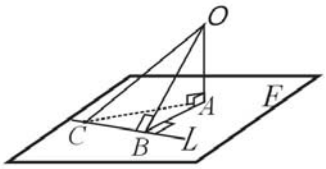
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：97.10.30					
範圍	2-1 空間概念(小張)	班級		姓名	
		座號			

一、填充題



2-1-1. 設點O在平面E上的投影為A，A在平面E上的一直線L之投影點為B，若L上一點C和B點的距離為 12，且$\overline{OC}=13$，$\overline{AB}=2$，求$\overline{OA}$的長度。

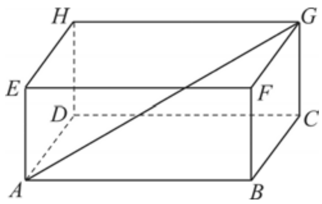
【解答】$\sqrt{21}$

【詳解】

$\overline{OA}\perp E,\overline{AB}\perp L\Rightarrow\overline{OB}\perp\overline{BC}$ (三垂線定理)

$\overline{OB}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$

$\overline{OA}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$



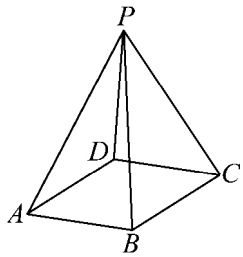
2-1-2. 設過一長方體同一頂點之三側面的對角線長分別為 5、6、7，則此長方體之對角線長為？

【解答】$\sqrt{55}$

【詳解】

設$\overline{AE}=z,\overline{AB}=y,\overline{AD}=x$，又$\overline{AH}=5,\overline{AF}=6,\overline{AC}=7$

則$\begin{cases}x^2+z^2=5^2\\ y^2+z^2=6^2\\ x^2+y^2=7^2\end{cases}\Rightarrow 2(x^2+y^2+z^2)=110\Rightarrow\overline{AG}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{55}$



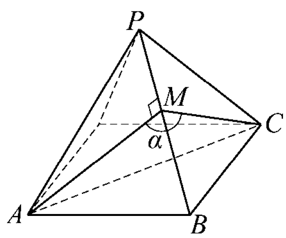
2-1-3. 設有一正四角錐的側面是正三角形(如圖)，若兩側面的夾角為α，則$\cos\alpha=$？

【解答】$-\dfrac{1}{3}$

【詳解】

如圖，設$\overline{PB}$之中點為M，△PAB，△PBC都是正三角形

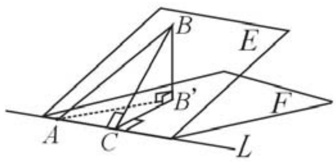
$\Rightarrow\overline{AP}=\overline{AB}$，$\overline{CP}=\overline{CB}$，$\therefore\overline{AM}\perp\overline{PB}$，$\overline{CM}\perp\overline{PB}$，



故$\angle AMC=\alpha$（二面角的定義），設$\overline{AP}=a$，則$\overline{AM}=\overline{CM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，

又$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$，△$ACM$ 中，由餘弦定理得

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AM}^2+\overline{CM}^2-\overline{AC}^2}{2\overline{AM}\cdot\overline{CM}}=\frac{\left(\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2-2a^2\right)}{2\left(\frac{3}{4}a^2\right)}=-\frac{1}{3}\ .$$



2-1-4. 設兩平面E,F之夾角$30°$，其交線為L，若L上有一點A，在E上有一線段$\overline{AB}=20$，且$\overline{AB}$與L之夾角為$60°$，求$\overline{AB}$在平面F上

的投影長。

【解答】$5\sqrt{13}$

【詳解】

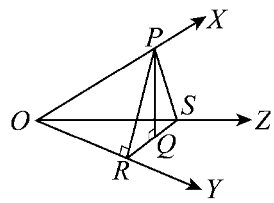
$\overline{BB'} \perp F, \overline{B'C} \perp L \Rightarrow \overline{BC} \perp L$ (三垂線定理)

ΔABC 中，$30°-60°-90° \Rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{2}=\dfrac{\overline{BC}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=10\sqrt{3}$

$\Delta BCB'$ 中，$30°-60°-90° \Rightarrow \dfrac{\overline{BC}}{2}=\dfrac{\overline{BB'}}{1} \Rightarrow \overline{BB'}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=5\sqrt{3}$

$\Delta ABB'$ 中，$\overline{AB'}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BB'}^2}=\sqrt{20^2-(5\sqrt{3})^2}=\sqrt{325}=5\sqrt{13}$

2-1-5. 不共面三射線 $\overrightarrow{OX}$ ， $\overrightarrow{OY}$ ， $\overrightarrow{OZ}$ 互成 $30°$ 角， $P \in \overrightarrow{OX}$ ， $\overline{OP}=10$ ， P 至平面 YOZ 之投影為 Q ， Q 至 $\overrightarrow{OY}$ 之垂足為 R ，又 $\overleftrightarrow{QR}$ 交 $\overleftrightarrow{OZ}$ 於 S ，求 $\overline{RS}=?\overline{OS}=?$



【解答】$\overline{RS}=5, \overline{OS}=10$

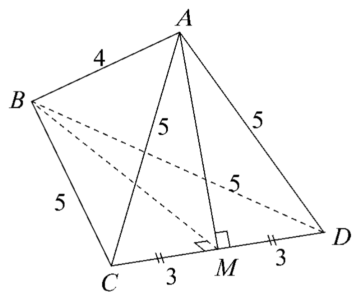
【詳解】

$\because \overline{PQ} \perp$ 平面 OYZ ， $\overline{QR} \perp \overline{OY}$ ， $\therefore \overline{PR} \perp \overline{OY}$ ，(三垂線定理)

$\triangle OPR$ 中， $\dfrac{\overline{OP}}{2}=\dfrac{\overline{OR}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\overline{PR}}{1} \Rightarrow \overline{OR}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{OP}=5\sqrt{3}$ ，

$\triangle OSR$ 中， $\dfrac{\overline{OS}}{2}=\dfrac{\overline{OR}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\overline{RS}}{1} \Rightarrow \begin{cases} \overline{OS}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overline{OR}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times 5\sqrt{3}=10 \\ \overline{RS}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\overline{OR}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times 5\sqrt{3}=5 \end{cases}$

2-1-6. 設四面體 $ABCD$ 中，$\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=5$，$\overline{AB}=4$，$\overline{CD}=8$，若平面 ACD 與平面 BCD 的夾角為 θ，則 $\cos\theta$ 之值為?



【解答】$\dfrac{1}{9}$

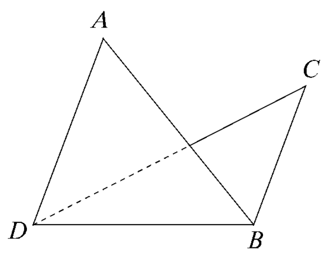
【詳解】

如圖，M 為 $\overline{CD}$ 中點 $\therefore$ $\overline{CM}=\overline{MD}=4$

又 $\overline{AM} \perp \overline{CD}$ ， $\overline{BM} \perp \overline{CD}$ 且 $\overline{AC}=\overline{AD}=5$， $\overline{BC}=\overline{BD}=5$，$\therefore \overline{AM}=\overline{BM}=3$

在△ABM 中， $\overline{AB}=4$，且 $\angle AMB=\theta$

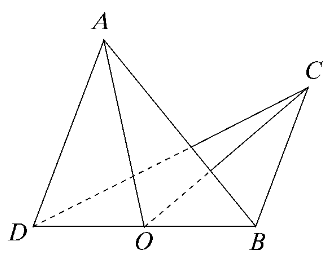
$\therefore$ $\cos\theta=\cos(\angle AMB)=\dfrac{\overline{AM}^2+\overline{BM}^2-\overline{AB}^2}{2\overline{AM}\cdot\overline{BM}}=\dfrac{3^2+3^2-4^2}{2\times3\times3}=\dfrac{1}{9}$



2-1-7. 如圖，將一張正方形的紙 $ABCD$ 沿著對角線 $\overline{BD}$ 摺起，使得 $\angle ABC=30°$，則二平面 ABD 與 BCD 的夾角θ，則 $\cos\theta$ 之值為?

【解答】$\sqrt{3}-1$

【詳解】



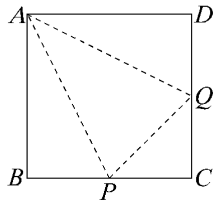
如左圖，取 O 為 $\overline{BD}$ 中點 $\therefore$ $\overline{AO} \perp \overline{BD}$ ，$\overline{CO} \perp \overline{BD}$ ，設正方形 $ABCD$ 的邊長為 a，則正方形 $ABCD$ 的對角線段 $\overline{AC}=\sqrt{2}a$ ， $\overline{AO}=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}=\overline{OC}$

在△ABC 中 ∵ $\overline{AB}=\overline{BC}=a$，$\angle ABC=30°$

$$\Rightarrow \overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos 30°=a^2+a^2-2\times a\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=(2-\sqrt{3})a^2$$

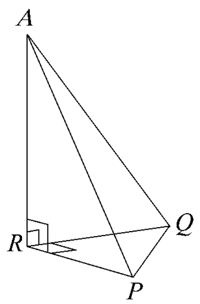
$$\therefore \cos\theta=\cos(\angle AOC)=\frac{\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-\overline{AC}^2}{2\overline{OA}\cdot\overline{OC}}=\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2-(2-\sqrt{3})a^2}{2\times(\frac{\sqrt{2}}{2}a)\times(\frac{\sqrt{2}}{2}a)}=\sqrt{3}-1$$

2-1-8. 如圖，正方形$ABCD$的邊長為a，而P，Q各為$\overline{BC}$，$\overline{CD}$的中點，今將此正方形沿虛線向上摺起，使B，C，D三點重合，令此重合點為R，則四面體A-PQR之體積為__________。



【解答】$\frac{a^3}{24}$

【詳解】



所摺得的四面體，如圖（B，C，D 重合為 R）

$\therefore$ $\overline{AR}=\overline{AB}=a$，$\overline{RP}=\overline{RQ}=\overline{CQ}=\frac{a}{2}$，又 $\overline{RP}\perp\overline{RQ}$，$\overline{AR}\perp\overline{RQ}$，$\overline{AR}\perp\overline{RP}$

$\therefore$ 四面體的體積 $=\frac{1}{3}(\triangle RPQ)\cdot\overline{AR}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2})\cdot a=\frac{a^3}{24}$