高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：97.10.29					
範圍	2-1、2 空間基本概念(2) 空間坐標(1)	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 （ 每題 10 分 ）

(　　) 1. 下列各敘述何者恆真?

(1)平行於同一平面的二相異直線必平行

(2)垂直於同一直線的二線互相平行

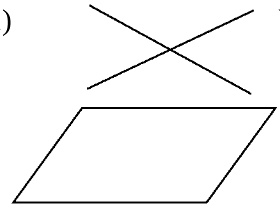
(3)若一平面與二平行平面相交，其交線互相平行

(4)任意兩相異直線必有一公垂線

(5)兩相異直線若不相交，必平行．

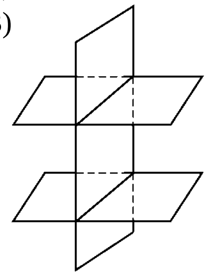
【答案】 3

【詳解】 (1) 可能相交．



(2)二度空間爲真，但三度空間不爲真．

(3)



(4)二度空間不真，但三度空間爲真．

(5)二度空間爲真，但三度空間可爲歪斜線．

(　　) 2. 下列有關空間的敘述，哪些是正確的?

(1)不相交的兩直線 L_1 與 L_2 必然平行

(2)若直線 L_1 落在平面 E 上，且直線 L_2 與 E 平行，則 L_1 與 L_2 平行

(3)若兩相異直線 L_1 與 L_2 均與平面 E 垂直，則 L_1 與 L_2 必然平行

(4)若兩相異直線 L_1 與 L_2 均與直線 L 垂直，則 L_1 與 L_2 必然平行．

【答案】 3

【詳解】 (1)，(2)與(4)均可能歪斜．

(　　) 3. 設 P 點在第一卦限，而且與 x 軸， y 軸， z 軸的距離分別爲 $\sqrt{52}$ ， $\sqrt{45}$ ，5，則 P 點的坐標爲(1) $(3,4,5)$ (2) $(3,4,6)$ (3) $(-3,-4,-6)$ (4) $(52,45,25)$ (5) $\left(\sqrt{52},\sqrt{45},5\right)$ ．

【答案】 2

【詳解】 設 $P(x,y,z)$ 且 $x>0,\ y>0,\ z>0$ ，

$$\begin{cases} y^2+z^2=52\cdots① \\ z^2+x^2=45\cdots② \\ x^2+y^2=25\cdots③ \end{cases}$$

$\dfrac{①+②+③}{2}$：$x^2+y^2+z^2=61\cdots④$

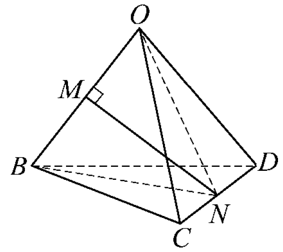
$④-①$ $x^2=9\Rightarrow x=\pm3$,

$④-②$ $y^2=16\Rightarrow y=\pm4$,

$④-③$ $z^2=36\Rightarrow z=\pm6$,

P 點在第一卦限，$\therefore$取$(3,4,6)$.

(　　)4. 正四面體$OBCD$中，二稜$\overline{OB}$，$\overline{CD}$之中點分別爲M，N，求$\dfrac{\overline{OB}}{\overline{MN}}=$?



(1)1　(2)$\sqrt{3}$　(3)$\sqrt{2}$　(4)$\dfrac{1}{2}$　(5)$\dfrac{1}{3}$.

【答案】　3

【詳解】　$\triangle OBN$ 中，$\overline{ON}=\overline{BN}$，$M$ 爲$\overline{OB}$中點，$\therefore\overline{NM}\perp\overline{OB}$，

設稜長爲a，則$\overline{ON}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$\overline{OM}=\dfrac{a}{2}$，$\therefore\overline{MN}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}a$，$\therefore\dfrac{\overline{OB}}{\overline{MN}}=\dfrac{a}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}a}=\sqrt{2}$，

(　　) 5. (複選)已知$P(-2,3,-5)$是空間上的定點，下列敘述何者爲真?

(1) P 相關於原點的對稱點是$(2,-3,5)$

(2) P 相關於 yz 平面的對稱點是$(2,3,-5)$

(3) P 相關於 x 軸的對稱點是$(-2,-3,5)$

(4) P 到 xz 平面的距離爲 3

(5) P 到 y 軸的距離爲$\sqrt{29}$.

【答案】　12345

【詳解】　(1)○．(2)○．(3)○．(4)○．(5)○．

(　　) 6. (複選)下列各敘述何者恆真?

(1)若一直線垂直於一平面，則包含此直線的每一平面均與此平面垂直

(2)過直線外一點，恰有一直線垂直於此直線

(3)過直線外一點，恰有一直線平行於此直線

(4)過平面外一點，恰有一直線垂直於此平面

(5)過平面外一點，恰有一直線平行於此平面．

【答案】　1234

【詳解】　(1)○．　(2)○．　(3)○．　(4)○．　(5)╳：可有無限多條．

(　　) 7. (複選)設$A(3,-1,2)$，$B(2,1,1)$，若點P在xz平面上使$\triangle ABP$爲正三角形，則P點坐標可爲

(1)$(0,0,0)$　(2)$(1,0,3)$　(3)$(4,0,0)$　(4)$(5,0,4)$　(5)$(0,0,3)$.

【答案】　23

【詳解】　設$P(x,0,z)$，由$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{AB}$得

$$\begin{cases}(x-3)^2+1+(z-2)^2=6\\(x-2)^2+1+(z-1)^2=6\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x^2+z^2-6x-4z=-8\cdots①\\x^2+z^2-4x-2z=0\cdots②\end{matrix}$$

$①-②$：$x+z=4\Rightarrow z=4-x$ 代入②

得$x^2-5x+4=0\Rightarrow x=1,\ 4\Rightarrow z=3,\ 0$，　$\therefore P(1,0,3)$或$P(4,0,0)$，

(　　　) 8. (複選)下列敘述何者正確?

(1)在平面上，若兩相異直線不相交，則它們必平行

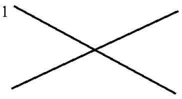
(2)在空間中，若兩相異直線不相交，則它們必平行

(3)在平面上，任意兩相異直線一定有公垂線（仍在該平面上）

(4)在空間中，任意兩相異直線一定有公垂線

(5)在空間中，相交的兩相異平面一定有公垂面（公垂面是指與該兩平面都垂直的平面）．

【答案】 145

【詳解】 (1)○． (2)╳：可能歪斜． (3)╳：如 L_1  L_2． (4)○． (5)○．

(　　　)9. (複選)下列各敘述何者恆真?

(1)空間中任意相異三點決定一平面

(2)空間中兩平行線決定一平面

(3)空間中兩兩相交，但不交於同一點的三直線決定一平面

(4)空間中相交之兩相異直線決定一平面

(5)空間中兩相異直線，若不相交，則必平行．

【答案】 234

【詳解】 (1)╳：不共線之相異三點． (2)○． (3)○． (4)○．(5)╳：可能歪斜．

(　　　)10 (複選)下列有關空間的敘述，哪些是正確的?

(1)過已知直線外一點，恰有一平面與此直線平行

(2)過已知直線外一點，恰有一平面與此直線垂直

(3)過已知平面外一點，恰有一直線與此平面平行

(4)過已知平面外一點，恰有一平面與此平面垂直

(5)過已知平面外一點，恰有一平面與此平面平行．

【答案】 25

【詳解】 (1)╳：無限多．(2)○．(3)╳：無限多．(4)╳：無限多．(5)○．

二、填充題 (每題 10 分)

1. 設空間三點 $P(14,6,8)$，$Q(2,0,12)$，$R(8,10,-4)$，則△PQR 的形狀爲____________．

【答案】 等腰直角三角形

【詳解】 $\overline{PQ}=\sqrt{(14-2)^2+6^2+(8-12)^2}=14$，

$\overline{PR}=\sqrt{(14-8)^2+(6-10)^2+(8+4)^2}=14$，

$\overline{QR}=\sqrt{(2-8)^2+(-10)^2+(12+4)^2}=14\sqrt{2}$，

$\overline{PQ}^2+\overline{PR}^2=\overline{QR}^2$，且 $\overline{PQ}=\overline{PR}$ 　　∴△PQR 爲等腰直角三角形．

2. 空間中一點 $A(-3,1,-4)$

(1)點 A 在 x 軸，y 軸與 z 軸的正射影的坐標爲____________；

(2)點 A 到 x 軸，y 軸與 z 軸的距離爲____________；

(3)點 A 在 xy 平面，yz 平面與 zx 平面的正射影的坐標爲____________；

(4)點 A 到 xy 平面，yz 平面與 zx 平面的距離爲____________；

(5)點 A 關於 x 軸， y 軸， z 軸之對稱點為____________；

(6)點 A 關於 xy 平面， yz 平面， zx 平面之對稱點為____________．

【答案】 (1) $(-3,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,-4)$ ．

(2) $\sqrt{17}$ ， 5， $\sqrt{10}$ ．

(3) $(-3,1,0)$, $(0,1,-4)$, $(-3,0,-4)$ ．

(4)4，3，1．

(5) $(-3,-1,4)$, $(3,1,4)$, $(3,-1,-4)$ ．

(6) $(-3,1,4)$, $(3,1,-4)$, $(-3,-1,-4)$ ．

3. 空間中 $A(2,-1,3)$ ， $B(1,1,0)$ ，則 A,B 二點之距離為____________．

【答案】 $\sqrt{14}$

【詳解】 $\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(-1-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{14}$ ．

4. 設 $P(4,2,3)$ ， $Q(5,-1,7)$ ，求線段 $\overline{PQ}$ 在 yz 平面上的正射影長為____________．

【答案】 5

【詳解】 $P'(0,2,3)$, $Q'(0,-1,7)$ ， $\therefore \overline{P'Q'}=\sqrt{9+16}=5$ ．

5. 空間中二點 $A(1,2,1)$, $B(2,-1,3)$ ，在 x 軸上一點 P 使 $\overline{PA}=\overline{PB}$ ，則 P 的坐標為____________．

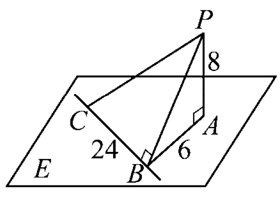
【答案】 $(4,0,0)$

【詳解】 設 $P(x,0,0)$ ，

$\overline{PA}=\overline{PB}\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+1^2+(-3)^2}$

$\Rightarrow x^2-2x+1+5=x^2-4x+4+10 \quad \Rightarrow 2x=8\Rightarrow x=4$ ， $\therefore P(4,0,0)$ ．

6. 如圖，設 A ， B ， C 在平面 E 上，且 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$ ，另設 $\overline{PA}\perp$ 平面 E 於 A ，已知 $\overline{PA}=8$ ， $\overline{AB}=6$ ， $\overline{BC}=24$ ，求 $\overline{PC}=$____________．



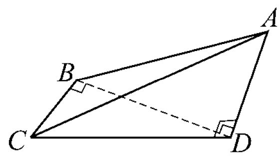
【答案】 26

【詳解】 $\triangle PAB$ 中， $\overline{PB}=\sqrt{8^2+6^2}=10$ ，

$\because \overline{PA}\perp E$ ， $\overline{AB}\perp\overline{BC}$ ，由三垂線定理知 $\overline{PB}\perp\overline{BC}$ ，

$\triangle PBC$ 中， $\overline{PC}=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{10^2+24^2}=26$ ．

7. 如圖， $ABCD$ 為四面體，已知 $\overline{AD}$ 垂直於平面 BCD ， $\overline{BC}\perp\overline{BD}$ ， $\overline{BC}=7$ ， $\overline{AB}=24$ ， $\overline{AD}=15$ ，則



(1) $\overline{AC}$ 之長為____________；

(2)若平面 ABD 與平面 ACD 之夾角為 θ ，則 $\sin\theta$ 之值為____________．

【答案】 (1)25;(2) $\dfrac{7}{20}$

【詳解】 (1) $\overline{AD}\perp$ 平面 BCD ， $\overline{BC}\perp\overline{BD}$ ，由三垂線定理知 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$ ，

故 $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{24^2+7^2}=25$ ．

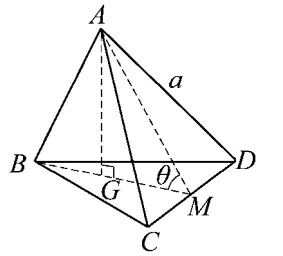
(2) $\because \overline{AD}\perp$ 平面 BCD ， $\therefore \overline{BD}\perp\overline{AD}$ 且 $\overline{CD}\perp\overline{AD}$ ， 故 $\angle BDC$ 為平面 ABD 與平面 ACD 之夾角，

$\triangle BCD$ 中， $\sin\theta=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\dfrac{7}{\sqrt{25^2-15^2}}=\dfrac{7}{20}$ ．

8. 設 $ABCD$ 爲正四面體（各面均爲正△），其稜長 a，設 M 爲 $\overline{CD}$ 中點，$\angle AMB=\theta$，

則(1)其高 $\overline{AG}=$____________；(2)體積爲____________；

(3)全表面積爲____________；(4) $\cos\theta=$____________ .



【答案】 (1) $\frac{\sqrt{6}}{3}a$;(2) $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$;(3) $\sqrt{3}a^2$;(4) $\frac{1}{3}$

【詳解】 (1)∵稜長爲 a，底面△BCD 的中線 $\overline{BM}$ 長爲 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，G 爲重心，

$\therefore \overline{BG}=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}a$， △$ABG$ 中，$\overline{AG}^2=\overline{AB}^2-\overline{BG}^2=a^2-\frac{1}{3}a^2=\frac{2}{3}a^2\Rightarrow\overline{AG}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

(2)體積 $=\frac{1}{3}$（底面積）$\cdot$高 $=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

(3)全表面積 $=4$（△BCD）$=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}a^2$. (4)△AGM 中，$\cos\theta=\frac{\overline{GM}}{\overline{AM}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{1}{3}$.

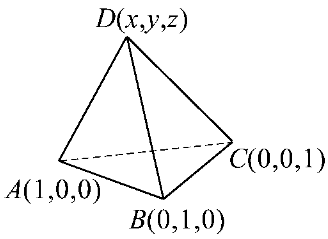
9. 設 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$ 及 D 爲一正四面體之四個頂點，求 D 點坐標爲____________ .

【答案】 $(1,1,1)$ 或 $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

【詳解】

設 $D(x,y,z)$，

則 $\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}=\overline{AB}=\sqrt{2}$



$\Rightarrow (x-1)^2+y^2+z^2=2\cdots\cdots\cdots$①

$x^2+(y-1)^2+z^2=2\cdots\cdots$②

$x^2+y^2+(z-1)^2=2\cdots\cdots\cdots$③

①-②：$-2x+2y=0\Rightarrow x=y$ 代入②，③

$y^2+(y-1)^2+z^2=2\cdots$④

$2y^2+(z-1)^2=2\cdots\cdots$⑤

④ − ⑤：$-2y+2z=0\Rightarrow y=z$，$\therefore x=y=z$，

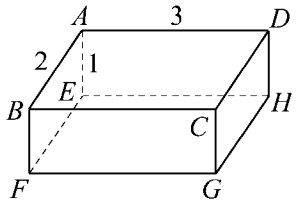
代入① $(x-1)^2+x^2+x^2=2$

$\Rightarrow 3x^2-2x-1=0\Rightarrow(x-1)(3x+1)=0$

$\Rightarrow x=1$ 或 $-\frac{1}{3}$，

$\therefore D(1,1,1)$ 或 $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

10. 如右圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 中，$\overline{AE}=1$，$\overline{AB}=2$，$\overline{AD}=3$



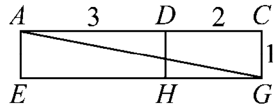
(1)有一蜜蜂從 A 點飛到 G 點，其飛行的最短距離為＿＿＿＿＿＿；

(2)有一螞蟻從 A 點爬到 G 點，其爬行的最短距離為＿＿＿＿＿＿．

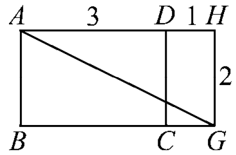
【答案】 (1) $\sqrt{14}$;(2) $\sqrt{18}$

【詳解】

(1) $\overline{AG}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{EG}^2}=\sqrt{\overline{AE}^2+\left(\overline{EF}^2+\overline{FG}^2\right)}=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ ．

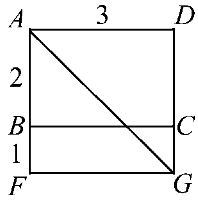


(2)(i)將矩形 $DCGH$ 沿 $\overline{DH}$ 攤開，此時 $\overline{AG}=\sqrt{(3+2)^2+1^2}=\sqrt{26}$ ．



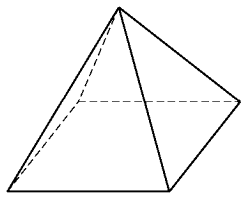
(ii)將矩形 $DCGH$ 沿 $\overline{DC}$ 攤開，此時 $\overline{AG}=\sqrt{(3+1)^2+2^2}=\sqrt{20}$ ．

(iii)將矩形 $BCGF$ 沿 $\overline{BC}$ 攤開，此時 $\overline{AG}=\sqrt{3^2+(2+1)^2}=\sqrt{18}$ ．



由(i)，(ii)，(iii)知爬行的最短距離為 $\sqrt{18}$ ．

11. 如圖，有一各稜等長的金字塔形，設其四個正三角形的斜面中相鄰二面的夾角為 α，側面與底面之夾角為 β，則(1) $\cos\alpha=$＿＿＿＿＿＿；(2) $\sin\beta=$＿＿＿＿＿＿．

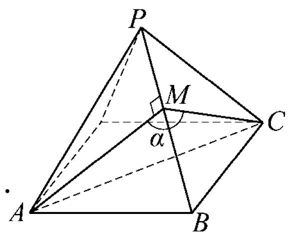


【答案】 (1) $-\dfrac{1}{3}$;(2) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

【詳解】

(1)設 $\overline{PB}$ 之中點為 M，$\triangle PAB$，$\triangle PBC$ 都是正三角形 $\Rightarrow \overline{AP}=\overline{AB}$，$\overline{CP}=\overline{CB}$，

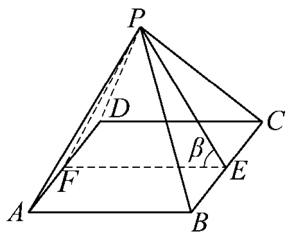
$\therefore \overline{AM}\perp\overline{PB}$，$\overline{CM}\perp\overline{PB}$，故 $\angle AMC=\alpha$（二面角的定義），



令 $\overline{AP}=a$，則 $\overline{AM}=\overline{CM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，又 $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$，

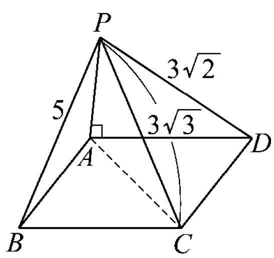
$\triangle ACM$ 中，由餘弦定理得 $\cos\alpha=\dfrac{\overline{AM}^2+\overline{CM}^2-\overline{AC}^2}{2\overline{AM}\cdot\overline{CM}}=\dfrac{\left(\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2-2a^2\right)}{2\left(\frac{3}{4}a^2\right)}=-\dfrac{1}{3}$ ．

(2)設 E，F 分別為 $\overline{BC}$，$\overline{AD}$ 之中點　$\triangle PEF$ 中，$\overline{PE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\overline{PF}$，$\overline{EF}=a$，



$$\cos\beta=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot a}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\quad \therefore \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{6}}{3}\ .$$

12. 過矩形 $ABCD$ 的頂點 A，作垂直於這個矩形所在平面的垂直線段 $\overline{PA}$，若 $\overline{PB}=5$，$\overline{PC}=3\sqrt{3}$，$\overline{PD}=3\sqrt{2}$，求 $\overline{PA}=$＿＿＿＿＿＿．



【答案】 4

【詳解】 設 $\overline{AP}=z,\overline{AB}=x,\overline{AD}=y$

$\triangle PAB$ 中：$5^2=z^2+x^2\cdots$①

$\triangle PAC$ 中：$\left(3\sqrt{3}\right)^2=z^2+x^2+y^2\cdots$②

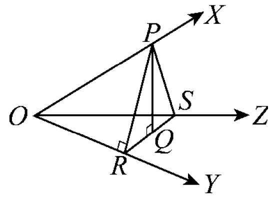
$\triangle PAD$ 中：$\left(3\sqrt{2}\right)^2=z^2+y^2\cdots$③

②−③：$\left(3\sqrt{3}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2=x^2$，$\therefore x^2=9$ 代入①得：$\overline{PA}=z=4$ ．

13. 不共面三射線 $\overrightarrow{OX}$ ，$\overrightarrow{OY}$ ，$\overrightarrow{OZ}$ 互成 $30°$ 角，$P\in\overrightarrow{OX}$ ，$\overline{OP}=2$ ，P 至平面 YOZ 之投影爲 Q ，Q 至 $\overrightarrow{OY}$ 之垂足爲 R ，又 $\overleftrightarrow{QR}$ 交 $\overleftrightarrow{OZ}$ 於 S ，求 $\overline{PS}^2+\overline{OR}^2=$____________ ．

【答案】 $11-4\sqrt{3}$

【詳解】



$\because \overline{PQ}\perp$ 平面 OYZ ，$\overline{QR}\perp\overline{OY}$ ，$\therefore \overline{PR}\perp\overline{OY}$ ，(三垂線定理)

$\triangle OPR$ 中，$\dfrac{\overline{OP}}{2}=\dfrac{\overline{OR}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\overline{PR}}{1}\Rightarrow \overline{OR}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{OP}=\sqrt{3}$,

$\triangle OPS$ 中，由餘弦定理 $\overline{PS}^2=\overline{OP}^2+\overline{OS}^2-2\overline{OP}\cdot\overline{OS}\cdot\cos 30°$

$=2^2+2^2-2\cdot 2\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=8-4\sqrt{3}$,

$\therefore \overline{PS}^2+\overline{OR}^2=8-4\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=11-4\sqrt{3}$ ．